Análisis de una variable real I

Tijani Pakhrou

Índice general

Capítulo 1

Introducción axiomática de los números

1.1. Números naturales

1.1.1. Axiomas de Peano

Definición 1.1.1 (Axiomas de Peano). *Se llama* ***conjunto de los números naturales****, y se denota por "$\mathbb{N}$", a cualquier conjunto que verifica las cinco condiciones siguientes:*

(1) *Existe un elemento de $\mathbb{N}$ al que llamaremos* ***uno*** *1, esto es, $1 \in \mathbb{N}$.*

(2) *Para cada número $n \in \mathbb{N}$ existe otro número natural único, $\boldsymbol{n_s}$, que se llama* ***sucesor*** *de n.*

(3) *El 1 no es el sucesor de ningún número natural. ($\forall n \in \mathbb{N}$, $n_s \neq 1$).*

(4) *Sean $n, m \in \mathbb{N}$, entonces:*

$$n_s = m_s \Longleftrightarrow n = m.$$

(5) ***Principio de inducción matemática:***
Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$. Si

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ 1 \in A,\ y \\ \bullet\ \textit{para cada elemento } n \in A,\ \textit{se tiene que } n_s \in A \end{array}\right\} \textit{entonces } A = \mathbb{N}.$$

Observación 1.1.2. *Los números naturales son los números* $1, 2, 3, \ldots$

Observación 1.1.3. *A partir de estas cinco condiciones, y usando sistemáticamente el quinto axioma, de la inducción, podemos probar todas las propiedades del conjunto* $\mathbb{N}$.

1.1.2. Definición de la suma y del producto

Definición 1.1.4 (Axioma de la suma). *Definimos la suma de números naturales como una aplicación*

$$S: \ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},$$

de modo que para cada $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, *tenemos* $S(n, m) \in \mathbb{N}$ *y se cumple que*

$$\begin{cases} \bullet \quad S(1, n) = n_s, \\ \\ \bullet \quad S(n_s, m) = \big[S(n, m)\big]_s. \end{cases}$$

Notación 1. *Representaremos en adelante la suma de dos elementos de* $\mathbb{N}$, n *y* m, *en la manera habitual:*

$$S(n, m) = n + m,$$

y las dos condiciones de la definición serían, con esta notación:

$$\begin{cases} \bullet \quad 1 + n = n_s, \\ \\ \bullet \quad n_s + m = (n + m)_s. \end{cases}$$

Definición 1.1.5 (Axioma del producto). *Definimos el producto de números naturales como una aplicación*

$$P: \ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},$$

de modo que para cada $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, *tenemos* $P(n, m) \in \mathbb{N}$ *y se cumple que*

$$\begin{cases} \bullet \quad P(1, n) = n, \\ \\ \bullet \quad P(n_s, m) = P(n, m) + m. \end{cases}$$

Notación 2. *Representaremos en adelante el producto de dos elementos de* $\mathbb{N}$, n *y* m, *en la manera habitual:*

$$P(n, m) = n \cdot m \quad o \quad nm \quad (\textit{si no hay lugar a confusión}).$$

y las dos condiciones de la definición serían, con esta notación:

$$\begin{cases} \bullet \quad 1 \cdot n = n, \\ \\ \bullet \quad n_s \cdot m = n \cdot m + m. \end{cases}$$

1.1.3. Axiomas de la suma y del producto

Axioma 1.1.6. *Sean* $n, m, p \in \mathbb{N}$.

(1) ***Asociativa de la suma****:*

$$(n+m)+p = n+(m+p).$$

(2) ***Conmutativa de la suma****:*

$$n+m = m+n.$$

(3) ***Asociativa del producto****:*

$$(n \cdot m) \cdot p = n \cdot (m \cdot p).$$

(4) ***Conmutativa del producto****:*

$$n \cdot m = m \cdot n.$$

(5) ***Existencia de elemento neutro****:*

$$n \cdot 1 = 1 \cdot n = n, \quad 1 \quad \textit{es el elemento neutro para el producto}$$

(6) ***Distributiva del producto respecto de la suma****:*

$$n \cdot (m+p) = n \cdot m + n \cdot p.$$

1.1.4. Axiomas de orden

Los números naturales pueden "***ordenarse***" mediante la relación "***ser menor o igual que***", que se representa por " $\leq$ ".

Definición 1.1.7.

- *Se define la relación "**menor o igual que**" ($\leq$) del modo siguiente:*

$$\forall\ n, m \in \mathbb{N}, \quad n \leq m \iff n = m \quad o \quad \exists\ d \in \mathbb{N}\ :\ n + d = m,$$

en estas circunstancias d se designa

$$d = n - m,$$

*y se llama **diferencia** de n a m.*

- *Se define la relación "**mayor o igual que**" ($\geq$) de la forma:*

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N}, \quad n \geq m \iff m \leq n.$$

- *Se define la relación "**menor estrictamente que**" ($<$) como:*

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N}, \quad n < m \iff n \leq m \quad y \quad n \neq m.$$

- *Se define la relación "**mayor estrictamente que**" ($>$) de la manera:*

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N}, \quad n > m \iff m < n.$$

Axioma 1.1.8. *La relación $\leq$ satisface los siguientes axiomas:*

(7) ***Reflexiva**: $n \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(8) ***Antisimétrica**: si $n \leq m$ y $m \leq n$, entonces $n = m$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$.*

(9) ***Transitiva**: si $n \leq m$ y $m \leq p$, entonces $n \leq p$ para todos $n, m, p \in \mathbb{N}$.*

(10) ***Orden total**: dos naturales cualesquiera n y m siempre son comparables, esto es, bien $n \leq m$, bien $m \leq n$.*

Definición 1.1.9. *Por satisfacer las tres primeras propiedades, se dice que "$\leq$" es una **relación de orden** en $\mathbb{N}$, y por satisfacer además la cuarta, se dice que es una **relación de orden total**.*

Axioma 1.1.10 (Principio de buena ordenación). *Todo conjunto no vacío de números naturales posee un elemento **mínimo**, es decir, dado un subconjunto $S \subseteq \mathbb{N}$ no vacío, existe un elemento m en S tal que $m \leq n$ para todo $n \in S$.*

1.2. Números enteros

1.2.1. Definición de los números enteros

Se trata ahora de obtener el conjunto que denotamos "$\mathbb{Z}$" de los números enteros apoyándose en el ya conocido $\mathbb{N}$.

Definición 1.2.1. *Definimos la aplicación*

$$\varphi : \ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z},$$

de la forma siguiente: para cada par ordenado de números naturales (n, m)*, le asociamos un elemento:*

$$\varphi(n,m) = \begin{cases} \text{el entero positivo} & n-m & \text{si} & n > m \\ \\ \text{elemento neutro (cero)} & 0 & \text{si} & n = m \\ \\ \text{el entero negativo} & -(m-n) & \text{si} & n < m \end{cases}$$

Observación 1.2.2. *Se observa así que a pares distintos puede asociarse el mismo número entero* n*. Precisamente, se establece que la colección de tales pares constituye la identidad de* n*.*

Ejemplo 1.2.3. El número 3 significa dos cosas: un número natural y el entero positivo asociado mediante la aplicación φ a:

$$\big\{(4,1),(5,2),(6,3),\dots\big\},$$

y los nuevos objetos 0 y -3 son, respectivamente,

$$\big\{(1,1),(2,2),(3,3),\dots\big\}$$

y

$$\big\{(1,4),(2,5),(3,6),\dots\big\}.$$

Resumen 1.2.4. *Los números enteros son:*

$$\cdots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$$

El conjunto de los números enteros es:

$$\mathbb{Z} = \big\{a = \varphi(n,m)\ :\ (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\big\}.$$

1.2.2. Definición de la suma y del producto

Definición 1.2.5. *Sean* (n, m) *y* (p, q) *dos pares ordenados de números naturales.*

- ***La suma*** *"+":*

$$\varphi(n,m) + \varphi(p,q) = \varphi(n+p, m+q).$$

- ***El producto*** *"·":*

$$\varphi(n,m) \cdot \varphi(p,q) = \varphi(np+mq, mp+nq).$$

Observación 1.2.6. *Estas definiciones coinciden con las de* $\mathbb{N}$ *cuando se trata de enteros positivos y son independientes de la elección del par ordenado que representa a cada número.*

1.2.3. Propiedades de la suma y del producto

Observación 1.2.7. *Los axiomas de la suma y del producto para los números naturales también los cumplen los números enteros.*

Proposición 1.2.8.

(11) ***Elemento neutro* (*cero*) *para la suma***: *hay un número entero, que denotamos por* 0, *tal que*
$$0 + a = a + 0 = a$$
para cualquier entero a.

(12) ***Elemento opuesto para la suma***: *para cada entero* a *hay otro número entero (y solo uno), que denotamos por* $-a$, *tal que*
$$(-a) + a = a + (-a) = 0.$$

Demostración. Es inmediato basta aplicar la definición. □

1.2.4. Ordenación de los enteros

Definición 1.2.9 (Ordinación). *Sean* (n, m) *y* (p, q) *dos pares ordenados de números naturales.*
$$\varphi(n, m) \leq \varphi(p, q) \quad \textit{significa} \quad n + q \leq m + p.$$

Observación 1.2.10. *Los axiomas del orden para los números naturales también los cumplen los números enteros.*

Proposición 1.2.11. *Otros propiedades de la relación "$\leq$" para los números enteros son los siguientes:*

(13) *Sean* $a, b \in \mathbb{Z}$. *Si* $a \leq b$, *entonces* $a + c \leq b + c$ *para todo* $c \in \mathbb{Z}$.

(14) *Sean* $a, b, c \in \mathbb{Z}$. *Si* $a \leq b$ *y* $0 \leq c$, *entonces* $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Demostración. Es inmediato basta aplicar la definición. □

Definición 1.2.12. *Sea* S *un subconjunto de* $\mathbb{Z}$.

- *Se dice que* S *está acotado* ***inferiormente*** *si existe un número* $M \in \mathbb{Z}$ *tal que*
$$M \leq z \quad \textit{para todo} \quad z \in S.$$

- *Se dice que S está acotado* ***superiormente*** *si existe un número $N \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$z \leq N \quad \textit{para todo} \quad z \in S.$$

Axioma 1.2.13 (Principio de buena ordenación). *Todo subconjunto, S, no vacío, de $\mathbb{Z}$ que esté acotado inferiormente contiene un elemento* ***mínimo****, es decir, existe un entero $a \in S$ tal que $a \leq z$ para todo $z \in S$.*

Teorema 1.2.14. *Todo subconjunto, A, no vacío, de $\mathbb{Z}$ que esté acotado superiormente contiene un elemento* ***máximo****, es decir, existe un entero $b \in A$ tal que $z \leq b$ para todo $z \in A$.*

Demostración. Sea A un subconjunto de $\mathbb{Z}$, no vacío y acotado superiormente. Entonces el conjunto

$$-A = \{-a : \ a \in A\}$$

de los números opuestos de los de A, no vacío y es acotado inferiormente. Por el Axioma 1.2.13, existe un número $m \in -A$ tal que

$$m \leq -a \quad \forall -a \in -A.$$

Luego

$$a \leq -m \quad \forall\, a \in A.$$

Por tanto el número $-m$ es el máximo de A. □

Observación 1.2.15. *En $\mathbb{Z}$ puede hablarse del siguiente a un número entero, en el sentido de que entre n y $n+1$ no hay ningún otro número entero.*

1.3. Números racionales

1.3.1. Definición de los números racionales

La división es una operación aritmética consiste en averiguar cuántas veces un número (*el divisor*) está contenido en otro número (*el dividendo*).

Al resultado entero de la división se denomina *cociente* y si la división no es exacta, es decir, el divisor no está contenido un número exacto de veces en el dividendo, la operación tendrá un *resto o residuo*, donde:

$$\text{dividendo} = \text{cociente} \times \text{divisor} + \text{resto}.$$

Definición 1.3.1. *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $b \neq 0$. La expresión $a \div b$ denota el resultado de dividir a (**el dividendo**) por b (**el divisor**) lo cual también se escribe $\frac{a}{b}$ es decir:*

$$a \div b = \frac{a}{b}.$$

*La expresión $\frac{a}{b}$ se llama **fracción**, y se lee "a sobre b".*

Definición 1.3.2. *Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$ son **equivalentes** significa que*

$$ab' = a'b.$$

Definición 1.3.3. *La colección de todas las fracciones que son equivalentes entre sí se llama **número racional**, y el conjunto de todos ellos se designa por "$\mathbb{Q}$", es decir:*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\; : \;\; a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } \; b \neq 0 \right\}.$$

Definición 1.3.4. *La suma y el producto en $\mathbb{Q}$ se define mediante:*

- ***La suma "+":***

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

- ***El producto "·":***

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

1.3.2. Propiedades de la suma y del producto

Proposición 1.3.5. *Sean $x, y, z \in \mathbb{Q}$.*

(1) ***Asociativa de la suma:***

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

(2) ***Conmutativa de la suma:***

$$x + y = y + x.$$

(3) ***Existencia de elemento neutro para la suma:***

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

(4) ***Existencia de elemento opuesto para la suma:***

$$x + (-x) = -x + x = 0.$$

El elemento $-x$ se llama **opuesto** *de x, y está definido por $\frac{-r}{s}$ si $\frac{r}{s}$ representa a x. El número $x + (-y)$ se designa también $x - y$ y es el único z que verifica $x = z + y$.*

(5) ***Asociativa del producto:***

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(6) ***Conmutativa del producto:***

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

(7) ***Existencia de elemento neutro para el producto:***

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

(8) ***Distributiva del producto respecto de la suma:***

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

(9) ***Existencia de elemento inverso para el producto:***
Si $x \neq 0$ existe x^{-1} tal que

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

El elemento x^{-1} se llama **inverso** *de x, y está definido por $\frac{s}{r}$ si $\frac{r}{s}$ representa a x. El número $x \cdot y^{-1}$, $y \neq 0$, se designa también $x \div y = \frac{x}{y}$, y es el único z tal que $x = z \cdot y$.*

Demostración. Es inmediato basta aplicar la definición. □

Definición 1.3.6.

- *Los cuatro propiedades implican que $(\mathbb{Q}, +)$ es un* ***grupo conmutativo****.*
- *Las ocho primeras nos dice que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un* ***anillo conmutativo****.*
- *Las nueve axiomas significan que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un* ***cuerpo conmutativo****.*

1.3.3. Ordenación de los números racionales

Definición 1.3.7. *La fracción* $\frac{a}{b}$ *se llama* ***positiva*** *si* $ab > 0$*, y es fácil comprobar que la suma y el producto de fracciones positivas lo son también. La colección de todas fracciones positivos se designa por* $\mathbb{Q}^+$*. Que* $x \in \mathbb{Q}^+$ *se denota también* $x > 0$*.*

Axioma 1.3.8. *Cada número racional* x *verifica una y sólo una de las relaciones*

$$x > 0, \qquad x = 0, \qquad -x > 0.$$

Definición 1.3.9.

- *Se define la relación "**mayor estrictamente que**"* $(>)$ *de la manera:*

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Q}, \quad x > y \iff x - y > 0.$$

- *Se define la relación "**mayor o igual que**"* $(\geq)$ *de la forma:*

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Q}, \quad x \geq y \iff x = y \quad o \quad x > y.$$

- *Se define la relación "**menor o igual que**"* $(\leq)$ *del modo siguiente:*

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Q}, \quad x \leq y \iff y \geq x.$$

- *Se define la relación "**menor estrictamente que**"* $(<)$ *como:*

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Q}, \quad x < y \iff y > x.$$

Proposición 1.3.10. *Sean* $x, y, z \in \mathbb{Q}$*.*

(10) ***Reflexiva****:*

$$x \leq x.$$

(11) ***Antisimétrica****:*

$$\text{Si} \quad x \leq y \quad e \quad y \leq x \quad \text{entonces} \quad x = y.$$

(12) ***Transitiva****:*

$$\text{Si} \quad x \leq y \quad e \quad y \leq z \quad \text{entonces} \quad x \leq z.$$

(13) ***Orden total****:*

$$x \leq y \quad \text{o bien} \quad y \leq x.$$

(14) ***Compatibilidad del orden con la suma:***

$$\textit{Si} \quad x \leq y \quad \textit{entonces} \quad x + z \leq y + z.$$

(15) ***Compatibilidad del orden con el producto por elementos no negativos:***

$$\textit{Si} \quad x \leq y \quad e \quad z \geq 0 \quad \textit{entonces} \quad x \cdot z \leq y \cdot z.$$

Demostración. Es inmediato basta aplicar la definición. □

Definición 1.3.11. *Las* 15 *propiedades implican que* $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ *es un* ***cuerpo conmutativo totalmente ordenado****.*

Proposición 1.3.12. *En* $\mathbb{Q}$ *no podemos hablar de siguiente de un racional.*

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{Q}$ con $a < b$, entonces:

$$a = \frac{2 \cdot a}{2} = \frac{a + a}{2} < \frac{a + b}{2} < \frac{b + b}{2} = \frac{2 \cdot b}{2} = b$$

Con lo que entre cualesquiera dos racionales distintos hay infinitos racionales distintos. □

1.4. Axiomas de cuerpo

Definición 1.4.1. *Un* ***cuerpo*** *es un conjunto* $\mathbb{A}$ *en el que hay definidas dos operaciones "****suma****"* $+ : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ *y "****producto****"* $\cdot : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$*, y dos elementos* $0 \neq 1$ *que cumplen los siguientes axiomas:*

Si x, y, z *son elementos del conjunto* $\mathbb{A}$*, entonces:*

(1) ***Asociativa de la suma:***

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

(2) ***Conmutativa de la suma:***

$$x + y = y + x.$$

(3) ***Existencia de elemento neutro para la suma:***

El número 0 *es un elemento neutro para la suma, es decir:*

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

(4) ***Existencia de elemento opuesto para la suma:***
Para cada $x \in \mathbb{A}$ existe un elemento $-x \in \mathbb{A}$, que se llama ***opuesto*** *de x, tal que*

$$x + (-x) = -x + x = 0.$$

(5) ***Asociativa del producto:***

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(6) ***Conmutativa del producto:***

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

(7) ***Existencia de elemento neutro para el producto:***
El número 1 es un elemento neutro para el producto, es decir:

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

(8) ***Distributiva del producto respecto de la suma:***

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

(9) ***Existencia de elemento inverso para el producto:***
Si $x \neq 0$ existe x^{-1} tal que

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

El elemento x^{-1} se llama ***inverso*** *de x.*

Definición 1.4.2.

- *Los cuatro propiedades implican que $(\mathbb{A}, +)$ es un* ***grupo conmutativo****.*
- *Las ocho primeras nos dice que $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ es un* ***anillo conmutativo****.*
- *Las nueve axiomas significan que $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ es un* ***cuerpo conmutativo****.*

Ejemplo 1.4.3. Los conjuntos $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ no son cuerpos. El conjunto $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sí lo es.

Ejercicio 1.4.4. *Sea $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ un cuerpo conmutativo. Demostrar que para cada $a \in \mathbb{A}$ tenemos $a \cdot 0 = 0$.*

Solución. Observamos que no se puede deducir inmediatamente de los axiomas. Sea $a \in \mathbb{A}$ se tiene que

$$a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0.$$

Por otra parte tenemos que

$$\begin{aligned} a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 + \big(a \cdot 0 + (-a \cdot 0)\big) \\ = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0). \end{aligned}$$

Utilizando la igualdad anterior queda

$$a \cdot 0 = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0) = a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = 0.$$

Notación 3. *Representaremos en adelante el producto de dos elementos de $\mathbb{A}$, a y b, en la manera habitual:*

$$a \cdot b = ab$$

si no hay lugar a confusión.

1.5. Axiomas de orden

Definición 1.5.1. *Una **relación** en un conjunto $\mathbb{A}$ es un subconjunto de $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$.*

Observación 1.5.2. *En el conjunto $\mathbb{Q}$, hay una relación "$\leq$" que ordena los números racionales, y tiene propiedades bien conocidas. Estas propiedades motivan la siguiente definición general:*

Definición 1.5.3. *Un cuerpo $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ es un **cuerpo ordenado** si hay una relación $\leq$ definida en A que cumple los siguientes axiomas:*

Si x, y, z son elementos del conjunto $\mathbb{A}$, entonces:

(10) ***Reflexiva**:*

$$x \leq x.$$

(11) ***Antisimétrica**:*

$$\text{Si} \quad x \leq y \quad \text{e} \quad y \leq x \quad \text{entonces} \quad x = y.$$

(12) ***Transitiva**:*

$$\text{Si} \quad x \leq y \quad \text{e} \quad y \leq z \quad \text{entonces} \quad x \leq z.$$

(13) ***Orden total**:*

$$x \leq y \quad \text{o bien} \quad y \leq x.$$

(14) ***Compatibilidad del orden con la suma:***

$$Si \quad x \leq y \quad entonces \quad x + z \leq y + z.$$

(15) ***Compatibilidad del orden con el producto por elementos no negativos:***

$$Si \quad x \leq y \quad e \quad z \geq 0 \quad entonces \quad xz \leq yz.$$

Definición 1.5.4.

- *A la relación $\leq$ se la denomina* ***relación de orden****.*
- *Los* 15 *axiomas significan que* $(\mathbb{A}, +, \cdot, \leq)$ *es un* ***cuerpo conmutativo totalmente ordenado****.*

Definición 1.5.5. *Sea* $(\mathbb{A}, +, \cdot, \leq)$ *es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado.*

- *Se define la relación "****menor estrictamente que****"* $(<)$ *como:*

$$\forall\, x, y \in \mathbb{A}, \quad x < y \Longleftrightarrow \ x \leq y \quad y \quad x \neq y.$$

- *Se define la relación "****mayor o igual que****"* $(\geq)$ *de la forma:*

$$\forall\, x, y \in \mathbb{A}, \quad x \geq y \iff y \leq x.$$

- *Se define la relación "****mayor estrictamente que****"* $(>)$ *de la manera:*

$$\forall\, x, y \in \mathbb{A}, \quad x > y \iff y < x.$$

Definición 1.5.6. *Sea* $(\mathbb{A}, +, \cdot, \leq)$ *es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado y* $x \in \mathbb{A}$*.*

- *Se dice que x es* ***positivo*** *si $x > 0$, y $\mathbb{A}^+$ designa al conjunto de los números positivos.*
- *Se dice que x es* ***negativo*** *si $x < 0$.*
- *Se dice que x es* ***no negativa*** *si $x \geq 0$, o que es* ***no positivo*** *si $x \leq 0$.*

1.6. Supremo, ínfimo, máximo y mínimo

Definición 1.6.1. *Sea* $(\mathbb{A}, +, \cdot, \leq)$ *es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado y* B *un subconjunto de* $\mathbb{A}$.

- *Se dice que* B *está* ***acotado superiormente*** *si existe algún elemento* $x_0 \in \mathbb{A}$ *tal que*
$$\forall\, a \in B, \quad a \leq x_0,$$
y que x_0 *se una* ***cota superior*** *del conjunto* B.

- *Se dice que* B *está* ***acotado inferiormente*** *si existe algún elemento* $x_0 \in \mathbb{A}$ *tal que*
$$\forall\, a \in B, \quad x_0 \leq a,$$
y que x_0 *se una* ***cota inferior*** *del conjunto* B.

- *Diremos que* B *está* ***acotado*** *si está acotado superiormente e inferiormente.*

- *Un elemento* x_0 *se dice* ***supremo*** *de* B, *que se designa*
$$x_0 = \sup B,$$
si x_0 *es la menor de las cotas superiores, es decir: si*
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall\, a \in B, \quad a \leq x_0,\ \ y \\ \bullet\ \forall\, a \in B, \quad a \leq x_1,\ \ donde\ x_1 \in \mathbb{A} \end{array}\right\} \ entonces\ \ x_0 \leq x_1.$$

- *Un elemento* x_0 *se dice* ***ínfimo*** *de* B, *que se designa*
$$x_0 = \text{ínf}\, B,$$
si x_0 *es la mayor de las cotas inferiores, es decir: si*
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall\, a \in B, \quad x_0 \leq a,\ \ y \\ \bullet\ \forall\, a \in B, \quad x_1 \leq a,\ \ donde\ x_1 \in \mathbb{A} \end{array}\right\} \ entonces\ \ x_1 \leq x_0.$$

- *Un elemento* x_0 *se dice* ***máximo*** *de* B, *que se designa*
$$x_0 = \text{máx}\, B,$$
si x_0 *es una cota superior y pertenece al conjunto* B *esto es*
$$\left\{\begin{array}{l} \bullet\ \forall\, a \in B, \quad a \leq x_0,\ \ y \\ \bullet\ x_0 \in B. \end{array}\right.$$

- *Un elemento x_0 se dice* ***mínimo*** *de B, que se designa*

$$x_0 = \min B,$$

si x_0 es una cota inferior y pertenece al conjunto A esto es

$$\begin{cases} \blacksquare \ \ \forall\, a \in B, \quad x_0 \le a, \ \ y \\ \blacksquare \ \ x_0 \in B. \end{cases}$$

Observación 1.6.2.

- $x_0 = \sup B = \min\{x \in \mathbb{A} \ : \ \ a \le x \ \ \forall\, a \in B\}.$

- $x_0 = \inf B = \max\{x \in \mathbb{A} \ : \ \ x \le a \ \ \forall\, a \in B\}.$

- $\inf B = -\sup(-B)$, *donde*

$$-B = \{-a \ : \ a \in B\} = \{a \ : \ -a \in B\}.$$

Definición 1.6.3. *Sea $(\mathbb{A}, +, \cdot, \le)$ es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado. Si $x, y \in \mathbb{A}$, se define*

- $$\min\{x, y\} = \begin{cases} x & si \ \ x \le y, \\ y & si \ \ x > y. \end{cases}$$

- $$\max\{x, y\} = \begin{cases} y & si \ \ x \le y, \\ x & si \ \ x > y. \end{cases}$$

Proposición 1.6.4 (**Caracterización de supremo y de ínfimo**). *Sea $(\mathbb{A}, +, \cdot, \le)$ es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado y B un subconjunto de $\mathbb{A}$. Entonces*

1) $$x_0 = \sup B \Longleftrightarrow \begin{cases} \blacksquare \ \ \forall\, a \in B, \quad a \le x_0, \ \ y \\ \\ \blacksquare \ \ \forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, a_0 \in B : \ x_0 - \varepsilon < a_0. \end{cases}$$

2) $$x_0 = \inf B \Longleftrightarrow \begin{cases} \blacksquare \ \ \forall\, a \in B, \quad x_0 \le a, \ \ y \\ \\ \blacksquare \ \ \forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, a_0 \in B : \ a_0 < x_0 + \varepsilon. \end{cases}$$

Demostración. 1)

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $x_0 = \sup B$, entonces x_0 es una cota superior de B y dado $\varepsilon > 0$, $x_0 - \varepsilon$ no puede ser cota superior de A, luego existe $a_0 \in B$ tal que

$$x_0 - \varepsilon < a_0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Claramente x_0 es una cota superior de B. Sea y una cota superior cualquiera de B. Si fuese $y < x_0$, aplicando la hipótesis al positivo $\varepsilon = x_0 - y > 0$, existiría $a_0 \in B$ tal que

$$y = x_0 + (y - x_0) = x_0 - \varepsilon < a_0,$$

lo cual es absurdo pues y es una cota superior de B. Así pues $x_0 \leq y$, lo que prueba que x_0 es el mínimo de las cotas superiores de B.

2) Análoga a 1). $\square$

Observación 1.6.5. *Los términos supremo e ínfimo se suelen usar también para referirse a conjuntos A no acotados superiormente* ($\sup A = +\infty$) *o inferiormente* ($\operatorname{ínf} A = -\infty$).

1.7. Carácter "incompleto" de $\mathbb{Q}$

Hasta aquí hemos hablado de "lo que funciona bien" en $\mathbb{Q}$. Este cuerpo resulta ser "incompleto" como se puede ver en esta sección.

Definición 1.7.1.

- *Un entero positivo* ***par*** *es el que se puede escribir en la forma $2n$, para algún entero positivo n.*
- *Un entero positivo* ***impar*** *es aquel que se puede escribir en la forma $2n+1$ para algún entero $n \geq 0$.*

Lema 1.7.2.

1) *El cuadrado de un entero par es par.*
2) *El cuadrado de un número impar es impar.*

Demostración.

1) Tenemos que:
$$(2n)^2 = 4n^2 = 2(2n^2),$$
y esto es un número par ya que es el producto de 2 y $2n^2$.

2) Se tiene que:
$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1.$$
Puesto que $2n^2 + 2n$ es un entero, hemos escrito el cuadrado de nuestro número impar en la forma $2k+1$ para algún entero $k \geq 0$, y así hemos mostrado que nuestro cuadrado es impar.

□

Proposición 1.7.3. *La ecuación $x^2 = 2$ no tiene solución en $\mathbb{Q}$.*

Demostración. Supongamos que existe dicho número racional x. Podemos suponer que $x > 0$, y escribir $x = \frac{m}{n}$ donde m y n son enteros positivos.

Más aún, podemos suponer que tanto m y n *no son pares*, pues podemos poner la fracción $\frac{m}{n}$ en forma reducida al cancelar las potencias de 2 que dividan a m y a n. Así, podemos suponer que al menos uno de los enteros m o n es impar.

Entonces $\frac{m^2}{n^2} = 2$ o bien

$$m^2 = 2n^2,$$

esto significa que m^2 par. Por el Lema 1.7.2, m es par también y, por lo tanto, podemos escribir

$$m = 2k$$

para algún entero positivo k, se verifica que

$$m^2 = 2n^2 = 4k^2,$$

así que

$$n^2 = 2k^2,$$

esto significa que n^2 es par y, en consecuencia, por lo que ya vimos en el Lema 1.7.2, que n es par.

Así hemos llegado a la conclusión de que tanto m como n son pares, lo cual contradice el hecho de que pusimos nuestra fracción en forma reducida.

Por lo tanto la suposición de la que partíamos es falsa y no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2. □

Proposición 1.7.4. *El conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q}^+ \,:\, x^2 < 2\}$ es acotado superiormente sin embargo no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.*

Demostración. Sea $x \in A$ tenemos que

$$0 < x^2 < 2 < 4 = 2^2,$$

con lo que

$$x < 2,$$

y esto lo hemos hecho para cualquier elemento de A. Por lo tanto queda demostrado que A está acotado superiormente.

Sea $\beta = \sup A$, existen dos posibilidades $\beta \in A$ o $\beta \notin A$:

1) Si $\beta \in A$. Tomando
$$\gamma = \frac{\beta(\beta^2+6)}{3\beta^2+2}$$
se tiene que
$$\gamma \in \mathbb{Q}^+, \quad \gamma - \beta = \frac{2\beta(2-\beta^2)}{3\beta^2+2} > 0 \ \text{ y } \quad \gamma^2 - 2 = \frac{(\beta^2-2)^3}{(3\beta^2+2)^2} < 0.$$
Esto implica que
$$\gamma \in A \quad \text{y } \gamma > \beta = \sup A,$$
lo que es contradictorio.

2) Si $\beta \notin A$. Entonces tenemos que
$$\beta^2 \geq 2.$$
Sabemos por la Proposición 1.7.3 que $\beta^2 \neq 2$, con lo que
$$\beta^2 > 2.$$
Sea $\delta = \beta - \frac{\beta^2-2}{2\beta}$, así que
$$0 < \delta < \beta \quad \text{y} \quad \delta^2 = \beta^2 - (\beta^2-2) + \left(\frac{\beta^2-2}{2\beta}\right)^2,$$
de donde
$$2 < \delta^2.$$
Observando que
$$x^2 < 2 < \delta^2 \quad \forall\, x \in A,$$
se concluye que
$$x < \delta \quad \forall\, x \in A,$$
con lo que δ es una cota superior menor que el supremo, llegando así a una contradicción.

En definitiva el conjunto A está acotada superiormente pero no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.

$\square$

1.8. Axioma del supremo

Axioma 1.8.1 (Axioma del supremo o Axioma de completitud). *Sea* $(\mathbb{A}, +, \cdot, \leq$ $)$ *un cuerpo conmutativo totalmente ordenado.*

(16) *Todo subconjunto no vacío de* $\mathbb{A}$*, acotado superiormente tiene supremo.*

Teorema 1.8.2. *Todo subconjunto no vacío* B *de* $\mathbb{A}$*, acotado inferiormente tiene ínfimo.*

Demostración. Sea$-B = \{-a : \ a \in B\}$ el conjunto de los números opuestos de los de B. Entonces $-B$ es no vacío y acotado superiormente. Por el axioma del supremo existe un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = \sup(-B)$. Por tanto el número $-\alpha$ es el ínfimo de B. $\square$

1.9. Números reales

El hecho de que *cualquier conjunto no vacío acotado superiormente posee supremo*, la propiedad esencial de la que carece el conjunto de los números racionales, y que sirve para definir y caracterizar al conjunto de los números reales.

Definición 1.9.1. *Se llama* ***recta real o conjunto de los números reales*** *a todo conjunto no vacío "*$\mathbb{R}$*" dotado de dos operaciones* **suma** *"*$+$*" y* **producto** *"*$\cdot$*", y una relación de orden "*$\leq$*" tal que* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado y verifica el axioma del supremo.*

En otras palabras, el conjunto $\mathbb{R}$ *es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado en el que cualquier subconjunto no vacío y acotado superiormente posee supremo.*

Observación 1.9.2. *La definición axiomática de los números reales plantea dos problemas:*

- ***La existencia****, haya algún cuerpo totalmente ordenado en el que se cumpla el axioma del supremo.*

- ***La unicidad****, el conjunto de los números reales es único salvo isomorfismos, es decir, si dos conjuntos con sus respectivas operaciones y relaciones de orden verifican los* 16 *axiomas, entonces existe una biyección entre ambos que es* ***isomorfismo algebraico y de orden****.*

1.9.1. Propiedad arquimediana de los números reales

Teorema 1.9.3 (Propiedad arquimediana). *Para todo par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$, con $x > 0$, existe un número entero $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$nx > y.$$

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}$, con $x > 0$. Supongamos que la tesis del teorema no es cierta, esto es

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad nx \leq y.$$

- Si $y \leq 0$, entonces $x \leq 0$ contradicción con la hipótesis $x > 0$.
- Si $y > 0$. Definimos el conjunto

$$A = \{nx \,:\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Trivialmente $A \subseteq \mathbb{R}$ y $A \neq \emptyset$ (x pertenece a A), además A está acotada superiormente por y.

Por el axioma del supremo sabemos de la existencia de

$$\alpha = \sup A.$$

Utilizando la única hipótesis ($x > 0$) tenemos

$$-x < 0 \Longrightarrow \alpha - x < \alpha,$$

con lo que $\alpha - x$ no es cota superior de A, luego existe $a_0 \in A$ tal que

$$\alpha - x < a_0,$$

esto es:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \quad \alpha - x < xn_0 = a_0.$$

Pero esto es equivalente a

$$\alpha < (n_0 + 1)x,$$

y como $(n_0 + 1)x \in A$ se obtiene un resultado contradictorio con la definición del supremo. □

Corolario 1.9.4. *El conjunto de los números naturales no está acotado superiormente.*

1.9.2. Parte entera de un número real

Teorema 1.9.5 (Parte entera). *Sea $x \in \mathbb{R}$, existe un único número entero, que denotaremos por $[x]$ y que denominaremos **parte entera** de x verificando:*

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. Definimos el conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{Z} : \ n \leq x\}.$$

Por supuesto A es un subconjunto de $\mathbb{Z}$.

Por la propiedad arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$1n_0 > -x$$

y así

$$-n_0 < x,$$

luego

$$-n_0 \in A$$

Por otra parte A está acotado superiormente (por x o por cualquier número natural superior a x).

Por el Teorema 1.2.14, A tiene un elemento máximo, llamémosle m. Como $m \in A$, se tendrá

$$m \leq x.$$

Y como m es el máximo de A y $m < m + 1$, se deduce que

$$m + 1 \notin A,$$

es decir,

$$x < m + 1.$$

$\square$

1.9.3. Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

Teorema 1.9.6 (Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$). *Sean $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$. Entonces existe un número racional $r \in \mathbb{Q}$ tal que*

$$x < r < y.$$

Demostración. Como $x < y$ podemos aplicar la propiedad arquimediana a los números $y - x > 0$ y 1 con lo que

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \quad (y - x)n_0 > 1 \Longleftrightarrow n_0 x + 1 < n_0 y\,.$$

Definimos hora el conjunto

$$A = \{m \in \mathbb{Z} : \quad n_0 x < m\},$$

aplicando otra vez la propiedad arquimediana a los números $1 > 0$ y $n_0 x$ tenemos la existencia de un número $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$p_0 > n_0 x,$$

así que $A \neq \emptyset$ y gracias a la parte entera observamos que

$$[n_0 x] \leq n_0 x < m \quad \forall\, m \in A,$$

es decir, A está acotada inferiormente.

Como $A \subseteq \mathbb{Z}$, entonces por el Teorema 1.2.14, existe $m_0 \in A$ tal que

$$m_0 = \text{mín}\, A,$$

con lo que

$$m_0 - 1 \notin A,$$

esto es

$$m_0 - 1 \leq n_0 x \quad \text{o bien} \quad m_0 \leq n_0 x + 1$$

entonces

$$n_0 x < m_0 \leq n_0 x + 1 < n_0 y$$

luego

$$x < \frac{m_0}{n_0} < y.$$

$\square$

Observación 1.9.7. *Entre dos números reales distintos existen infinitos números racionales.*

1.10. Números irracionales

Definición 1.10.1. *Los números reales que no son racionales se llaman* ***números irracionales****.*

1.10.1. Existencia de raíces cuadradas

Ya sabemos que la ecuación $x^2 = 2$ no tiene solución en $\mathbb{Q}$ (ver Proposición 1.7.3). Así que vamos a probar que sí hay un número real positivo cuyo cuadrado es 2. Este número tendrá que ser irracional.

Proposición 1.10.2. *La ecuación $x^2 = 2$ tiene solución en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Consideremos el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0, \ x^2 \leq 2\}.$$

Este es un conjunto no vacío de números reales (por ejemplo, $1 \in S$). Y está acotado superiormente, ya que si $x \in S$,

$$x^2 \leq 2 < 4 = 2^2$$

de donde se deduce que $x \leq 2$. Es decir, 2 es una cota superior de S. Luego el conjunto S tiene supremo.

Sea $\alpha = \sup S$. Como $1 \in S$, entonces

$$0 < 1 \leq \alpha.$$

Comprobemos que no puede ser $\alpha^2 > 2$ ni $\alpha^2 < 2$.

• Si $\alpha^2 > 2$, entonces tomando

$$\beta = \text{mín}\left\{\alpha, \ \frac{\alpha^2 - 2}{2\alpha}\right\},$$

se tendría $\beta > 0$ y $\alpha - \beta \geq 0$ y

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 > \alpha^2 - 2\alpha\beta \geq \alpha^2 - (\alpha^2 - 2) = 2 \geq x^2,$$

de donde

$$x \leq \alpha - \beta,$$

para todo $x \in S$. Pero $\alpha - \beta$ no puede ser cota superior del conjunto S porque es menor que su supremo ($\alpha - \beta < \alpha$).

• Si $\alpha^2 < 2$, entonces tomando

$$\gamma = \text{mín}\left\{\alpha, \ \frac{2 - \alpha^2}{3\alpha}\right\},$$

se tendría $\gamma > 0$ y $\alpha + \gamma \geq 0$ y

$$(\alpha + \gamma)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\gamma + \gamma^2 \leq \alpha^2 + 2\alpha\gamma + \alpha\gamma = \alpha^2 + 3\alpha\gamma \leq \alpha^2 + (2 - \alpha^2) = 2,$$

así que

$$\alpha + \gamma \in S.$$

Pero esto no puede ser, porque $\alpha + \gamma > \alpha$ y en cambio para todo $x \in S$ se tiene $x \leq \alpha$.

Queda así como única posibilidad $\alpha^2 = 2$. Este número positivo cuyo cuadrado es 2 se representa por $\sqrt{2}$. $\square$

Teorema 1.10.3 (Existencia de raíces cuadradas). *Todo número real no negativo a tiene una única raíz real cuadrada no negativa.*

Demostración. La demostración es exactamente igual a la realizada anteriormente para $a = 2$. $\square$

Ejemplo 1.10.4.

- $0,202002000200002000002\cdots$
- $5,782232224222252222226\cdots$

Notación 4. *El conjunto cuyos elementos son los números irracionales, recibe el nombre de conjunto de los números irracionales y se denota con el símbolo $\mathbb{I}$.*

Observación 1.10.5. *Por la definición de número racional y irracional se tiene que no existen números que sean racionales e irracionales a la vez, es decir,*

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset.$$

1.10.2. Densidad de $\mathbb{I}$ en $\mathbb{R}$

Teorema 1.10.6 (Densidad de $\mathbb{I}$ en $\mathbb{R}$). *Sean $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$. Entonces existe un número irracional $\alpha \in \mathbb{I}$ tal que*

$$x < \alpha < y.$$

Demostración. Sea $z \in \mathbb{I} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ cualquiera (ya hemos visto que existe alguno). Puesto que

$$x - z < y - z,$$

según el teorema de la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ existe algún $r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$x - z < r < y - z,$$

de donde

$$x < z + r < y.$$

Por último, $r + z$ es un número irracional, ya que si fuera racional se tendría $z = (r + z) + (-r) \in \mathbb{Q}$. $\square$

Observación 1.10.7. *Entre dos números reales distintos existen infinitos números irracionales.*

1.11. Intervalos en $\mathbb{R}$

Definición 1.11.1 (Intervalos de la recta). *Se dice que un subconjunto I de $\mathbb{R}$ es un **intervalo** si verifica la siguiente propiedad:*

"Si $x, y \in I$, con $x < y$, entonces para cada $z \in \mathbb{R}$ tal que $x < z < y$ se tiene que $z \in I$".

Definición 1.11.2 (Intervalos acotados). *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ se definen los **intervalos acotados de extremos** a **y** b de la siguiente forma:*

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$,
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$,
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}$,
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}$.

*El primero se denomina intervalo **abierto**, y el segundo, **cerrado**.*

Definición 1.11.3. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ y I un intervalo acotado de extremos a y b. El número positivo $b - a$ se denomina **longitud** de I y lo denotamos por $l(I) = b - a$.*

Definición 1.11.4 (Intervalos no acotados). *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ se definen los **intervalos no acotados** de la siguiente forma:*

- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x > a\}$,
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq a\}$,
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : \ x < a\}$,
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq a\}$,
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

1.12. Valor absoluto de un número real

Definición 1.12.1. *Sea $x \in \mathbb{R}$, se define el* ***valor absoluto de*** *x, denotado por "$|x|$", como el número real no negativo*

$$|x| = \text{máx}\{x, -x\} = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0, \\ -x & si \quad x < 0. \end{cases}$$

Proposición 1.12.2. *Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\alpha \geq 0$. Entonces*

$$|x| \leq \alpha \Longleftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha.$$

Demostración. Tenemos $|x| \leq \alpha$ es equivalente a decir que

$$x \leq \alpha \quad \text{y} \quad -x \leq \alpha.$$

Como la desigualdad $-x \leq \alpha$ es equivalente $-\alpha \leq x$, la propiedad está demostrada. $\square$

Proposición 1.12.3. *Sean $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$. Entonces*

1) $|x| = 0$ *si, y sólo si,* $x = 0$.

2) $|\alpha x| = |\alpha||x|$.

3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*desigualdad triangular*).

Demostración. 1) Es trivial.
2) Consideraremos tres casos:
2.1) Si $\alpha \geq 0$ y $x \geq 0$, entonces $\alpha x \geq 0$ y tendremos

$$|\alpha x| = \alpha x = |\alpha||x|.$$

2.2) Si $\alpha \leq 0$ y $x \leq 0$, entonces $\alpha x \geq 0$ y tendremos

$$|\alpha x| = \alpha x = (-\alpha)(-x) = |\alpha||x|.$$

2.3) Si $\alpha \leq 0$ y $x \geq 0$, entonces $\alpha x \leq 0$ y será

$$|\alpha x| = -(\alpha x) = (-\alpha)x = |\alpha||x|.$$

3) Por la Proposición 1.12.2, se tiene que

$$-|x| \leq x \leq |x|, \quad -|y| \leq y \leq |y|.$$

Sumamos las desigualdades y resulta

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

es decir

$$-\big(|x| + |y|\big) \leq x + y \leq \big(|x| + |y|\big).$$

Usando otra vez la Proposición 1.12.2deducimos que

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

□

1.13. Principio de Inducción

Definición 1.13.1. *El principio de inducción es una* ***técnica*** *muy utilizada en Matemáticas para demostrar la veracidad de algunas proposiciones en las que interviene una variable entera positiva n.*

1.13.1. Primera versión del principio de inducción

Teorema 1.13.2. *Sea $P(n)$ una proposición matemática que depende de $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:*

1) *$P(n_0)$ es verdadera, es decir n_0 satisface la proposición $P(n)$.*

2) *Si $k \geq n_0$ y $P(k)$ es verdadera, entonces $P(k+1)$ es verdadera.*

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq n_0$. En particular, si $n_0 = 1$ resulta que $P(n)$ es cierta para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Definimos el conjunto

$$A = \{k \in \mathbb{N} : \quad k > n_0 \quad \text{y} \quad P(k) \;\; \text{es falsa}\}.$$

Supongamos que hay algún elemento en A. Por el Axioma 1.1.10 (Principio de buena ordenación) existe un elemento mínimo k_0 en A.

Así, como k_0 es mínimo de A, se deduce que $k_0 - 1 \notin A$, lo cual implica dos posibilidades:

$$[k_0 - 1 \leq n_0] \quad \text{o} \quad \big[P(k_0 - 1) \;\; \text{es verdadera}\big].$$

- Si $k_0 - 1 \leq n_0$, entonces $k_0 \leq n_0 + 1$, y puesto que $n_0 < k_0$, se deduce que

$$k_0 = n_0 + 1.$$

Así, como $P(n_0)$ es verdadera, se concluye por hipótesis 2) que

$$P(k_0 = n_0 + 1)$$

es verdadera, lo cual contradice el hecho que $P(k_0)$ es falsa.

- Si $P(k_0 - 1)$ es verdadera, entonces por hipótesis 2) nuevamente se deduce que

$$P\big(k_0 = (k_0 - 1) + 1\big)$$

es verdadera, lo cual contradice el hecho que $P(k_0)$ es falsa.

Luego el conjunto A debe ser vacío.

$\square$

Ejemplo 1.13.3. Demuestra que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo $n \geq 1$.
Paso 1: Definimos la proposición $P(n)$.
Sea

$$P(n) := \left[1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

Paso 2: Comprobamos que $P(1)$ es verdadera.
Puesto que $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, entonces $P(1)$ es verdadera.
Paso 3: Sea $k \geq 1$ arbitrario, tal que $P(k)$ es verdadera. Es decir:

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad \text{[Hipótesis de Inducción].}$$

Veamos si $P(k+1)$ es verdadera. Para ello deberemos probar que:

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

En efecto: utilizamos la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto: $P(k+1)$ es verdadera.
Luego la proposición $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq 1$.

Ejemplo 1.13.4. Demuestra que $2^n < n!$ para todo $n \geq 4$.

Paso 1: Definimos la proposición $P(n)$.

Sea
$$P(n) := \left[2^n < n!\right]$$

Paso 2: Comprobamos que $P(4)$ es verdadera.

Puesto que $2^4 = 16 < 4! = 24$, entonces $P(4)$ es verdadera.

Paso 3: Sea $k \geq 4$ arbitrario, tal que $P(k)$ es verdadera. Es decir:
$$2^k < k! \quad \text{[Hipótesis de Inducción].}$$

Veamos si $P(k+1)$ es verdadera. Para ello deberemos probar que:
$$2^{k+1} < (k+1)!$$

En efecto: utilizamos la hipótesis de inducción:
$$\begin{aligned} 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k &< 2 \cdot k! \\ &< (k+1) \cdot k! \\ &= (k+1)! \end{aligned}$$

Por tanto: $P(k+1)$ es verdadera.

Luego la proposición $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq 4$.

1.13.2. Segunda versión del principio de inducción

Teorema 1.13.5. *Sea $P(n)$ una proposición matemática que depende de $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:*

1) *$P(n_0)$ es verdadera.*
2) *Si $k \geq n_0$ y $P(m)$ es verdadera para cada m con $n_0 \leq m \leq k$, entonces $P(k+1)$ es verdadera.*

Entonces $P(n)$ es verdadera para cada $n \geq n_0$. En particular, si $n_0 = 1$ resulta que $P(n)$ es cierta para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Definimos el conjunto
$$A = \{k \in \mathbb{N} : \quad k > n_0 \quad \text{y} \quad P(k) \ \text{ es falsa}\}.$$

Supongamos que hay algún elemento en A. Por el Axioma 1.1.10 (Principio de buena ordenación) existe un elemento mínimo k_0 en A.

Así, como k_0 es mínimo de A, se deduce que $P(k)$ es verdadera para todo entero k con $n_0 \leq k < k_0$.

Por la hipótesis 2) concluimos que $P\big(k_0 = (k_0 - 1) + 1\big)$ es verdadera. Esto es una contradicción, que prueba lo que queríamos. $\square$

Ejemplo 1.13.6. Definimos los números $a_n \in \mathbb{R}$ para $n \in \mathbb{N}$ del modo siguiente:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} & n \geq 3 \\ a_1 = 1, a_2 = 3 \end{cases}$$

Demuestra que $a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$, $\forall\ n \geq 1$.
Paso 1: Definimos la proposición $P(n)$.
Sea

$$P(n) := \left[a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n\right]$$

Paso 2:

$P(1)$ es verdadera, dado que: $a_1 = 1 < \frac{7}{4}$

$P(2)$ es verdadera, dado que: $a_2 = 3 < \left(\frac{7}{4}\right)^2$

Paso 3: Sea $k \geq 2$ arbitrario, tal que $P(1)$, $P(2)$, ... , $P(k-1)$, $P(k)$ son verdades. Es decir verdadera. Es decir:

$$a_1 = 1 < \frac{7}{4}, a_2 = 3 < \left(\frac{7}{4}\right)^2, \cdots, a_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}, a_k < \left(\frac{7}{4}\right)^k$$

Hipótesis de Inducción.

Veamos si $P(k+1)$ es verdadera. Para ello deberemos probar que:

$$a_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$$

En efecto: utilizamos la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} a_{k+1} = a_{(k+1)-1} + a_{(k+1)-2)} = a_k + a_{k-1} &< \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \\ < \left(\frac{7}{4}\right)^k + \frac{\left(\frac{7}{4}\right)^k}{\frac{7}{4}} = \left(\frac{7}{4}\right)^k + \frac{4}{7}\left(\frac{7}{4}\right)^k &= \left(\frac{7}{4}\right)^k \left(1 + \frac{4}{7}\right) \\ = \left(\frac{7}{4}\right)^k \left(\frac{11}{7}\right) < \left(\frac{7}{4}\right)^k \cdot \frac{7}{4} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1} \end{aligned}$$

Por tanto: $P(k+1)$ es verdadera.
Luego la proposición $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq 1$.

1.14. Numerabilidad

Definición 1.14.1.

- *Se dice que un conjunto* A *es* ***finito*** *si es vacío o existe un número* $n_0 \in \mathbb{N}$ *y una biyección* $f : A \to J_{n_0}$*, donde* $J_{n_0} = \{k \in \mathbb{N} : \ k \leq n_0\}$*. En este caso se dice que* A *tiene* ***cardinal*** n_0 *y se denota*

$$\mathrm{card}(A) = n_0.$$

- *Se dice que un conjunto es* ***infinito*** *si no es finito.*

Observación 1.14.2. *Se conviene en que* $\mathrm{card}(\emptyset) = 0$.

Definición 1.14.3 (Conjunto numerable). *Se dice que un conjunto* A *es* ***numerable*** *si es finito o cuando, siendo infinito, existe una biyección* $f : A \to \mathbb{N}$.

Ejemplos 1.14.4.

1) El conjunto $\mathbb{N}$ es infinito y numerable.

2) El conjunto $\mathbb{Z}$ es numerable infinito y. En efecto, la aplicación definida por

$$\begin{array}{rcl} f: & \mathbb{Z} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ & n & \longrightarrow f(n) = \begin{cases} 2n+1 & \text{si} \quad n > 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ n & \text{si} \quad n < 0 \end{cases} \end{array}$$

es claramente biyectiva.

Proposición 1.14.5. *El conjunto* $\mathbb{Q}$ *es numerable.*

Demostración. Basta con ordenar $\mathbb{Q}$ de la siguiente forma:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{-1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{-2}{1} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{3}{1} & \frac{-3}{1} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{4}{1} & \frac{-4}{1} & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & \cdots \end{array}$$

□

Proposición 1.14.6. *Todo subconjunto de* $\mathbb{N}$ *es numerable.*

Demostración. Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$. Si A es vacío entonces por definición A es numerable. Si A no es vacío entonces por el Axioma 1.1.10 (Principio de buena ordenación) existe un número $n_1 \in A$ que es menor que todos los elementos del conjunto A.

Si el conjunto $A_1 = A \backslash \{n_1\}$ es vacío, entonces A constará de un solo elemento, luego será numerable.

Si A_1 no es vacío tendrá, análogamente, un elemento mínimo $n_2 \in A_1$.

Prosiguiendo estos razonamientos, o bien encontraremos que A es finito, o bien habremos conseguido escribir todos sus elementos en la forma

$$\{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\},$$

lo cual supone haber establecido la biyección $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$f(n_k) = k.$$

En cualquier caso, A resulta numerable. □

Proposición 1.14.7. *Todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable.*

Demostración. Sea X un conjunto numerable e Y un subconjunto no vacío de X. Si X es finito, entonces Y es también finito (la demostración es trivial), luego numerable.

Supongamos que X es infinito y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{N}$ una biyección. Denotando por $i : Y \longrightarrow X$ la inyección natural de Y en X, es decir, $i(x) = x \in X$ para cada $x \in Y$.

La función $g = f \circ i$ es una aplicación inyectiva de Y en $\mathbb{N}$ y por consiguiente una biyección de Y sobre el conjunto $A = g(Y)$ de $\mathbb{N}$.

Como A es un subconjunto de $\mathbb{N}$ entonces por la Proposición 1.14.6 A es numerable, así que existe una biyección $h : A \longrightarrow \mathbb{N}$, luego $h \circ g$ es una biyección de Y sobre $\mathbb{N}$. □

Capítulo 2

Sucesiones de números reales

2.1. Definiciones y terminología

2.1.1. Sucesiones

Definición 2.1.1. *Sea X un conjunto no vacío. Una* ***sucesión de elementos de X*** *es una aplicación del conjunto de los números naturales en X,*

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & \mathbb{N} & \longrightarrow & X \\ & n & \longrightarrow & \sigma(n). \end{array}$$

Habitualmente una sucesión se representa por el símbolo

$$(x_n)_{n\geq 1}, \quad \textit{donde} \quad x_n = \sigma(n).$$

- *El elemento x_n se denomina* ***término n-ésimo*** *de la sucesión.*

- *El conjunto $\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$, se denomina* ***conjunto de términos o rango*** *de la sucesión.*

Ejemplos 2.1.2.

- $x_n = a$, donde a es un número real prefijado (***sucesión constante***); la sucesión consta de los términos

$$a, a, a, \dots, a, \dots$$

- $x_n = n$ (***sucesión de los números naturales***); la sucesión consta de los términos
$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots$$

- $x_n = (-1)^n$; la sucesión consta de los términos
$$-1, 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$$

Definición 2.1.3. *Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales.*

- *Se dice que $(x_n)_{n\geq 1}$ está **acotada inferiormente** si existe un número $A \in \mathbb{R}$ tal que*
$$A \leq x_n,$$
*para todo $n \in \mathbb{N}$. Se dice entonces que A es una **cota inferior** de la sucesión.*

- *Se dice que $(x_n)_{n\geq 1}$ está **acotada superiormente** si existe un número $B \in \mathbb{R}$ tal que*
$$x_n \leq B,$$
*para todo $n \in \mathbb{N}$. Se dice entonces que B es una **cota superior** de la sucesión.*

- *Si $(x_n)_{n\geq 1}$ está acotada superiormente e inferiormente se dice que está **acotada**. Esto equivale a que exista un número $K > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,*
$$|x_n| \leq K.$$

2.1.2. Sucesiones monótonas

Definición 2.1.4. *Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales.*

- *Se dice que $(x_n)_{n\geq 1}$ es **creciente** si*
$$x_n \leq x_{n+1},$$
para todo $n \in \mathbb{N}$.

- *Se dice que $(x_n)_{n\geq 1}$ es **estrictamente creciente** si*
$$x_n < x_{n+1},$$
para todo $n \in \mathbb{N}$.

- *Se dice que $(x_n)_{n\geq 1}$ es **decreciente** si*
$$x_n \geq x_{n+1},$$
para todo $n \in \mathbb{N}$.

- *Se dice que* $(x_n)_{n\geq 1}$ *es* ***estrictamente decreciente*** *si*

$$x_n > x_{n+1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Todos estos tipos de sucesiones se denominan sucesiones ***monótonas****.*

Proposición 2.1.5. *Sea* $(x_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión de números reales.*

1) *Si* $(x_n)_{n\geq 1}$ *es creciente, entonces, está acotada inferiormente.*

2) *Si* $(x_n)_{n\geq 1}$ *es decreciente, entonces, está acotada superiormente.*

Demostración. 1) Como $(x_n)_{n\geq 1}$ es creciente, entonces, se tiente que

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots$$

Si tomamos $A = x_1$ deducimos que

$$A \leq x_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $(x_n)_{n\geq 1}$ está acotada inferiormente y A es la cota inferior de $(x_n)_{n\geq 1}$.

2) Análoga a 1). □

2.1.3. Subsucesiones

Definición 2.1.6. *Sea* $(x_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión de elementos de un conjunto* X*. Una* ***subsucesión*** *de* $(x_n)_{n\geq 1}$ *es la composición de una sucesión estrictamente creciente de números naturales con la sucesión dada:*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} & \longrightarrow & X \\ k & \longrightarrow & n_k & \longrightarrow & x_{n_k}, \end{array}$$

donde

$$n_k < n_{k+1},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$*. Una subsucesión de* $(x_n)_{n\geq 1}$ *se representa por* $(x_{n_k})_{k\geq 1}$*.*

Ejemplos 2.1.7.

1) Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de elementos de un conjunto X. Las sucesiones de números naturales $(2k)_{k\geq 1}$ y $(2k+1)_{k\geq 1}$ son estrictamente crecientes. Entonces $(x_{2k})_{k\geq 1}$ y $(x_{2k+1})_{k\geq 1}$ son dos subsucesiones de $(x_n)_{n\geq 1}$ de los términos de índice par e impar, respectivamente.

2) La sucesión de término k-ésimo $x_{n_k} = 4k^2$ es una subsucesión de la sucesión de término n-ésimo $x_n = (-1)^n n^2$, como se ve tomando

$$n_k = 2k,$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.1.8. *Si la sucesión $(n_k)_{k\geq 1}$ es estrictamente creciente, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$n_k \geq k.$$

Demostración. Para $m = 1$, tenemos que $n_1 \geq 1$. Sea $m > 1$ arbitrario, tal que

$$n_m \geq m.$$

Veamos si $n_{m+1} \geq m + 1$ es verdadera. Supongamos que $n_{m+1} < m + 1$. Como $(n_k)_{k\geq 1}$ es estrictamente creciente se tiene que

$$n_m < n_{m+1}.$$

Por la hipótesis de inducción sabemos que

$$m \leq n_m.$$

Así que

$$m \leq n_m < n_{m+1} < m + 1.$$

Esto es una contradicción. □

Proposición 2.1.9. *Una sucesión monótona está acotada, si y sólo si, posee una subsucesión acotada.*

Demostración.

$\boxed{\Rightarrow}$ En inmediato que si la sucesión está acotada, cualquier subsucesión de ella es acotada.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión creciente y sea $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ una subsucesión acotada de $(x_n)_{n\geq 1}$.

Como el subconjunto

$$A = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$$

de $\mathbb{N}$ es infinito, equivale a que A no está acotado, se sigue que dado $m \in \mathbb{N}$ arbitrario, existe $n_k \in A$ tal que

$$m < n_k.$$

Puesto que $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ está acotada, entonces existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_{n_k} \leq \beta, \quad \text{para todo } \ n_k \in A.$$

Así que, para cualquier $m \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in A$ tal que

$$m < n_k,$$

luego

$$x_m \leq x_{n_k} \leq \beta.$$

Por tanto

$$x_m \leq \beta$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

□

2.2. Límite de una sucesión. Convergencia

Definición 2.2.1. *Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales.*

- *Se dice que el número $x_0 \in \mathbb{R}$ es el **límite** de la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ o que $(x_n)_{n\geq 1}$ **converge** a x_0 y se expresa mediante*

  $$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

  si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_ε (que depende de ε) tal que para todo número natural $n \geq n_\varepsilon$ se tiene que:

  $$|x_n - x_0| < \varepsilon.$$

  *Se dice entonces que $(x_n)_{n\geq 1}$ es **convergente**.*

- *Las sucesiones que no son convergentes se denominan **divergentes**.*

Ejemplos 2.2.2 (Sucesiones convergentes)**.**

1) Las sucesión constante $(x_n = \alpha)_{n\geq 1}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ converge al número α.

2) La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge a 0. Consecuencia de la propiedad arquimediana, Teorema 1.9.3. (Para $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $1 < n_\varepsilon\varepsilon$).

Ejemplos 2.2.3 (Sucesiones no convergentes)**.**

1) La sucesión $((-1)^n)_{n\geq 1}$ no es convergente. Supongamos que existe un número $x_0 \in \mathbb{R}$ que es su límite.

   Si $x_0 = 1$ entonces eligiendo $\varepsilon = 2 > 0$, cualquiera que fuese $n \in \mathbb{N}$ bastaría tomar $m = 2n + 1 > n$ para conseguir que

   $$|x_m - x_0| = |-1-1| = 2 \not< \varepsilon.$$

   Si $x_0 \neq 1$, eligiendo ahora $\varepsilon = |1-x_0| > 0$, cualquiera que fuese $n \in \mathbb{N}$ bastaría tomar $m = 2n > n$ para conseguir que

   $$|x_m - x_0| = |1 - x_0| \not< \varepsilon = |1 - x_0|.$$

2) La sucesión $(n)_{n\geq 1}$ no puede ser convergente, pues si tuviese límite x_0, tomando $\varepsilon = 1$ en la definición de convergencia, para algún $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ habría de ser

   $$n < x_0 + 1$$

   siempre que n fuese mayor que n_ε.

   Por la propiedad arquimediana Teorema 1.9.3 existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

   $$m_0 > x_0 + 1.$$

   Si $m_0 \geq n_\varepsilon$, entonces $m_0 < x_0 + 1$, lo cual es imposible.

   Si $m_0 < n_\varepsilon$, entonces

   $$x_0 + 1 < m_0 < n_\varepsilon < n_\varepsilon + 1 < x_0 + 1,$$

   lo cual es imposible.

Proposición 2.2.4 (Unicidad del límite de una sucesión convergente)**.** *Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión convergente y sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = b.$$

Entonces $a = b$.

Demostración. Supongamos, por ejemplo, $a < b$. Sea $c \in (a, b)$.

Puesto que $c < b$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_1$ tenemos que

$$x_n > c.$$

Igualmente, puesto que $a < c$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, entonces existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_2$ tenemos que

$$x_n < c.$$

Tomando $n = \text{máx}\{n_1, n_2\}$ llegamos a una contradicción: tendría que cumplirse

$$c < x_n < c.$$

□

Proposición 2.2.5. *Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y sea $x_0 \in \mathbb{R}$*

1) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \iff \lim_{n\to\infty} |x_n - x_0| = 0.$

2) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = |x_0|.$

   El recíproco solo es cierto, en general, cuando $x_0 = 0$.

Demostración. Inmediata. □

Proposición 2.2.6. *Toda sucesión convergente está acotada.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión convergente a un número $a \in \mathbb{R}$. Tomamos, por ejemplo, $\varepsilon = 1$ en la definición de límite y existirá algún número $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < 1$ para todo $n \geq n_\varepsilon$. Si escribimos

$$\beta = \text{máx}\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_{n_\varepsilon - 1} - a|\}$$

se tiene que

$$|x_n - a| \leq \beta,$$

es decir,

$$a - \beta \leq x_n \leq a + \beta,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego la sucesión está acotada. □

Observación 2.2.7. *El recíproco de la proposición anterior es falso. Por ejemplo, la sucesión*

$$x_n = 1 + (-1)^n,$$

está acotada, pero no es convergente.

Proposición 2.2.8. *Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión monótona. Se verifican las siguiente afirmaciones:*

1) *Si* $(x_n)_{n\geq 1}$ *es creciente, entonces* $(x_n)_{n\geq 1}$ *es convergente si, y sólo si, está acotada superiormente, en cuyo caso*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\} = \sup_{n\geq 1} x_n.$$

2) *Si* $(x_n)_{n\geq 1}$ *es decreciente, entonces* $(x_n)_{n\geq 1}$ *es convergente si, y sólo si, está acotada inferiormente, en cuyo caso*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\} = \inf_{n\geq 1} x_n.$$

Demostración. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión monótona.

1) Si $(x_n)_{n\geq 1}$ es creciente.

   $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $(x_n)_{n\geq 1}$ es convergente. Según la proposición 2.2.6 la sucesión está acotada superiormente.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos ahora que la sucesión está acotada superiormente, sea a su supremo y veamos que la sucesión converge al punto a.

   Sea $\varepsilon > 0$. Como $a-\varepsilon < a$, el número $a-\varepsilon$ no puede ser una cota superior de la sucesión, y por lo tanto existirá algún $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$a - \varepsilon < x_{n_\varepsilon}.$$

   Como la sucesión es creciente, para cada $n \geq n_\varepsilon$, se tiene que

$$a - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leq x_{n_\varepsilon+1} \leq \cdots \leq x_n.$$

   Por la definición de supremo tenemos que,

$$x_n \leq a < a + \varepsilon,$$

   para cada $n \geq n_\varepsilon$. Por lo tanto,

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

   para cada $n \geq n_\varepsilon$. Esto demuestra que la sucesión converge al punto a.

2) La demostración es análoga.

$\square$

Corolario 2.2.9. *Si una sucesión monótona posee una subsucesión convergente, entonces ella es convergente.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión monótona, por ejemplo creciente, y $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ una subsucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$ que converge a x_0. Por la Proposición 2.2.8, basta probar que $(x_n)_{n\geq 1}$ está acotada superiormente. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$ se tiene que

$$x_{n_k} < x_0 + \varepsilon.$$

Como $n_k \geq k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, es claro que $k \geq k_0$ implica

$$x_k \leq x_{n_k} < x_0 + \varepsilon.$$

Si tomamos

$$M = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_{k_0-1}, x_0 + \varepsilon\},$$

se tiene que

$$x_k \leq M$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Proposición 2.2.10. *Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión y $x_0 \in \mathbb{R}$. Son equivalentes:*

1) *La sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ converge hacia x_0.*

2) *Toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$ converge hacia x_0.*

Demostración.

$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Sea $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ una subsucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$ y $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\geq 1}$ converge hacia x_0, entonces existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_\varepsilon$ se tiene que

$$|x_n - x_0| < \varepsilon.$$

Puesto que el conjunto

$$A = \{n_k \in \mathbb{N} : \; n_k < n_{k+1} \;\text{ para todo }\; k \in \mathbb{N}\}$$

de los índices de la subsucesión es infinito, se sigue que existe

$$n_{k_0} \in A$$

tal que

$$n_{k_0} \geq n_\varepsilon.$$

Luego, para $n_k \geq n_{k_0}$ se tiene que $n_k \geq n_\varepsilon$, por tanto

$$|x_{n_k} - x_0| < \varepsilon.$$

Luego

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0.$$

$\boxed{2) \Rightarrow 1)}$ Si $(x_n)_{n\geq 1}$ fuera una sucesión que no converge a x_0, entonces existiría un $\varepsilon > 0$ tal que para cada $N \in \mathbb{N}$ existe un $n \in \mathbb{N}$ con $n > N$ tal que

$$|x_n - x_0| > \varepsilon.$$

Entonces

- Para $N = 1$ existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ con $n_1 > 1$ tal que
$$|x_{n_1} - x_0| > \varepsilon.$$
- Para $N = 2$ existe un $n_2 \in \mathbb{N}$ con $n_2 > 2$ tal que
$$|x_{n_2} - x_0| > \varepsilon.$$

Usamos este hecho repetidamente, podemos seleccionar

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$$

tales que

$$|x_{n_k} - x_0| > \varepsilon$$

Esto nos da una subsucesión que no converge a x_0.

□

Corolario 2.2.11. *Si la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene dos subsucesiones que convergen hacia distintos límites, o una subsucesión que no converge, entonces la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ no puede ser convergente.*

Proposición 2.2.12. *Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión. Son equivalentes:*

1) *La sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es convergente.*

2) *La subsucesión de términos de lugar par $(x_{2n})_{n\geq 1}$ y la subsucesión de términos de lugar impar $(x_{2n-1})_{n\geq 1}$ son ambas convergentes y tienen el mismo límite.*

Demostración. Por la Proposición 2.2.10 basta con demostrar que si

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = x_0 \in \mathbb{R},$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por la definición de límite existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que:

$$n > n_1 \Longrightarrow |x_{2n} - x_0| < \varepsilon,$$

y

$$n > n_2 \Longrightarrow |x_{2n-1} - x_0| < \varepsilon.$$

Ahora si $n > \max\{2n_1, 2n_2 - 1\}$ se tiene, tanto si n es par como impar que

$$|x_n - x_0| < \varepsilon.$$

□

2.3. Propiedades elementales de los límites

Proposición 2.3.1. *Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones de números reales tales que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad y \quad (b_n)_{n\geq 1} \text{ está acotada.}$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0.$$

Demostración. Sea $K > 0$ tal que $|b_n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{K}$$

para todo $n \geq n_\varepsilon$. Luego, se sigue que

$$|a_n b_n| < \varepsilon,$$

para todo $n \geq n_\varepsilon$. □

Observación 2.3.2. *En la proposición anterior no es necesario que exista*

$$\lim_{n\to\infty} b_n.$$

Proposición 2.3.3. *Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones de números reales convergentes con límites*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

1) *La sucesión $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ es convergente y*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big) + \Big(\lim_{n\to\infty} b_n\Big) = a + b.$$

2) *La sucesión $(\lambda a_n)_{n\geq 1}$ es convergente y*

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda\Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big) = \lambda a.$$

3) *La sucesión $(a_n b_n)_{n\geq 1}$ es convergente y*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big)\Big(\lim_{n\to\infty} b_n\Big) = ab.$$

4) *Si $b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $b \neq 0$, entonces la sucesión $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ y convergente y*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$.

1) Usando la definición de convergencia de $(a_n)_{n\geq 1}$ obtenemos que existe $n_{\varepsilon_1} \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_{\varepsilon_1}$, entonces
$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
De igual manera existe $n_{\varepsilon_2} \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_{\varepsilon_2}$, entonces
$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Tomamos ahora $n_\varepsilon = \max\{n_{\varepsilon_1}, n_{\varepsilon_2}\}$. Por tanto, si $n > n_\varepsilon$, se verifican las dos desigualdades a la vez y así,
$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2) Si $\lambda = 0$ el resultado es trivial. Suponer por tanto $\lambda \neq 0$. Usamos la definición de convergencia de $(a_n)_{n\geq 1}$ y así, existe $n_{\varepsilon_1} \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_{\varepsilon_1}$, entonces
$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$
Por tanto
$$|\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda||a_n - a| < |\lambda|\frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon.$$

3) Como $(a_n)_{n\geq 1}$ es convergente, está acotada por la Proposición 2.2.6 y existe $K > 0$ tal que
$$|a_n| \leq K, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$
Puesto que $(a_n)_{n\geq 1}$ converge, entonces existe $n_{\varepsilon_1} \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_{\varepsilon_1}$ entonces
$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b| + 1}.$$
Por otra parte, como $(b_n)_{n\geq 1}$ converge, entonces existe $n_{\varepsilon_2} \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_{\varepsilon_2}$ entonces
$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Finalmente si $n_\varepsilon = \max\{n_{\varepsilon_1}, n_{\varepsilon_2}\}$ y $n \geq n_\varepsilon$, se tiene

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \\ &\leq K\frac{\varepsilon}{2K} + |b|\frac{\varepsilon}{2|b|+1} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

4) Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} bb_n = b^2.$$

Luego existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{b^2}{2} < bb_n,$$

para todo $n \geq n_\varepsilon$. En efecto, basta tomar $\varepsilon = \frac{b^2}{2}$.

Se sigue entonces que para todo $n \geq n_\varepsilon$, el número $\frac{1}{bb_n}$ es positivo y menor que $\frac{2}{b^2}$. Por lo tanto $\left(\frac{1}{bb_n}\right)_{n\geq 1}$ está acotada.

Ahora como

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{ba_n - ab_n}{bb_n}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} ba_n - ab_n = ba - ab = 0,$$

obtenemos por la Proposición 2.3.1 que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right) = 0.$$

□

2.4. Límites y desigualdades

Proposición 2.4.1. *Si la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ converge hacia un número real $a \neq 0$, entonces:*

1) *Si $a > 0$, para cada $\lambda \in (0, a)$ existe $n_\lambda \in \mathbb{N}$ (que depende de λ) tal que para cada $n \geq n_\lambda$ se tiene que $\lambda < a_n$.*

2) *Si $a < 0$, para cada $\gamma \in (a, 0)$ existe $n_\gamma \in \mathbb{N}$ (que depende de γ) tal que para cada $n \geq n_\gamma$ se tiene que $a_n < \gamma$.*

Demostración.

1) Dado $\lambda \in (0, a)$, si tomamos $\varepsilon = a - \lambda > 0$, entonces existe $n_\lambda \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_\lambda$ se tiene que

$$\lambda = -\varepsilon + a < a_n.$$

2) Razonamiento similar.

$\square$

Corolario 2.4.2. *Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión convergente con límite a y sea $\beta \in \mathbb{R}$.*

1) *Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ es $\beta \leq a_n$, entonces $\beta \leq a$.*

2) *Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ es $a_n \leq \beta$, entonces $a \leq \beta$.*

Demostración.

1) Supongamos que $\beta > a$. Consideramos la sucesión $(\beta - a_n)_{n\geq 1}$. Dado $\lambda = \frac{\beta - a}{2} \in (0, \beta - a)$. Por la Proposición 2.4.1 existe $n_\lambda \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_\lambda$ se tiene que
$$\lambda < \beta - a_n.$$
Así que
$$a_n < \frac{\beta + a}{2} < \beta,$$
para todo $n \geq n_\lambda$.

Por hipótesis tenemos la existencia de $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$\beta \leq a_n,$$
para todo $n \geq n_0$.

Si tomamos $n' = \text{máx}\{n_0, n_\lambda\}$, se tiene que, para todo $n \geq n'$ tenemos que
$$\beta \leq a_n < \beta.$$
Esto es una contradicción.

2) Análogo a 1).

$\square$

Proposición 2.4.3. *Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ sucesiones convergentes y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$a_n \leq b_n \quad \textit{para todo} \;\; n \geq n_0,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Demostración. La sucesión $(b_n - a_n)_{n\geq 1}$ cumple la desigualdad

$$b_n - a_n \geq 0 \quad \text{para todo} \;\; n \geq n_0,$$

y converge a

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n$$

Por el Corolario 2.4.2,

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n,$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

□

Observación 2.4.4. *Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$a_n < b_n \quad \textit{para todo} \;\; n \geq n_0,$$

no podemos concluir

$$\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Por ejemplo

$$0 < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n},$$

para todo $n \geq 2$, pero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Proposición 2.4.5 (Regla del sandwich). *Sean $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ y $(c_n)_{n\geq 1}$ sucesiones tales que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que*

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \textit{para todo} \;\; n \geq n_0.$$

Si $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ son sucesiones convergentes y con el mismo límite β, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \beta,$$

entonces $(c_n)_{n\geq 1}$ es también convergente y tiene el mismo límite β, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \beta.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por la definición de límite existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_1$ entonces
$$|a_n - \beta| < \varepsilon,$$
es decir,
$$\beta - \varepsilon < a_n < \beta + \varepsilon.$$
Análogamente, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_2$ entonces
$$\beta - \varepsilon < b_n < \beta + \varepsilon.$$
Por tanto si $n \geq \max\{n_0, n_1, n_3\}$ se tiene que
$$\beta - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < \beta + \varepsilon,$$
es decir,
$$|c_n - \beta| < \varepsilon.$$
□

2.5. Teorema de los intervalos encajados

El axioma del supremo es equivalente al resultado que se presenta a continuación y que resulta ser bastante útil a la hora de demostrar ciertas proposiciones, principalmente referidas al concepto de límite.

Teorema 2.5.1 (de los intervalos encajados). *Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $I_n = [a_n, b_n]$ un intervalo cerrado de la recta real. Si*
$$\begin{cases} \bullet \quad I_{n+1} \subseteq I_n, \quad \textit{para cada} \;\; n \in \mathbb{N}, \\ \\ \bullet \quad \lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0. \end{cases}$$
Entonces existe un único $x_0 \in \mathbb{R}$ que pertenece a cada uno de los intervalos I_n, es decir,
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x_0\}.$$
De hecho,
$$\begin{aligned} x_0 &= \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n, \\ &= \sup\{a_n : \; n \in \mathbb{N}\} = \inf\{b_n : \; n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Demostración. Por hipótesis, tenemos que la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ es monótona creciente y acotada superiormente (por b_1, por ejemplo), luego, por la Proposición 2.2.8, converge a un número real x_0, es decir,

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Análogamente, la sucesión $(b_n)_{n\geq 1}$ converge a un número real

$$y_0 = \lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Por la Proposición 2.4.3, se tiene que

$$a_n \leq x_0 \leq y_0 \leq b_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, la condición

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$$

asegura que

$$x_0 = y_0$$

y que

$$\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

$\square$

Observación 2.5.2. *La hipótesis de los intervalos I_n sean cerrados y acotados es esencial; por ejemplo los intervalos $\left(0, \frac{1}{n}\right]$ forman un encaje pero tienen intersección vacío.*

Teorema 2.5.3. *El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales no es numerable.*

Demostración. Basta probar que el intervalo $[0, 1]$ no es numerable. Si lo fuese existiría una aplicación $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1]$ biyectiva.

Dividimos $[0, 1]$ en dos intervalos cerrados de igual longitud y al menos en uno de ellos, que notamos I_1, no está el punto $f(1)$.

Dividimos I_1 en dos intervalos de igual longitud y al menos en uno de ellos, que notamos I_2, no está $f(2)$.

En el n-ésimo paso I_n es un intervalo que no contiene al punto $f(n)$ y cuya longitud es un medio de la del intervalo I_{n-1}.

Por lo tanto $I_n \neq \emptyset$, $I_{n+1} \subseteq I_n$ y verificando que

$$l(I_n) = b_n - a_n = \frac{1}{2^n},$$

para todo natural $n \in \mathbb{N}$. Luego,

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0.$$

Por lo tanto, el teorema de los intervalos encajados (Teorema 2.5.1) nos asegura que existe $x_0 \in [0,1]$ tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x_0\}.$$

Esto es absurdo pues al ser f biyectiva ha de existir $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(k_0) = x_0$$

con lo que $x_0 \notin I_{k_0}$ y con mayor motivo

$$x_0 \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

□

2.6. Teorema de Bolzano-Weierstrass

Teorema 2.6.1 (Bolzano-Weierstrass). *Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión acotada en $\mathbb{R}$ y $M > 0$ tal que

$$|x_n| \leq M,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos construyendo la subsucesión de la siguiente forma: bien en $[0, M]$, bien en $[-M, 0]$, habrá infinitos términos de la sucesión (quizá incluso en los dos).

Supongamos que en

$$I_1 = [0, M]$$

hay infinitos términos y elijamos cualquier elemento

$$x_{n_1} \in I_1.$$

De nuevo repetimos la idea y, o bien en $\left[0, \frac{M}{2}\right]$ o en $\left[\frac{M}{2}, M\right]$, habrá infinitos términos de la sucesión. Nos quedamos uno de los intervalos que contenga infinitos x_n; supongamos, por ejemplo, que es

$$I_2 = \left[\frac{M}{2}, M\right].$$

Elegimos un elemento

$$x_{n_2} \in I_2$$

que además cumpla

$$x_{n_1} < x_{n_2}.$$

Observemos que

$$I_2 \subseteq I_1.$$

El siguiente paso es de nuevo subdividir I_2 en dos mitades, $\left[\frac{M}{2}, \frac{3M}{4}\right]$ y $\left[\frac{3M}{4}, M\right]$, elegir una mitad I_3 que contenga infinitos términos de la sucesión y seleccionar un nuevo

$$x_{n_3} \in I_3$$

con

$$x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3}.$$

Construimos de esa forma una sucesión de intervalos cerrados encajados

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots I_n \supset \cdots$$

y una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$ con

$$x_{n_k} \in I_k$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Por comodidad escribimos $I_k = [a_k, b_k]$ con lo que

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y además, como la longitud de cada I_k es $\frac{M}{2k}$, se tiene

$$\lim_{k\to\infty} (b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{M}{2k} = 0.$$

Por tanto podemos aplicar el Teorema 2.5.1 de los intervalos encajados y asegurar la existencia de $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_0 = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k$$

Pero por la regla de sandwich (Proposición 2.4.5) tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0.$$

□

2.7. Sucesiones de Cauchy

Hasta este punto, el único resultado que permite averiguar si una sucesión es convergente sin necesidad de tener una idea previa acerca del valor de su límite es la Proposición 2.2.8, que se aplica sólamente a un tipo muy particular de sucesiones (las acotadas). El criterio de Cauchy, que veremos a continuación, caracteriza de forma relativamente sencilla a las sucesiones convergentes sin necesidad de conocer cuál es su límite.

Definición 2.7.1. *Una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ se dice que es de **Cauchy** si para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (que depender de ε) tal que*

$$n, m \geq n_\varepsilon \implies |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Lema 2.7.2. *Toda sucesión de Cauchy está acotada.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy. Tomando $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n, m \geq n_0 \Longrightarrow |x_n - x_m| < 1$$

En particular

$$n \geq n_0 \Longrightarrow |x_n| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|.$$

Entonces $(x_n)_{n\geq 1}$ está acotado por

$$\max\left\{1 + |x_{n_0}|, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|\right\}.$$

□

Teorema 2.7.3 (Criterio de convergencia de Cauchy). *Una sucesión de números reales es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge a $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De esto se deduce que

$$\begin{aligned} n, m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |x_n - x_m| &= |x_n - x_0 + x_0 - x_m| \\ &\leq |x_n - x_0| + |x_m - x_0| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy. Puesto que está acotada (Lema 2.7.2), el Teorema 2.6.1 de Bolzano-Weierstrass asegura la existencia de una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ convergente.

Dado $\varepsilon > 0$, entonces existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq n_\varepsilon \implies |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otra parte, si

$$x_0 = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$$

existe $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_\varepsilon \implies |x_{n_k} - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como (por definición de subsucesión) la sucesión de números naturales $(n_k)_{k\geq 1}$ es monótona creciente, existe $m_0 \geq k_\varepsilon$ tal que $n_{m_0} \geq n_\varepsilon$.

Si tomamos $n_0 = n_{m_0} \geq n_\varepsilon$ entonces se cumple

$$n \geq n_0 \implies |x_n - x_0| \leq |x_n - x_{n_{m_0}}| + |x_{n_{m_0}} - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

Nota 2.7.4. *El conjunto de las sucesiones convergentes de números reales coincide con el de las sucesiones de Cauchy, a diferencia de lo que sucede con las sucesiones de números racionales, por ejemplo la sucesión de números racionales*

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es de Cauchy pero no converge en $\mathbb{Q}$.

*Esta propiedad se conoce con el nombre de **completitud de los números reales**.*

2.8. Límites infinitos

Definición 2.8.1. *Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales.*

- *Se dice que $(x_n)_{n\geq 1}$ **tiende a** $+\infty$ o que **tiene límite** $+\infty$, y se escribe:*

  $$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty,$$

  si para cada número real $M > 0$ existe un número natural n_0, que depende de M, tal que:

  $$n \geq n_0 \implies x_n > M.$$

- *Se dice que* $(x_n)_{n\geq 1}$ ***tiende a*** $-\infty$ *o que* ***tiene límite*** $-\infty$*, y se escribe:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty,$$

si para cada número real $N < 0$ *existe un número natural* n_0*, que depende de* N*, tal que:*

$$n \geq n_0 \implies x_n < N.$$

Proposición 2.8.2.

1) *Sea* $(x_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión monótona creciente. Si no está acotada superiormente, entonces*
$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

2) *Sea* $(x_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión monótona decreciente. Si no está acotada inferiormente, entonces*
$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Demostración. Es consecuencia directa de las definiciones. □

2.9. Criterios para el cálculo de límites

Teorema 2.9.1 (Criterio de Stolz). *Sean* $(a_n)_{n\geq 1}$ *y* $(b_n)_{n\geq 1}$ *dos sucesiones de números reales. Supongamos que* $(b_n)_{n\geq 1}$ *es de términos no nulos, estrictamente creciente y* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$*. Si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

Demostración. Nos limitaremos al caso $l \in \mathbb{R}$. Las otras situaciones se prueban análogamente.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n > n_\varepsilon$ se tiene

$$l - \varepsilon < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < l + \varepsilon.$$

Como $(b_n)_{n\geq 1}$ es estrictamente creciente, se tiene que

$$(l - \varepsilon)(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < (l + \varepsilon)(b_{n+1} - b_n).$$

Sea $k > n_\varepsilon$ un número natural. Obtenemos

$$(l-\varepsilon)\sum_{i=n_\varepsilon}^{k}(b_{i+1}-b_i) < \sum_{i=n_\varepsilon}^{k}(a_{i+1}-a_i) < (l+\varepsilon)\sum_{i=n_\varepsilon}^{k}(b_{i+1}-b_i).$$

Así que

$$(l-\varepsilon)(b_{k+1}-b_{n_\varepsilon}) < a_{k+1}-a_{n_\varepsilon} < (l+\varepsilon)(b_{k+1}-b_{n_\varepsilon}).$$

Por otra parte, sea $M > 0$, como $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n > n_0$ se tiene que $b_n > M$. Por tanto para $k > \max\{n_0, n_\varepsilon\}$ tenemos que

$$(l-\varepsilon)\left(1-\frac{b_{n_\varepsilon}}{b_{k+1}}\right) < \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} - \frac{a_{n_\varepsilon}}{b_{k+1}} < (l+\varepsilon)\left(1-\frac{b_{n_\varepsilon}}{b_{k+1}}\right).$$

Luego

$$(l-\varepsilon)\left(1-\frac{b_{n_\varepsilon}}{b_{k+1}}\right) + \frac{a_{n_\varepsilon}}{b_{k+1}} < \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} < (l+\varepsilon)\left(1-\frac{b_{n_\varepsilon}}{b_{k+1}}\right) + \frac{a_{n_\varepsilon}}{b_{k+1}}.$$

Esto significa que existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $k > k_0$ tenemos

$$l-\varepsilon < \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} < l+\varepsilon.$$

Obviamente, esto significa que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l.$$

□

Observación 2.9.2. *El recíproco no es cierto. Por ejemplo si $a_n = (-1)^n$ y $b_n = n$, tenemos que*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0$$

y sin embargo $a_n = (-1)^n$ no tiene límite.

Proposición 2.9.3 (Criterio de la media aritmética). *Supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\},$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = l$$

Demostración. Basta aplicar el criterio de Stolz tomando

$$x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

y

$$y_n = n.$$

□

Proposición 2.9.4 (Criterio de la media geométrica). *Si* $(a_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión de términos positivos tal que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = l.$$

Demostración. Basta aplicar el criterio de la media aritmética a la sucesión

$$\ln(a_n).$$

Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln(a_n) = \ln(l).$$

Esta igualdad es equivalente a

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\right) = \ln(l).$$

Tomando la función exponencial llegamos al resultado buscado. □

Proposición 2.9.5 (Criterio de la raíz). *Sea* $(a_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión de términos positivos y supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Demostración. Tenemos que

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_1}{1}\frac{a_2}{a_1}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}}.$$

Aplicando el criterio de la media geométrica se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = l$$

□

Capítulo 3

Funciones de una variable real

3.1. Topología de $\mathbb{R}$

3.1.1. Conjuntos abiertos

Definición 3.1.1. *Sea $x_0 \in \mathbb{R}$, un conjunto $V \subset \mathbb{R}$ es un **entorno** de x_0 si existe $\varepsilon > 0$, tal que*

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset V.$$

Definición 3.1.2. *Si dice que un subconjunto V de la recta real es **abierto** si es vacío o si es entorno de todos sus puntos, es decir, si se verifica que:*

$$\forall\, x \in V, \quad \exists\, \varepsilon > 0 \quad (\text{que depende de } x) \quad \text{tal que} \quad (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset V.$$

3.1.2. Puntos interiores

Definición 3.1.3. *Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Se dice que el punto x_0 es **interior al conjunto** A si existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset A.$$

(*Un punto interior de A está "completamente rodeado" de puntos de A*). *El conjunto de todos los puntos interiores a A se llama **interior** de A y se representa por* $\mathrm{Int}(A)$ *o por* $\mathring{A}$.

Proposición 3.1.4. *Sea A un conjunto en $\mathbb{R}$. Se tiene que:*

1) $\overset{\circ}{A} \subset A$.

2) $\overset{\circ}{A}$ *es el mayor abierto contenido en* A*, esto es,*

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup \big\{U \subset \mathbb{R} \ : \ U \ \textit{abierto} \ , \ U \subset A\big\}.$$

3) *El conjunto* A *es abierto si, y sólo si,* $\overset{\circ}{A} = A$.

Demostración. Sea A un conjunto en $\mathbb{R}$.

1) Sea $x \in \overset{\circ}{A}$. Por definición, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A.$$

En particular, $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$ y, por tanto,

$$\overset{\circ}{A} \subset A.$$

2) Veamos, en primer lugar, que si U es un conjunto abierto, con $U \subset A$ entonces $U \subset \overset{\circ}{A}$.

Sea $x \in U$. Por ser U un conjunto abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U \subset A.$$

Por tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$, de donde resulta que $x \in \overset{\circ}{A}$. Así pues,

$$U \subset \overset{\circ}{A} \ .$$

Veamos ahora $\overset{\circ}{A}$ es un conjunto abierto, con lo que quedará demostrada la propiedad. En efecto:

Sea $x \in \overset{\circ}{A}$. Por definición, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$. Como $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ es un conjunto abierto y $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$, por lo demostrado anteriormente, resulta que

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \overset{\circ}{A} \ .$$

Así pues,

$$\forall \, x \in \overset{\circ}{A}, \quad \exists \, \varepsilon > 0 \ : \quad (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \overset{\circ}{A} \ .$$

Por definición, el conjunto $\overset{\circ}{A}$ es abierto.

3) Para demostrar la equivalencia, veamos las dos implicaciones:

$\boxed{\Rightarrow}$ Una de las dos inclusiones, $\overset{\circ}{A} \subset A$, se verifica para cualquier conjunto (véase apartado 1)).

Veamos, pues, la otra inclusión, en el caso que A sea abierto:

Sea $x \in A$. Por ser A un conjunto abierto, x es un punto interior de A, y, por tanto, $x \in \overset{\circ}{A}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $\overset{\circ}{A} = A$. Entonces, para todo $x \in A$, se tiene que $x \in \overset{\circ}{A}$, y, por tanto, cualquier punto del conjunto A es interior. Por definición, el conjunto A es abierto.

$\square$

3.1.3. Puntos adherentes

Definición 3.1.5. *Sean C un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Se dice que x_0 es **adherente** al conjunto C si para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que:*

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap C \neq \emptyset.$$

*El conjunto de todos los puntos adherentes a un conjunto C se llama **adherencia**, (cierre o clausura), de C y se designa por $\overline{C}$ o $\mathrm{Cl}(C)$.*

Observación 3.1.6. *Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ es adherente a $C \subset \mathbb{R}$ viene a decir que en el conjunto C hay infinitos puntos tan próximos a x_0 como se quiera.*

3.1.4. Conjuntos cerrados

Definición 3.1.7. *El conjunto $C \subset \mathbb{R}$ es un conjunto **cerrado** si, y sólo si*

$$C^c = \mathbb{R} - C \ (\textbf{\textit{complementario de}}\ C),$$

es un conjunto abierto.

Proposición 3.1.8. *Sea C un conjunto en $\mathbb{R}$. Se tiene que:*

1) $C \subset \overline{C}$.

2) *El conjunto C es cerrado si, y sólo si, $\overline{C} = C$.*

3) $\overset{\circ}{C^c} = (\overline{C})^c$.

4) $\overline{C}$ *es el menor cerrado que contiene a* C*, es decir,*

$$\overline{C} = \bigcap \{F \subset \mathbb{R} : \ F \ \textit{cerrado} \ , \ C \subset F\}.$$

Demostración. Sea C un conjunto en $\mathbb{R}$.

1) Sea $x \in C$. Entonces $\forall \varepsilon > 0$, $x \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap C$ y, por tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \quad (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap C \neq \emptyset.$$

Así pues, $x \in \overline{C}$, de donde resulta que $C \subset \overline{C}$.

2) Para demostrar la equivalencia, veamos las dos implicaciones:

$\boxed{\Rightarrow}$ Una de las dos inclusiones, $C \subset \overline{C}$, se verifica para cualquier conjunto (véase apartado 1)).

Veamos, pues, la otra inclusión por reducción al absurdo:

Sea $x \in \overline{C}$, y supongamos que $x \notin C$. Por ser C un conjunto cerrado, su complementario, C^c, es un conjunto abierto, y $x \in C^c$. Por tanto,

$$\exists \varepsilon > 0 \ \text{ tal que } (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset C^c.$$

Es decir,

$$\exists \varepsilon > 0 \ \text{ tal que } (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap C = \emptyset$$

y, en definitiva, $x \notin \overline{C}$.

Hemos llegado, pues, a una contradicción. Por tanto, $x \in C$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $C = \overline{C}$. Para demostrar que C es un conjunto cerrado, hemos de ver que C^c es abierto:

Sea $x \in C^c$, es decir, $x \notin C = \overline{C}$. Por no ser x un punto de adherencia de C, se verifica que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap C = \emptyset,$$

o, equivalentemente;

$$\exists \varepsilon > 0 \ \text{ tal que } \ (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset C^c.$$

Por tanto, C^c es un conjunto abierto y, por definición, C es un conjunto cerrado.

3) A partir de las definiciones, se tiene:

$$\begin{aligned} x \in \overset{\circ}{C^c} &\Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \;\text{ tal que } (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset C^c \\ &\Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \;\text{ tal que } (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap C = \emptyset \\ &\Longleftrightarrow x \notin \overline{C} \\ &\Longleftrightarrow x \in \overline{C}^c. \end{aligned}$$

4) Por el apartado 1), tenemos que $C \subset \overline{C}$.

   Veamos, en primer lugar, que si F es un conjunto cerrado, con $C \subset F$, entonces $\overline{C} \subset F$.

   Si $C \subset F$, entonces $F^c \subset C^c$. Por definición, si F es un conjunto cerrado, su complementario, F^c, es abierto. Por el apartado 2) de la Proposición 3.1.4, si $F^c \subset C^c$, F^c conjunto abierto, se verifica que

$$F^c \subset \overset{\circ}{C^c} .$$

   Por tanto, teniendo en cuenta el apartado 3),

$$F^c \subset \overset{\circ}{C^c} = (\overline{C})^c,$$

   de donde se deduce que

$$\overline{C} \subset F.$$

   Veamos ahora que $\overline{C}$ es un conjunto cerrado, con lo que quedará demostrada la propiedad.

   Por el apartado 3), se verifica $\overset{\circ}{C^c} = (\overline{C})^c$. Como hemos demostrado que el interior de un conjunto es un conjunto abierto, resulta que $(\overline{C})^c$ es abierto, y, por definición, su complementario, $\overline{C}$, será un conjunto cerrado.

$\square$

Proposición 3.1.9. *Un conjunto A de $\mathbb{R}$ es cerrado si, y sólo si, para toda sucesión $(x_n)_{n\geq 1} \subset A$ y todo $x \in \mathbb{R}$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, se tiene que $x \in A$.*

Demostración. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que A es un conjunto cerrado y que $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de elementos de A convergente a un elemento $x \in \mathbb{R}$.

Demostremos entonces que $x \in A$:

$$\begin{aligned}
&\forall n \geq 1,\ x_n \in A \ \text{ y } \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x,\\
&\Longrightarrow \forall n \geq 1,\ x_n \in A, \ \text{ y } \ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ x_{n_0+1} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon),\\
&\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es un número arbitrario, entones si ε tiende a 0, se tiene que

$$x \in A.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos ahora que A es un conjunto tal que, toda sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en A, convergente a un elemento $x \in \mathbb{R}$, verifica que $x \in A$.

Demostremos entonces que A es cerrado:

$$\begin{aligned}
x \in \overline{A} &\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset,\\
&\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \Big(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\Big) \cap A \neq \emptyset,\\
&\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in \Big(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\Big) \cap A,\\
&\Longrightarrow (x_n)_{n\geq 1} \ \text{ está en } A \ \text{ y } \ \lim_{n\to\infty} x_n = x\\
&\Longrightarrow x \in A.
\end{aligned}$$

Hemos así demostrado que $\overline{A} \subset A$ y, por lo tanto $\overline{A} = A$ y entonces A es cerrado.

$\square$

3.1.5. Puntos de acumulación

Definición 3.1.10. *Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Se dice que x_0 es* ***un punto de acumulación*** *del conjunto A si para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que:*

$$\big((x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) - \{x_0\}\big) \cap A \neq \emptyset.$$

El conjunto de todos los puntos de acumulación de A se llama ***conjunto derivado*** *de A y se designa por A'.*

Observación 3.1.11.

- *Un punto $a \in \mathbb{R}$ es de acumulación de $A \subset \mathbb{R}$ si hay infinitos puntos de A, distintos del propio a, tan próximos como se quiera a dicho punto.*

- *Un punto de acumulación de A no tiene por qué pertenecer al conjunto A.*
- *Un conjunto finito, A, no puede tener puntos de acumulación, mientras que los conjuntos infinitos pueden tenerlos o no.*

Definición 3.1.12. *Si $x \in A$ y x no es punto de acumulación de A, se dice que x es un **punto aislado** de A, es decir,*

$$\exists\, \varepsilon > 0 \ \text{ tal que } \ (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A = \{x\}.$$

3.1.6. Algunas relaciones

Ejemplo 3.1.13. El conjunto

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

no es cerrado ni abierto, y

$$\overset{\circ}{A} = \emptyset, \quad A' = \{0\}, \quad \overline{A} = A \cup \{0\}.$$

Proposición 3.1.14. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$, entonces*

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

Demostración. Veamos las dos inclusiones:

$\boxed{\subset}$ Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \notin A \cup A'$. Entonces $x \notin A$ y $x \notin A'$. Luego, por definición, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\big((x-\varepsilon_0, x+\varepsilon_0) - \{x\}\big) \cap A = \emptyset,$$

y como $x \notin A$ concluimos que

$$(x-\varepsilon_0, x+\varepsilon_0) \cap A = \emptyset,$$

con lo cual

$$x \notin \overline{A}.$$

$\boxed{\supset}$ Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \notin \overline{A}$. Por definición existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$(x-\varepsilon_0, x+\varepsilon_0) \cap A = \emptyset,$$

es decir

$$x \notin A \ \text{ y } x \notin A'.$$

$\square$

Corolario 3.1.15. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$.*

$$A \quad \textit{es cerrado si, y sólo si,} \quad A' \subset A.$$

Demostración. $A = \overline{A} = A \cup A'$ lo que implica $A' \subset A$. $\square$

Proposición 3.1.16. *Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$.*

1) *$x_0 \in \overset{\circ}{A}$ si, y sólo si, para cada sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ de números reales que converge hacia x_0, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ para todo $n \geq n_0$.*

2) *$x_0 \in \overline{A}$ si, y sólo si, existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1} \subset A$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

3) *$x_0 \in A'$ si, y sólo si, existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1} \subset A - \{x_0\}$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Demostración.

1) $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, por definición existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset A.$$

Por otra parte si $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, tenemos la existencia de $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0.$$

Por tanto, para todo $n \geq n_0$ tenemos

$$x_n \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset A.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Veamos, el recíproco por reducción al absurdo:
Supongamos que

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \not\subset A.$$

Sea $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Fijamos un número $\varepsilon_0 > 0$. Por definición del límite existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m_0$ implica

$$x_n \in (x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0).$$

Por hipótesis tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in A \quad \text{para todo} \;\; n \geq n_0.$$

Así que, si tomamos $n \geq \max\{n_0, m_0\}$ se tiene que

$$x_n \in (x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0) \quad \text{y} \quad x_n \in A.$$

Hemos llegado, pues, a una contradicción. Por tanto,

$$\exists\, \varepsilon > 0, \quad (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset A.$$

Luego $x_0 \in \overset{\circ}{A}$.

2) $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $x_0 \in \overline{A}$. Por definición del punto adherente al conjunto A tenemos

$$\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Podemos construir entonces una sucesión de la siguiente forma:
Si $n = 1$ tomamos $x_1 \in (x_0 - 1, x_0 + 1) \cap A$.
Si $n = 2$ tomamos $x_2 \in \left(x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}\right) \cap A$.
Así sucesivamente para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos

$$x_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) \cap A.$$

De esta manera obtenemos una sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ de puntos de A que converge a x_0 evidentemente.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si existe una sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ en A tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica

$$x_n \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon),$$

es decir

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Por tanto $x_0 \in \overline{A}$.

3) La demostración es análoga a la de la proposición anterior.

$\square$

3.1.7. Conjuntos compactos

Definición 3.1.17. *Si dice que un subconjunto K de $\mathbb{R}$ es* ***compacto*** *si toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente a un elemento de K.*

Proposición 3.1.18. *Un subconjunto K de $\mathbb{R}$ es compacto si, y sólo si es cerrado y acotado.*

Demostración. Sea K un subconjunto de $\mathbb{R}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Para demostrar que si K es compacto entonces es cerrado, usaremos la Proposición 3.1.9.

Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de elementos de K convergente a $x \in \mathbb{R}$.

Como K es compacto, entonces existe $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ una subsucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$ que converge a un punto de K.

Sabemos que toda subsucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$ converge hacia el mismo límite x (véase Proposición 2.2.10).

Por tanto, se tendrá obligatoriamente que $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$, lo que nos permite concluir que K es cerrado.

Ahora demostraremos que si K es compacto entonces es acotado. Razonemos por contradicción.

Supongamos que K no es acotado, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un punto $x_n \in K$ tal que

$$|x_n| > n,$$

así conseguimos una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ de puntos de K.

Cualquier subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ extraída de ésta verificaría

$$|x_{n_k}| > n_k,$$

y como los índices n_k forman una sucesión creciente, la sucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ no podría estar acotada y por tanto no podría ser convergente (véase Proposición 2.2.6).

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que K es cerrado y acotado. Sea $(x_n)_{n\geq 1} \subset K$.

Por ser K acotado, esta sucesión está acotada.

Luego, por el Teorema 2.6.1 de Bolzano-Weierstrass, $(x_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ que converge a un punto $x \in \mathbb{R}$.

Como K es cerrado contiene a los límites de las sucesiones de puntos de él (véase Proposición 3.1.9) y por tanto $x \in K$.

Así pues, de la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ de partida ha sido posible extraer una subsucesión convergente hacia un punto de K, lo que prueba que K es compacto.

□

3.2. Aplicaciones entre conjuntos

3.2.1. Correspondencias y aplicaciones

Definición 3.2.1. *Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Una **correspondencia** de A en B es un subconjunto $\mathcal{C}$ del producto cartesiano*

$$A \times B = \{(x, y) : \ x \in A \quad e \quad y \in B\}.$$

Definición 3.2.2. *Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Se dice que una correspondencia $\mathcal{C}$ de A en B es **aplicación** si además verifica la siguiente propiedad:*

"Para cada $a \in A$ existe un, y sólo un, $b \in B$ tal que $(a, b) \in \mathcal{C}$".

*Habitualmente una aplicación de A en B se representa por "$f : A \longrightarrow B$" y se denota por "$f(a)$" al único elemento de B que es **imagen** de a por f.*

3.2.2. Tipos de aplicaciones

Definición 3.2.3 (Aplicación inyectiva). *Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $f : A \longrightarrow B$ una aplicación.*

*Se dice que f es **inyectiva** (**o uno-uno**) si verifica la siguiente propiedad:*

$$\text{"}\forall\ x_1, x_2 \in A, \quad x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)\text{"}.$$

O, equivalentemente,

$$\text{"}\forall\ x_1, x_2 \in A, \quad f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2\text{"}.$$

Definición 3.2.4 (Aplicación sobreyectiva). *Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $f : A \longrightarrow B$ una aplicación.*

*Se dice que f es **sobreyectiva**, cuando cada elemento $y \in B$ es la imagen mediante f de algún elemento $x \in A$, es decir,*

$$\text{"}\forall\ y \in B,\ \exists\ x \in A \text{ (al menos uno) } \text{ tal que } \ f(x) = y\text{"}$$

Definición 3.2.5 (Aplicación biyectiva). *Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $f : A \longrightarrow B$ una aplicación. Se dice que f es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.*

O, equivalentemente,

$$\text{"}\forall\ y \in B, \quad \exists! \text{ (existe un único) } \ x \in A \quad \text{tal que} \ \ f(x) = y\text{"}.$$

Definición 3.2.6. *Si $f : A \longrightarrow B$ es una biyección entre A y B, y $\mathcal{C}$ es la correspondencia que la define, entonces la correspondencia $\mathcal{C}^{-1}$ de B en A definida por:*

$$(b, a) \in \mathcal{C}^{-1} \quad \textit{si, y sólo si, } (a, b) \in \mathcal{C},$$

es también una aplicación que se denomina ***aplicación inversa de*** f *y se denota por*

$$f^{-1} : B \longrightarrow A.$$

Observación 3.2.7. *Si $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva, entonces*

$$f^{-1}(b) = a \Longleftrightarrow f(a) = b.$$

3.2.3. Imagen directa y inversa de una aplicación

Definición 3.2.8. *Sean X y Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación*

1) *La* ***imagen directa de un subconjunto*** $A \subset X$ ***por*** f *es el conjunto de puntos de Y que poseen algún antecedente en X mediante la aplicación f y lo denotaremos por:*

$$\begin{aligned} f(A) &= \big\{ f(x) \in Y : \ x \in A \big\} \\ &= \big\{ y \in Y : \ \textit{existe algún } \ x \in A \ \ \textit{con} \ \ y = f(x) \big\}. \end{aligned}$$

2) *La* ***imagen inversa de un subconjunto*** $B \subset Y$ ***por*** f *es el conjunto de todos los elementos de X cuya imagen mediante f es un elemento de B, y se denota $f^{-1}(B)$, es decir,*

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X : \ f(x) \in B \}.$$

Observación 3.2.9. *La notación $f^{-1}(B)$ se usa incluso cuando no está definida, es decir, aunque f no sea biyectiva.*

3.2.4. Composición de aplicaciones

Definición 3.2.10. *Sean f una aplicación del conjunto A en el conjunto B y g una aplicación del conjunto B en el conjunto C.*

Se llama ***composición de*** f ***con*** g***, o*** f ***compuesta con*** g, *y se denota $g \circ f$, en este orden, a la aplicación*

$$\begin{aligned} h = g \circ f : \ A &\longrightarrow C \\ x &\longrightarrow h(x) = g \circ f(x) = g\big(f(x)\big). \end{aligned}$$

3.3. Funciones reales de una variable real

Definición 3.3.1. *Si una aplicación definida en un conjunto X toma valores en un conjunto numérico recibe el nombre de* ***función****.*

Definición 3.3.2. *Una función se dice* ***real de variable real*** *si tanto los valores que toma como la variable, son números reales.*

Observación 3.3.3. *Como solo vamos a considerar funciones de este tipo, a partir de ahora diremos simplemente funciones.*

Definición 3.3.4. *Sea $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. El* ***dominio de definición de*** *f está formado por todos aquellos puntos $x \in X$ para los cuales la expresión $f(x)$ tiene sentido y lo denotaremos por:*

$$\mathfrak{D}(f) = \big\{x \in X \text{ tal que } \; f(x) \; \text{ está definido}\big\} = \{x \in X : \;\; \exists\, f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

3.4. Funciones crecientes y decrecientes

Definición 3.4.1. *Sea f una función definida en un intervalo I.*

1) *Se dice que f es* ***creciente*** *en I si para cualquier par de puntos x_1, x_2 en I tales que $x_1 < x_2$ se tiene*
$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

2) *Se dice que f es* ***estrictamente creciente*** *en I si para cualquier par de puntos x_1, x_2 en I tales que $x_1 < x_2$ se tiene*
$$f(x_1) < f(x_2).$$

3) *Se dice que f es* ***decreciente*** *en I si para cualquier par de puntos x_1, x_2 en I tales que $x_1 < x_2$ se tiene*
$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

4) *Se dice que f es* ***estrictamente decreciente*** *en I si para cualquier par de puntos x_1, x_2 en I tales que $x_1 < x_2$ se tiene*
$$f(x_1) > f(x_2).$$

Definición 3.4.2.

- *Una función* ***monótona*** *es una función creciente o decreciente.*
- *Una función* ***es estrictamente monótona*** *es una función estrictamente creciente o estrictamente decreciente.*

3.5. Límite de una función en un punto

Definición 3.5.1. *Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, x_0 un punto de acumulación de A y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función.*

Se dice que f ***tiene límite (finito) cuando*** *x* ***tiende hacia*** *x_0 si existe un número real $\ell \in \mathbb{R}$ verificando la siguiente propiedad:*

Para cada número real $\varepsilon > 0$, existe un número real $\delta > 0$ (que depende de ε) tal que, para cada

$$x \in \big((x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}\big) \cap A$$

(es decir, para cada $x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta$), se tiene que

$$f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$$

(es decir, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$).

En este caso el número ℓ se denomina ***límite*** *de f en x_0, y escribimos*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Observaciones 3.5.2. *Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función.*

1) *Sólo tiene sentido escribir $\lim_{x \to x_0} f(x)$, cuando x_0 es un punto de acumulación de A.*

2) *Si $x_0 \notin A'$, entonces cualesquiera que sea $\ell \in \mathbb{R}$ será el límite de $f(x)$, cuando x tiende a x_0.*

   En efecto, como $x_0 \notin A'$ existe $\delta > 0$ tal que

   $$V_{x_0} = \big(x_0 - \delta, x_0 - \delta) - \{x_0\}\big) \cap A = \emptyset.$$

   Dado cualquier $\varepsilon > 0$, elegimos este δ y se tiene

   $$\emptyset = f(V_{x_0}) \subset (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon).$$

3) *El punto x_0 no necesariamente debe pertenecer al conjunto A.*

Proposición 3.5.3 (Unicidad del límite). *Una función no puede tener dos límites distintos en un mismo punto.*

Demostración. Supongamos que ℓ_1 y ℓ_2 sean dos límites de la función f en el punto x_0.

Fijamos arbitrariamente el número real $\varepsilon > 0$, entonces existen dos números reales positivos δ_1 y δ_2 tales que

$$0 < |x - x_0| < \delta_1,\ x \in A, \quad \text{implica} \quad |f(x) - \ell_1| < \varepsilon$$

y

$$0 < |x - x_0| < \delta_2,\ x \in A, \quad \text{implica} \quad |f(x) - \ell_2| < \varepsilon.$$

Tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, es claro que para los puntos tales que

$$0 < |x - x_0| < \delta,\ x \in A$$

se verifican las dos implicaciones simultáneamente y como por otra parte es

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2|$$

resulta

$$|\ell_1 - \ell_2| < 2\varepsilon.$$

Luego, para todo número real positivo ε, se tiene

$$|\ell_1 - \ell_2| < 2\varepsilon,$$

de donde se deduce que $|\ell_1 - \ell_2| = 0$, es decir, $\ell_1 = \ell_2$. $\square$

3.6. Límites infinitos y límites en el infinito

Definición 3.6.1. *Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, x_0 un punto de acumulación de A y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función.*

1) *Se dice que f **tiene límite** $+\infty$ **cuando** x **tiende hacia** x_0 y se escribe*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

si se verifica la siguiente propiedad:

Para cada número real $M > 0$ existe un número real $\delta > 0$ (que depende de M) tal que, para cada $x \in A$ con

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

se tiene

$$f(x) > M.$$

2) *Se dice que* f ***tiene límite*** $-\infty$ ***cuando*** x ***tiende hacia*** x_0 *y se escribe*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

si se verifica la siguiente propiedad:

Para cada número real $N < 0$ *existe un número real* $\delta > 0$ (*que depende de* N) *tal que, para cada* $x \in A$ *con*

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

se tiene

$$f(x) < N.$$

Definición 3.6.2. *Sean* A *un subconjunto de* $\mathbb{R}$ *no acotado superiormente,* $\ell \in \mathbb{R}$ *y* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función.*

1) *Se dice que* f ***tiene límite*** $+\infty$ ***cuando*** x ***tiende hacia*** $+\infty$ *y se escribe*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

si se verifica la siguiente propiedad:

Para cada número real $M > 0$ *existe un número real* $K > 0$ (*que depende de* M) *tal que, para cada* $x \in A$ *con*

$$x > K,$$

se tiene

$$f(x) > M.$$

2) *Se dice que* f ***tiene límite*** $-\infty$ ***cuando*** x ***tiende hacia*** $+\infty$ *y se escribe*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

si se verifica la siguiente propiedad:

Para cada número real $N < 0$ *existe un número real* $K > 0$ (*que depende de* N) *tal que, para cada* $x \in A$ *con*

$$x > K,$$

se tiene

$$f(x) < N.$$

3) *Se dice que f **tiene límite ℓ cuando x tiende hacia** $+\infty$ y se escribe*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

si se verifica la siguiente propiedad:

Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $K > 0$ (que depende de ε) tal que, para cada $x \in A$ con

$$x > K,$$

se tiene

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Definición 3.6.3. *Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$ no acotado inferiormente, $\ell \in \mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función.*

1) *Se dice que f **tiene límite** $+\infty$ **cuando** x **tiende hacia** $-\infty$ y se escribe*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

si se verifica la siguiente propiedad:

Para cada número real $M > 0$ existe un número real $K < 0$ (que depende de M) tal que, para cada $x \in A$ con

$$x < K,$$

se tiene

$$f(x) > M.$$

2) *Se dice que f **tiene límite** $-\infty$ **cuando** x **tiende hacia** $-\infty$ y se escribe*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

si se verifica la siguiente propiedad:

Para cada número real $N < 0$ existe un número real $K < 0$ (que depende de N) tal que, para cada $x \in A$ con

$$x < K,$$

se tiene

$$f(x) < N.$$

3) *Se dice que* f ***tiene límite*** ℓ ***cuando*** x ***tiende hacia*** $-\infty$ *y se escribe*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

si se verifica la siguiente propiedad:

Para cada número real $\varepsilon > 0$ *existe un número real* $K < 0$ (*que depende de* ε) *tal que, para cada* $x \in A$ *con*

$$x < K,$$

se tiene

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

3.7. Caracterización del límite por sucesiones

Proposición 3.7.1 (Límite a través de sucesiones). *Sean* A *un subconjunto no vacío de* $\mathbb{R}$, x_0 *un punto de acumulación de* A, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función y* $\ell \in \mathbb{R}$. *Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

2) *Para cada sucesión* $(x_n)_{n \geq 1}$ *de puntos de* $A - \{x_0\}$ *tal que* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ *se verifica* $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \ell$

Demostración.

$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Supongamos que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta_0 > 0$ tal que para cada $x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta_0$ se cumple $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Sea $(x_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de puntos de $A - \{x_0\}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0.$$

Por definición del límite existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ se verifica

$$|x_n - x_0| < \delta_0,$$

y como $x_n \neq x_0$, se deduce que $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$. Esto significa

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \ell.$$

$\boxed{2) \Rightarrow 1)}$ Vamos a probar que si 1) no se cumple, entonces 2) tampoco.

La proposición 1) no se cumple significa que existe algún $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ hay al menos un $x_\delta \in A$ que cumple

$$0 < |x_\delta - x_0| < \delta,$$

y sin embargo

$$|f(x_\delta) - \ell| \geq \varepsilon.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, elijamos $\delta = \frac{1}{n}$. Hay algún punto $x_n \in A$ que cumple

$$0 < |x_n - x_0| < \delta,$$

y sin embargo

$$|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon.$$

La sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ así obtenida tiene las siguientes propiedades:

- Está contenida en $A - \{x_0\}$, porque $x_n \in A$, pero

$$0 < |x_n - x_0| < \delta.$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, porque $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ (Basta aplicar la regla del sandwich, véase Proposición 2.4.5).
- La sucesión $\big(f(x_n)\big)_{n\geq 1}$ no tiende a ℓ, porque para todos los $n \in \mathbb{N}$,

$$|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon.$$

Por lo tanto, no se cumple 2).

$\square$

Proposición 3.7.2. *Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, $x_0 \in A' \cup \{\pm\infty\}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

2) *Para cada sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ de puntos de $A - \{x_0\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ se verifica $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$*

Demostración. Basta adaptar a cada caso la demostración de la Proposición 3.7.1.

$\square$

3.8. Cálculo de límites

Proposición 3.8.1 (Operaciones algebraicas con límites). *Sean* $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *un punto de acumulación de* A, $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones. Se tiene:*

1) $\lim\limits_{x\to x_0} \big[f(x) + g(x)\big] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, *si estos últimos límites existen y su suma está definida en* $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

2) $\lim\limits_{x\to x_0} \big[\lambda f(x)\big] = \lambda\Big[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\Big]$, *si este último límite existe y su producto por* λ *está definido en* $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

3) $\lim\limits_{x\to x_0} \big[f(x)g(x)\big] = \Big[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\Big]\Big[\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\Big]$, *si estos últimos existen y su producto está definido en* $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

4) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, *si estos últimos límites existen y su cociente está definido en* $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Demostración. Basta aplicar la Proposición 3.7.2 y el resultado análogo para sucesiones. □

Proposición 3.8.2. *Si* $A \subset \mathbb{R}$, x_0 *punto de acumulación de* A *y* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función.*

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff \lim\limits_{x\to x_0} |f(x) - \ell| = 0$.

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|$.

   El recíproco solo es cierto, en general, cuando $\ell = 0$.

Demostración. Inmediata. □

3.9. Límites y desigualdades

Definición 3.9.1 (Función acotada). *Sea* f *una función definida en un conjunto* X *a valores reales. Se dice que* f *es* ***acotada*** *en* X *si existen* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tales que:*

$$\alpha \leq f(x) \leq \beta \quad \text{para cada} \quad x \in X,$$

o equivalentemente, si existe $M > 0$ *tal que:*

$$|f(x)| \leq M \quad \text{para cada} \quad x \in X.$$

Proposición 3.9.2. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto de acumulación de A y $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones. Supongamos que*

1) *La función f está acotada.*
2) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Entonces

$$\lim_{x \to x_0} \big[f(x)g(x)\big] = 0.$$

Demostración. Basta aplicar la Proposición 3.7.2 y el resultado análogo para sucesiones. □

Proposición 3.9.3. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$, $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ y $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \ < \ \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2,$$

entonces existe $\delta > 0$, tal que para todo $x \in A$, con $0 < |x - x_0| < \delta$ se tiene

$$f(x) < g(x).$$

Demostración. Sea $\varepsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{2}$, es claro que $\varepsilon > 0$. Tenemos

$$\ell_1 + \varepsilon = \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} = \ell_2 - \varepsilon.$$

Para este ε, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$, con $0 < |x - x_0| < \delta$ se tiene

$$\ell_1 - \varepsilon < f(x) < \ell_1 + \varepsilon \ \text{ y } \ \ell_2 - \varepsilon < g(x) < \ell_2 + \varepsilon$$

de donde

$$f(x) < \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} < g(x).$$

□

Corolario 3.9.4. *Si $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in A - \{x_0\}$ y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$ entonces*

$$\ell_1 \ \le \ \ell_2.$$

Observación 3.9.5. *En el corolario anterior, no se puede cambiar $\le$ por $<$.*

Proposición 3.9.6 (Regla del sandwich). *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A y $f, g, h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que:*

1) *Existe $r > 0$ de modo que*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

para todo $x \in \big((x_0 - r, x_0 + r) - \{x_0\}\big) \cap A$.

2) *Existen $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$.*

Entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existen δ_1 y δ_2 tales que

$$x \in \big((x_0 - r, x_0 + r) - \{x_0\}\big) \cap A \Longrightarrow \ell - \varepsilon < g(x), h(x) < \ell + \varepsilon$$

Tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, r\} > 0$ se obtiene

$$x \in \big((x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}\big) \cap A \Longrightarrow \ell - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon$$

$\square$

Corolario 3.9.7. *Si existe $r > 0$ tal que $0 \leq |f(x)| \leq g(x)$ para todo $x \in \big((x_0 - r, x_0 + r) - \{x_0\}\big) \cap A$, y $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.*

3.10. Propiedades locales del límite

Proposición 3.10.1. *Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, x_0 un punto de acumulación de A y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Supongamos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.*

1) *Existe $\delta > 0$ tal que f está acotada en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

2) *Si $\ell > 0$ entonces existen $\delta > 0$ y $c > 0$ tales que $0 < c < f(x)$ para todo $x \in \big(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}\big) \cap A$.*

3) *Si $\ell < 0$ entonces existen $\delta > 0$ y $c > 0$ tales que $f(x) < -c < 0$ para todo $x \in \big(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}\big) \cap A$.*

4) *Si $\ell \neq 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que el signo de f es constante e igual al signo de ℓ en el conjunto $\big(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}\big) \cap A$.*

Demostración.

1) Hay que probar que existen $\delta > 0$ y $M > 0$ tales que
$$|f(x)| \leq M \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A.$$
Por la definición del límite existe $\delta > 0$ tal que
$$|f(x) - l| < 1 \quad \forall\, x \in \big(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}\big) \cap A.$$
Por tanto, si $x \in \big(x_0 - \delta, x_0 - \delta) - \{x_0\}\big) \cap A$ entonces
$$|f(x)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|.$$
Tomando
$$M = \max\big\{1 + |\ell|, 1 + |f(x_0)|\big\} > 0,$$
Se obtiene por tanto la acotación deseada.

2) De la definición de límite aplicada a $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ se deduce la existencia de $\delta > 0$ tal que
$$-\frac{\ell}{2} < f(x) - l < \frac{\ell}{2} \quad \forall\, x \in \big(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}\big) \cap A.$$
El resultado se cumple por tanto tomando este $\delta > 0$ y $c = \frac{\ell}{2} > 0$.

3) Aplicando el apartado anterior a $-f$ se demuestra que existen $\delta > 0$ y $c > 0$ tales que
$$0 < c < -f(x) \quad \forall\, x \in \big(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}\big) \cap A.$$
Por tanto
$$f(x) < -c < 0 \quad \forall\, x \in \big(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}\big) \cap A.$$

4) Análogamente a los apartados 1) y 2).

$\square$

3.11. Límite de la función compuesta

Proposición 3.11.1. *Sean A, B subconjuntos de $\mathbb{R}$, x_0 un punto de acumulación de A, y_0 un punto de acumulación de B, $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \quad \lim_{y \to y_0} g(y) = \ell \in \mathbb{R}.$$
Si $y_0 \notin f(A)$, entonces
$$\lim_{x \to x_0} g\big[f(x)\big] = \ell.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = \ell$, existe $\delta > 0$ tal que, cuando

$$y \in \big(y_0 - \delta, y_0 - \delta) - \{y_0\}\big) \cap B,$$

entonces

$$|g(y) - \ell| < \varepsilon.$$

Para el δ anterior dado, como $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, existe $\mu > 0$ tal que, cuando

$$x \in \big(x_0 - \mu, x_0 + \mu) - \{x_0\}\big) \cap A,$$

entonces

$$|f(x) - y_0| < \delta.$$

Por otra parte, como $y_0 \notin f(A)$ y $f(A) \subset B$, se tiene

$$f(x) \in \big(y_0 - \delta, y_0 + \delta) - \{y_0\}\big) \cap B.$$

Finalmente, para

$$x \in \big(x_0 - \mu, x_0 + \mu) - \{x_0\}\big) \cap A,$$

se tiene

$$\big|g\big[f(x)\big] - \ell\big| < \varepsilon.$$

$\square$

Observaciones 3.11.2.

1) *La hipótesis $y_0 \notin f(A)$ es suficiente, pero no es necesaria para que se verifique la tesis.*

2) *El resultado también es cierto, por ejemplo, si f es una función inyectiva o que $y_0 \in B$ y $g(y_0) = \ell$.*

3) *Sin añadir alguna condición como estas, no puede garantizarse la validez del resultado final.*

Ejemplo 3.11.3. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones definidas por:

$$f(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \qquad g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad y = 0. \end{cases}$$

Entonces $g\big[f(x)\big] = g(0) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y así

$$\lim_{x\to 0} g\big[f(x)\big] = 1.$$

En cambio,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \in f(\mathbb{R}) = \{0\}, \qquad \lim_{y\to 0} g(y) = 0.$$

Ejemplo 3.11.4. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{I}, \\ x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad y = 0. \end{cases}$$

Tenemos

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{Q}, \quad \lim_{y\to 0} g(y) = 0,$$

pero

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} - \{0\}, \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{I} \cup \{0\}, \end{cases}$$

no tiene límite en el punto $x_0 = 0$, ya que $g \circ f$ no tiende cerca de 0 hacia ningún número $\ell \in \mathbb{R}$. En efecto, no es posible hacer

$$|(g \circ f)(x) - \ell| < \frac{1}{5}$$

por mucho que se aproxima x a 0, porque en cualquier intervalo alrededor de 0 existen números $x \in \mathbb{R}$ con $(g \circ f)(x) = 0$ y también números $x \in \mathbb{R}$ con $(g \circ f)(x) = 1$, de modo que deberíamos tener al mismo tiempo

$$|0 - \ell| < \frac{1}{5} \quad \text{y} \quad |1 - \ell| < \frac{1}{5}.$$

3.12. Límites laterales

Definición 3.12.1. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$un punto de acumulación de A y $\ell \in \mathbb{R}$.*

1) *Se dice que ℓ es el* ***límite por la derecha de** f **en el punto*** x_0 *y se denota por:*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell,$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in A$ con

$$x_0 < x < x_0 + \delta,$$

se tiene que:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

2) *Se dice que ℓ es el* ***límite por la izquierda de** f **en el punto*** x_0 *y se denota por:*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell,$$

si para todo $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que, para todo* $x \in A$ *con*

$$x_0 - \delta < x < x_0,$$

se tiene que:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Ejemplo 3.12.2. Aunque $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$, no existe

$$\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x},$$

ya que la función $\sqrt{\cdot}$ no está definida en $(-\infty, 0)$.

Proposición 3.12.3. *Sean* $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in \mathbb{R}$ *de modo que* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$ *para algún* $\delta > 0$. *Sea* $\ell \in \mathbb{R}$. *Entonces,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell.$$

Demostración.

$\boxed{\Rightarrow}$ Inmediata.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $x \in A \cap (x_0, x_0 + \delta)$ se tiene

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

y para cada $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0)$ se tiene

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Luego si $x \in A \cap \big((x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}\big)$, entonces

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

$\square$

Ejemplo 3.12.4. Tomemos la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Esta función está definida para todo número real x excepto para $x_0 = 0$. Observemos que en realidad se trata de la función

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Por tanto, para cualquier número real c, $c \neq 0$, tenemos

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

En cambio, en el punto 0,

$$\lim_{x \to 0^-} = -1 \neq \lim_{x \to 0^+} = 1.$$

Así que la función f no tiene límite en el punto 0.

Definición 3.12.5. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A.*

1) *Se dice que $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ si para cada $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in A$ con*
$$x_0 < x < x_0 + \delta,$$
se tiene
$$f(x) > M.$$

2) *Se dice que $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ si para cada $N < 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in A$ con*
$$x_0 < x < x_0 + \delta,$$
se tiene
$$f(x) < N.$$

3) *Se dice que $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ si para cada $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in A$ con*
$$x_0 - \delta < x < x_0,$$
se tiene
$$f(x) > M.$$

4) *Se dice que $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ si para cada $N < 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in A$ con*
$$x_0 - \delta < x < x_0,$$
se tiene
$$f(x) < N.$$

Proposición 3.12.6. *Sean $A \subset \mathbb{R}, f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*

1) *Si* $x_0 \in \big[A \cap (-\infty, x_0)\big]'$, *entonces* f *tiene límite por la izquierda en* x_0 (*finito o infinito*) *y es*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup\big\{f(x) : \; x \in A \cap (-\infty, x_0)\big\},$$

(*entendiendo que si el conjunto no está acotado superiormente, su supremo es* $+\infty$).

2) *Si* $x_0 \in \big[A \cap (x_0, +\infty)\big]'$ *entonces* f *tiene límite por la derecha en* x_0 (*finito o infinito*) *y es*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf\big\{f(x) : \; x \in A \cap (x_0, +\infty)\big\},$$

(*entendiendo que si el conjunto no está acotado inferiormente, su ínfimo es* $-\infty$).

Demostración. Solo demostramos el apartado 1) y en el caso de que $x_0 \in \mathbb{R}$ y el conjunto $\{f(x) : \; x \in A \cap (-\infty, x_0)\}$ esté acotado. Los demás casos son similares.

Sea $\ell = \sup\{f(x) : \; x \in A \cap (-\infty, x_0)\}$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces, $\ell - \varepsilon$ no es una cota superior del conjunto $\{f(x) : \; x \in A \cap (-\infty, x_0)\}$. Así que existe algún $r \in A \cap (-\infty, x_0)$ tal que

$$\ell - \varepsilon < f(r).$$

Si ahora elegimos $\delta = x_0 - r$, todos los $x \in A$ tales que $0 < x_0 - x < \delta$ cumplen

$$r = x_0 - \delta < x,$$

luego

$$\ell - \varepsilon < f(r) \leq f(x) \leq \ell < \ell + \varepsilon,$$

es decir

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

□

Proposición 3.12.7. *Sean* $A \subset \mathbb{R}, f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *monótona decreciente,* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

1) *Si* $x_0 \in \big[A \cap (-\infty, x_0)\big]'$, *entonces* f *tiene límite por la izquierda en* x_0 (*finito o infinito*) *y es*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \inf\big\{f(x) : \; x \in A \cap (-\infty, x_0)\big\},$$

(*entendiendo que si el conjunto no está acotado inferiormente, su ínfimo es* $-\infty$).

2) *Si* $x_0 \in \big[A \cap (x_0, +\infty)\big]'$ *entonces* f *tiene límite por la derecha en* x_0 *(finito o infinito) y es*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \sup\big\{f(x) : \; x \in A \cap (x_0, +\infty)\big\},$$

(entendiendo que si el conjunto no está acotado superiormente, su supremo es $+\infty$*).*

Demostración. Análogo al anterior. $\square$

3.13. Funciones equivalentes en un punto

Definición 3.13.1. *Sean* A *un subconjunto no vacío de* $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *un punto de acumulación de* A, *y* f , g *dos funciones reales definidas en* A.

Se dice que f ***es equivalente a*** g ***en el punto*** x_0, *y escribimos*

$$f \sim_{x_0} g$$

si existe $\delta > 0$ *y una función* h *definida en*

$$A \cap \big((x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}\big)$$

tal que:

1) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} h(x) = 1,$
2) $f(x) = h(x)g(x)$ *para cada* $x \in A \cap \big((x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}\big).$

Proposición 3.13.2. *Sean* A *un subconjunto no vacío de* $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *un punto de acumulación de* A, *y* f , g, h, φ, ψ *funciones definidas de* A *en* $\mathbb{R}$. *Se verifica:*

1) *Si* $f \sim_{x_0} g$ *y* $g \sim_{x_0} h$, *entonces* $f \sim_{x_0} h$.
2) *Si* $f(x) \neq 0$ *y* $g(x) \neq 0$ *para cada* $x \in A$, *y* $f \sim_{x_0} g$, *entonces* $\frac{1}{f} \sim_{x_0} \frac{1}{g}$.
3) *Si* $g(x) \neq 0$ *para cada* $x \in A$ *y* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, *entonces* $f \sim_{x_0} g$.
4) *Si* $f \sim_{x_0} g$ *y* $\varphi \sim_{x_0} \psi$, *entonces* $\varphi f \sim_{x_0} \psi g$.
5) *Si* $f \sim_{x_0} g$, *entonces ambas funciones tienen el mismo comportamiento en el punto* x_0, *es decir, tienen límite o no en dicho punto simultáneamente. Además, si tienen límite, finito o infinito, dicho límite es el mismo.*

Demostración. Inmediata. $\square$

Observación 3.13.3. *No es cierto en general que si* $f \sim_{x_0} g$ *y* $\varphi \sim_{x_0} \psi$, *entonces* $f + \varphi \sim_{x_0} g + \psi$.

Ejemplo 3.13.4. Como $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ tenemos $\sin(x) \sim_0 x$ y trivialmente $-x \sim_0 -x$.

Si ahora sumamos obtenemos que

$$\sin(x) - x \sim_0 0$$

y esto es falso porque existiría un entorno del origen donde la función

$$\sin(x) - x$$

sería nula.

Definición 3.13.5. *Sea* A *un subconjunto de* $\mathbb{R}$ *no está acotada superiormente (respectivamente inferiormente) y* f *,* g*, funciones definidas de* A *en* $\mathbb{R}$.

Se dice que f *y* g *son equivalentes en* $+\infty$ *(respectivamente* $-\infty$*) si existe* $M > 0$ *y una función* h *tal que*

$$f(x) = h(x)g(x) \quad \textit{para todo} \quad x > M, \ (\textit{respectivamente } x < -M)$$

tal que

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = 1 \ (\textit{respectivamente} \ \lim_{x \to -\infty} h(x) = 1).$$

Utilizándose en estos casos las expresiones "$f \sim_{+\infty} g$*" o "*$f \sim_{-\infty} g$*".*

Ejemplos 3.13.6.

1) $\sin(x) \sim_0 x$,
2) $1 - \cos(x) \sim_0 \dfrac{x^2}{2}$,
3) $\operatorname{tg}(x) \sim_0 x$,
4) $\ln(1 + x) \sim_0 x$,
5) $e^x - 1 \sim_0 x$.

3.14. Condición de Cauchy para funciones

Proposición 3.14.1. *Sean* $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *un punto de acumulación de* A *y* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. *Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *existe*

2) ***Condición de Cauchy***: *para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x \in A$ *con* $0 < |x - x_0| < \delta$ *y* $0 < |y - x_0| < \delta$*, se tiene* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$*.*

3) *Para cada sucesión* $(x_n)_{n\geq 1}$ *de puntos de* $A - \{x_0\}$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ *se verifica que la sucesión* $\big(f(x_n)\big)_{n\geq 1}$ *es de Cauchy.*

Demostración.

$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Sea $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que, para $x, y \in A$, con $0 < |x - x_0| < \delta$ y $0 < |y - x_0| < \delta$, se tiene

$$|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \;\text{ y }\; |f(y) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ Es una comprobación sencilla.

$\boxed{3) \Rightarrow 1)}$ Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números en $A - \{x_0\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Como la sucesión $\big(f(x_n)\big)_{n\geq 1}$ es de Cauchy tendrá un límite ℓ, posiblemente distinto para cada sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$.
Según la caracterización del límite mediante sucesiones (Proposición 3.7.1), para completar la demostración será suficiente que probemos que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

es el mismo para todas las sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}$.
Sean, $(y_n)_{n\geq 1}$, $(z_n)_{n\geq 1}$ sucesiones de puntos de $A - \{x_0\}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = x_0,$$

y sean

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \ell_1, \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \ell_2.$$

La sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ definida por

$$x_{2n-1} = y_n, \quad x_{2n} = z_n$$

es una sucesión de puntos de $A - \{x_0\}$ con

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Luego $\big(f(x_n)\big)_{n\geq 1}$ será una sucesión convergente. Si ℓ es su límite, como $\big(f(y_n)\big)_{n\geq 1}$, $\big(f(z_n)\big)_{n\geq 1}$ son subsucesiones suyas, debe cumplirse

$$\ell_1 = \ell_2 = \ell.$$

□

3.15. Límites de restricciones

Definición 3.15.1. *Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Sea $B \subset A$. La función f* ***restringida a*** *B, es la función que denotamos por $f|_B$, y definida por:*

$$\begin{array}{rll} f|_B : & B & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & b & \longrightarrow f|_B(b) = f(b). \end{array}$$

Si $x_0 \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de B, y existe

$$\lim_{x\to x_0} f|_B(x),$$

entonces, este límite, se denomina ***límite de*** *$f(x)$* ***cuando*** *x* ***tiende a*** *x_0* ***a través de*** *B, y se denota por:*

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in B}} f(x).$$

Análogamente se definen los límites a través de subconjuntos B en $+\infty$ o $-\infty$; en este caso se requiere, por supuesto, que el conjunto B no esté acotada superiormente o inferiormente, según corresponda.

Proposición 3.15.2. *Sean $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto de acumulación de A, $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Se cumple:*

1) *Si $B \subset A$ y $x_0 \in B'$, entonces*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f|_B(x) = \ell.$$

El recíproco, en general, no es cierto.

2) *Si B es un conjunto abierto y $x_0 \in B$, entonces*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} f|_B(x) = \ell.$$

Demostración. Fácil. □

3.16. Funciones continuas

Definición 3.16.1. *Sean A un subconjunto no vació de $\mathbb{R}$, $x_0 \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función.*

- *Se dice que f es* ***continua en el punto*** *x_0 si se verifica la siguiente propiedad:*

  Para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (que depende de ε) tal que, si:

  $$x \in A \ \ y \ \ |x - x_0| < \delta \qquad \big[\text{equivalentemente, } \ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A\big],$$

  entonces:

  $$|f(x) - f(x_0)| < \delta \qquad \big[\text{equivalentemente, } \ f(x) \in \big(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon\big)\big].$$

- *Se dice que f es* ***continua en*** *A si es continua en cada punto de A.*

Proposición 3.16.2. *Sean A un subconjunto no vació de $\mathbb{R}$, $x_0 \in A$ un punto de acumulación de A y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Son equivalentes:*

1) *f es continua en x_0.*

2) *Existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y es precisamente $f(x_0)$, es decir:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Demostración. Inmediata. $\square$

Observación 3.16.3. *Para que f sea continua en x_0 se tiene que cumplir las tres condiciones siguientes:*

1) *Que f esté definida en x_0, es decir $x_0 \in \mathfrak{D}(f)$.*

2) *Que exista $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y que sea finito. Obsérvese que x_0 ha de ser punto de acumulación de $\mathfrak{D}(f)$, pues en caso contrario no tendría sentido considerar el correspondiente límite.*

3) *Que el límite anterior sea $f(x_0)$: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Si alguna de las condiciones anteriores falla entonces f es ***discontinua*** *en x_0.*

Proposición 3.16.4. *Sean A un subconjunto no vació de $\mathbb{R}$, $x_0 \in A$ un punto aislado de A y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces f es continua en x_0.*

Demostración. Como x_0 es un punto aislado de A, existe $\delta > 0$ tal que

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A = \{x_0\},$$

para $\varepsilon > 0$ tomamos ese δ, y se tiene

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \Longrightarrow x = x_0,$$

luego

$$|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon.$$

□

Ejemplo 3.16.5. Toda función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ o $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en cada punto $n \in \mathbb{N}$ o $n \in \mathbb{Z}$, respectivamente.

Ejemplo 3.16.6. La función de Dirichlet,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

no es continua en ningún punto.

Proposición 3.16.7. *Sean A un subconjunto no vació de $\mathbb{R}$, $x_0 \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Son equivalentes:*

1) *f es continua en x_0.*

2) *Para cada sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ de elementos de A, con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Demostración. Análoga a la de la Proposición 3.7.2. □

Proposición 3.16.8. *Sean A un subconjunto no vació de $\mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $\alpha \in \mathbb{R}$, y $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en el punto x_0. Se verifica que:*

1) *$f + g$ es continua en x_0.*

2) *fg es continua en x_0.*

3) *αf es continua en x_0.*

4) *Si $g(x_0) \neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ es continua en x_0.*

Demostración. Inmediata. □

3.17. Continuidad de la función compuesta

Proposición 3.17.1. *Sean $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A) \subset B$. Si f es continua en el punto $x_0 \in A$ y g es continua en el punto $f(x_0) \in B$, entonces la función compuesta $g \circ f$ es continua en x_0.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como g es continua en el punto $f(x_0)$, entonces existe $\gamma > 0$ tal que para todo $y \in B$ con $|y - f(x_0)| < \gamma$, se tiene

$$|g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon.$$

Ahora, como f es continua en x_0, entones existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $|x - x_0| < \delta$, se tiene

$$|f(x) - f(x_0)| < \gamma.$$

Sea $x \in A$ con $|x - x_0| < \delta$, entonces $f(x) \in B$ y

$$|f(x) - f(x_0)| < \gamma,$$

luego

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon.$$

□

Corolario 3.17.2. *Sean $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones y $x_0 \in A'$. Supongamos que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b \in \mathbb{R}$, y que g es continua en $b \in B$. Entonces, existe*

$$\lim_{x \to x_0} g\big[f(x)\big] = g\Big[\lim_{x \to x_0} f(x)\Big].$$

Demostración. Basta aplicar la Proposición anterior a las funciones g y $\tilde{f} : A \cup \{x_0\} \longrightarrow B$ definida por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A,\ x \neq x_0, \\ b & \text{si} \quad x = x_0. \end{cases}$$

□

Observación 3.17.3. *Si la función g no es continua en el valor del límite de f, este corolario no es cierto en general.*

Ejemplo 3.17.4. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones definidas por:

$$f(x) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \qquad g(y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad y = 0. \end{cases}$$

Entonces

$$\lim_{x \to x_0} g\big[f(x)\big] = 1 \neq 0 = g(0) = g\Big[\lim_{x \to x_0} f(x)\Big].$$

En este caso el problema está en que, aunque g sí tiene límite en 0, su valor no coincide con el que toma g en 0.

3.18. Continuidad en intervalos

Definición 3.18.1. *Una función $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es* ***continua por la derecha en*** *$x_0 \in A$ si*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Análogamente, diremos que f es ***continua por la izquierda en*** *$x_0 \in A$ si*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Ejemplo 3.18.2. La función $x \longmapsto \sqrt{x}$ es continua por la derecha pero no por la izquierda en 0. ya que no existe

$$\lim_{x \to 0^-} \sqrt{x}.$$

Ejemplo 3.18.3. La función $x \longmapsto [x]$ es continua por la derecha, pero no por la izquierda, en todos los puntos de $\mathbb{Z}$.

Proposición 3.18.4. *Si $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en A y $B \subset A$, entonces la función $f|_B$ es también continua en B.*

Demostración. Sea $x_0 \in B$. Si x_0 es un punto aislado de A, la prueba es inmediata. Por otra parte, si $x_0 \in A'$, el resultado se deduce del correspondiente definición del límite.

$\square$

Observación 3.18.5. *El recíproco no es cierto en general, es decir, puede ocurrir perfectamente que $f|_B$ sea continua sin que ello implique que f es continua en B.*

Ejemplo 3.18.6. Sea

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$$

con $B = \{0\}$, la función

$$\begin{array}{rcl} f|_B: & \{0\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & 0 & \longrightarrow f|_B(0) = f(0) = 0 \end{array}$$

es continua en $B = \{0\}$ ya que

$$\lim_{x \to 0} f|_B(x) = \lim_{x \to 0} f(0) = 0 = f|_B(0),$$

mientras la función f no es continua en $B = \{0\}$ ya que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0).$$

Definición 3.18.7. *Una función $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b] \subset A$, si f es continua en x para todo $x \in (a, b)$, es continua por la derecha en a y es continua por la izquierda en b.*

Equivalentemente, f es continua en $[a, b]$ si $f|_{[a,b]}$, la restricción de f al intervalo $[a, b]$, es continua en x para todo $x \in [a, b]$.

Ejemplo 3.18.8. La función parte entera es continua en los intervalos $[0, \frac{1}{2}]$ y $[0, 1)$, y no lo es en el intervalo $[0, 1]$ (al no ser continua por la izquierda en 1).

Ejemplo 3.18.9. La función

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$$

no es continua en $[-1, 1]$, ya que no es continua en 0.

3.19. Teoremas fundamentales

Proposición 3.19.1 (Conservación del signo). *Si $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en x_0 y $f(x_0) > 0$, entonces existen $\delta > 0$ y $\alpha > 0$ tales que*

$$f(x) > \alpha > 0, \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A.$$

Un resultado análogo es válido si $f(x_0) < 0$.

Demostración. Inmediata por la Proposición 3.10.1. □

Observación 3.19.2. *Este resultado es válido también cuando f es continua por la derecha ó por la izquierda en x_0 y $f(x_0) \neq 0$.*

Por ejemplo, si f es continua por la derecha en x_0 y $f(x_0) > 0$ entonces existen $\delta > 0$ y $\alpha > 0$ tales que

$$f(x) > \alpha > 0, \quad \forall\, x \in \mathfrak{D}(f) \cap [x_0, x_0 + \delta).$$

3.19.1. Teorema de Bolzano

Teorema 3.19.3 (Bolzano). *Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = 0$.*

Demostración. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. Definimos el conjunto A mediante

$$A = \{t \in [a, b] : f(t) < 0\}.$$

Como $f(a) < 0$, entonces $a \in A$, luego $A \neq \emptyset$. Además, por construcción de A, tenemos

$$\forall\, t \in A, \quad t \leq b.$$

Por el axioma del supremo, existe $x_0 = \sup A$. Probaremos a continuación que

$$f(x_0) = 0.$$

En primer lugar, es fácil ver que $x_0 \in (a, b)$. En efecto, como $f(a) < 0$ y f es continua por la derecha en a, entonces por la proposición de conservación del signo, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) < 0, \quad \forall\, x \in [a, a+\delta).$$

Puesto que $a + \frac{\delta}{2} \in [a, a+\delta)$, entonces $f\big(a + \frac{\delta}{2}\big) < 0$, es decir, $a + \frac{\delta}{2} \in A$, por tanto

$$x_0 = \sup A \geq a + \frac{\delta}{2} > a.$$

Análogamente, al ser f continua por la izquierda en b y $f(b) > 0$, f es positiva un intervalo de la forma $(b-\delta, b]$ con $\delta > 0$. Como $b - \frac{\delta}{2} \in (b - \delta, b]$, entonces

$$f\Big(b - \frac{\delta}{2}\Big) > 0,$$

es decir,

$$b - \frac{\delta}{2} \notin A.$$

Por tanto

$$x_0 = \sup A \leq b - \frac{\delta}{2} < b.$$

Probemos ahora que $f(x_0) = 0$, eliminando las posibilidades $f(x_0) < 0$ y $f(x_0) > 0$.

Supongamos que $f(x_0) < 0$. Según la Proposición 3.19.1, existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(t) < 0, \quad \forall\, t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Entonces los puntos del intervalo $(x_0, x_0 + \delta)$ estarán todos en A, y por tanto x_0 no será una cota superior de A.

Supongamos, que $f(x_0) > 0$. Entonces por la Proposición 3.19.1 existe $\delta > 0$ tal que

$$f(t) > 0, \quad \forall\, t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Por otra parte tenemos,

$$\forall\, t \in A, \quad t \leq x_0 - \delta.$$

En efecto: supongamos que existe $t_0 \in A$ tal que $t_0 > x_0 - \delta$, entonces como $x_0 = \sup A$ se tiene que

$$x_0 - \delta < t_0 \leq x_0$$

esto implica que

$$f(t_0) < 0 \quad \text{y} \quad f(t_0) > 0,$$

lo cual es imposible. Por tanto

$$\forall\, t \in A, \quad t \leq x_0 - \delta.$$

Esto significa que $x_0 - \delta$ es una cota superior de A. Pero

$$x_0 - \delta < x_0 \quad \text{y} \quad x_0 = \sup A.$$

De este modo la suposición $f(x_0) > 0$ lleva también a una contradicción. La única posibilidad es por tanto que $f(x_0) = 0$. □

Observación 3.19.4. *El resultado es falso en general si f deja de ser continua incluso en un sólo punto de $[a, b]$.*

Ejemplo 3.19.5. La función escalón

$$\begin{array}{rccl} f: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

continua en $[-1, 1] - \{0\}$.

3.19.2. Teorema de los valores intermedios

Teorema 3.19.6 (Teorema de los valores intermedios o de Darboux). *Si $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $f(a) < \alpha < f(b)$, entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que*

$$f(x_0) = \alpha.$$

Un resultado análogo es válido si $f(b) < \alpha < f(a)$.

Demostración. 1) Dividimos $[a, b]$ en dos intervalos cuyo extremo común es el punto medio $\frac{a+b}{2}$.

Si $f(\frac{a+b}{2}) = \alpha$, ya se ha encontrado el $x_0 = \frac{a+b}{2}$ buscado.

Si no, para alguno de los dos intervalos, que designamos $[a_1, b_1]$, sucede que α es intermedio entre $f(a_1)$ y $f(b_1)$.

Continuando el proceso se obtienen dos sucesiones monótonas $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(b_n)_{n \geq 1}$ convergentes ambas a un número $x_0 \in [a, b]$.

Como f es continua en x_0, entonces las dos sucesiones $\big(f(a_n)\big)_{n\geq 1}$ y $\big(f(b_n)\big)_{n\geq 1}$ convergen a $f(x_0)$.

Por otra parte, al ser α intermedio entre $f(a_n)$ y $f(b_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f(x_0) = \alpha$ con lo que, además, $x_0 \neq a, b$. □

Demostración. 2) Basta aplicar el Teorema de Bolzano a $g = f - \alpha$, que sigue siendo continua en $[a, b]$ y cumple $g(a) = f(a) - \alpha < 0$, $g(b) = f(b) - \alpha > 0$. Existe entonces $x_0 \in (a, b)$ tal que $g(x_0) = f(x_0) - \alpha = 0$. Para probar la segunda afirmación, basta aplicar lo anterior a la función $-f$. □

3.19.3. Teorema de acotación

Teorema 3.19.7. *Si $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces f está acotada en $[a, b]$.*

Demostración. Supongamos que f no está acotada, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un punto $x_n \in [a, b]$ tal que $|f(x_n)| > n$. En particular,

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = +\infty.$$

Como la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ está acotada, así que, por el Teorema 2.6.1 de Bolzano-Weierstrass, hay alguna subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ suya que converge, es decir, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0.$$

Por otra parte tenemos

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = +\infty,$$

por ser una subsucesión de $\big(|f(x_n)|\big)_{n\geq 1}$. Entonces, la función f no es continua en x_0, ya que si lo fuera debería ser

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = |f(x_0)|.$$

Pero esto contradice el hecho de que f es continua en $[a, b]$. □

Observación 3.19.8. *Si hay un sólo punto de $[a, b]$ en que f sea discontinua, entones el resultado anterior es falso.*

Ejemplo 3.19.9. La función

$$\begin{array}{rccl} f: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$$

continua en $[-1, 1] - \{0\}$.

Observación 3.19.10. *Es fundamental que el intervalo en que f es continua sea compacto, es decir cerrado y acotado a la vez. Por ejemplo, la función anterior es continua pero no está acotada en el intervalo acotado* $(0, 1)$.

3.19.4. Teoremas de Weierstrass

Proposición 3.19.11. *Sea $f : K \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Supongamos que K es compacto, entonces $f(K)$ es compacto.*

Demostración. Sea $(y_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $f(K)$, es decir, para cada $n \geq 1$, $y_n \in f(K)$, luego existen $x_n \in K$ tales que $y_n = f(x_n)$. Como K es compacto, la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ de elementos de K, posee una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ convergente, luego $y_{n_k} = f(x_{n_k})$ forma una subsucesión de $(y_n)_{n\geq 1}$. □

Teorema 3.19.12 (Weierstrass). *Sea f una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que*

$$\min_{y\in[a,b]} f(y) = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = \max_{y\in[a,b]} f(y)$$

para todo x en $[a, b]$.

Demostración. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Por el Teorema 3.19.7 sabemos que está acotada. Por tanto el conjunto

$$A = \{f(x) : x \in [a, b]\}$$

tiene supremo e ínfimo en $\mathbb{R}$. Sean

$$\alpha = \sup A \in \mathbb{R}, \quad \beta = \inf A \in \mathbb{R}.$$

Se trata de probar que ese supremo y ese ínfimo se alcanzan, es decir, que existen ciertos $x_2, x_1 \in [a, b]$ tales que

$$f(x_1) = \alpha, \quad f(x_2) = \beta.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, el número $\beta - \frac{1}{n}$ no es una cota superior de f , de modo que podemos elegir algún $x_n \in [a, b]$ tal que

$$\beta - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \beta.$$

En particular,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \beta.$$

Como la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ está acotada, tendrá alguna subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ convergente hacia $x_1 \in [a,b]$, es decir,

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_1.$$

Como la función f es continua en todos los puntos de $[a,b]$ y $\Big(f(x_{n_k})\Big)_{k\geq 1}$ es una subsucesión de $\big(f(x_n)\big)_{n\geq 1}$, entonces

$$f(x_1) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \beta.$$

De manera análoga se demuestra que existe algún punto $x_2 \in [a,b]$ tal que

$$f(x_2) = \alpha.$$

□

Observación 3.19.13. *El teorema anterior puede fallar si f es discontinua en algún punto de $[a,b]$ o si f es continua en un intervalo no compacto. Por ejemplo, la función $x \longmapsto \frac{1}{x}$ es continua y acotada en el intervalo cerrado $[1,+\infty)$. Sin embargo, f no alcanza su mínimo en dicho intervalo.*

3.20. Funciones monótonas y continuidad

Proposición 3.20.1. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces $f(I)$ es un intervalo.*

Demostración. Sean

$$\alpha = \inf_{x\in I} f(x), \qquad \beta = \sup_{x\in I} f(x)$$

(α puede ser $-\infty$ si f no está acotada inferiormente y β puede ser $+\infty$ si f no está acotada superiormente).

Sea $y \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha < y < \beta$. Lo que debemos probar es que existe $x \in I$ tal que

$$f(x) = y.$$

En efecto, por las definiciones de supremo e ínfimo si la función está acotada o por la definición de conjunto no acotado si uno de los extremos es $-\infty$ o $+\infty$ o ambos casos, existen $a, b \in I$, tales que

$$f(a) < y < f(b),$$

y por el Teorema de los valores intermedios existe x entre a y b, tal que

$$f(x) = y.$$

□

Proposición 3.20.2. *Si* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función estrictamente monótona en un intervalo* I*, entonces* f *es continua en* I *si y sólo si* $f(I)$ *es un intervalo.*

Demostración. Por el teorema anterior, basta probar que si f es (por ejemplo) estrictamente creciente y $f(I)$ es un intervalo, entonces f es continua en I (en el otro caso, se sigue de forma análoga). Sea $x_0 \in I$, entonces

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup \big\{ f(x) : \ x \in I, \, x < x_0 \big\} \leq f(x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf \big\{ f(x) : \ x \in I, \, x > x_0 \big\} \geq f(x_0)$$

(esto, en caso de que x_0 no sea uno de los extremos del intervalo; si lo es, la demostración se reduce a tomar el único límite lateral que tenga sentido).

Se trata de probar que las dos desigualdades son igualdades. Supongamos que, por ejemplo,

$$\sup \big\{ f(x) : \ x \in I, \, x < x_0 \big\} < f(x_0),$$

(para la otra desigualdad se procede de manera similar). Elijamos cualquier λ tal que

$$\sup \big\{ f(x) : \ x \in I, \, x < x_0 \big\} < \lambda < f(x_0).$$

Entonces,

$$f(x) < \lambda, \quad \forall\, x \in I, \, x < x_0.$$

Por otra parte, si $x \in I$, pero $x \geq x_0$, resulta que

$$\lambda < f(x_0) \leq f(x).$$

Así que

$$f(x) \neq \lambda, \quad \text{para todo} \ \ x \in I.$$

Luego

$$\lambda \notin f(I).$$

Sin embargo, tomando cualquier $x \in I$ tal que $x < x_0$, se tiene

$$f(x) < \lambda < f(x_0), \quad \text{donde} \quad f(x), \ f(x_0) \in f(I).$$

Por lo tanto, $f(I)$ no es un intervalo, lo que contradice las hipótesis. □

Proposición 3.20.3. *Si* $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua en* I*, entonces* f *es inyectiva en* I *si y sólo si* f *es estrictamente monótona en* I*.*

Demostración. Basta probar que si f es continua e inyectiva en el intervalo I entonces f es estrictamente monótona en I.

Supongamos que no lo fuera; entonces (al ser f inyectiva) existirían tres puntos $x_0 < y_0 < z_0$ en el intervalo I tales que

$$f(x_0) < f(y_0) \quad \text{y} \quad f(y_0) > f(z_0),$$

o

$$f(x_0) > f(y_0) \quad \text{y} \quad f(y_0) < f(z_0).$$

Veamos, por ejemplo, que no se puede dar la primera de estas dos posibilidades (la segunda se trata exactamente igual, ó simplemente se aplica lo que veremos a continuación a la función $-f$).

En efecto, $[x_0, y_0] \subset I$ e $[y_0, z_0] \subset I$ al ser I un intervalo, y al ser f continua en I también lo será en $[x_0, y_0]$ y en $[y_0, z_0]$.

Si $f(z_0) > f(x_0)$, entonces $f(z_0) \in \big(f(x_0), f(y_0)\big)$. Aplicando el teorema de los valores intermedios a f en el intervalo $[x_0, y_0]$, deducimos que existe $t_0 \in (x_0, y_0)$ tal que

$$f(t_0) = f(z_0).$$

Pero esto contradice claramente la inyectividad de f en I, ya que

$$t_0 < y_0 < z_0 \quad \text{implica que} \quad t_0 \neq z_0.$$

Análogamente, si $f(z_0) < f(x_0)$ entonces $f(x_0) \in \big(f(z_0), f(y_0)\big)$. El teorema de los valores intermedios aplicado a f en el intervalo $[y_0, z_0]$ proporciona la existencia de $s_0 \in (y_0, z_0)$ tal que

$$f(s_0) = f(x_0).$$

Esto es, de nuevo, contradictorio, ya que

$$x_0 < y_0 < s_0 \quad \text{implica que} \quad x_0 \neq s_0.$$

□

Teorema 3.20.4 (Continuidad de la función inversa). *Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$. Si $f : I \longrightarrow f(I)$ es inyectiva y continua en I, entonces $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ es continua en $f(I)$.*

Demostración. Por la Proposición 3.20.1, se tiene que, $f(I)$ es un intervalo. Por la proposición anterior, f es estrictamente monótona. Como f inyectiva entonces $f : I \longrightarrow f(I)$ es biyectiva, y por tanto existe

$$f^{-1} : f(I) \longrightarrow I.$$

Por tanto, f^{-1} es una función estrictamente monótona en el intervalo $f(I)$, y

$$f^{-1}\big(f(I)\big) = I$$

es un intervalo. Por la Proposición 3.20.3, f^{-1} es continua en $f(I)$. □

3.21. Clasificación de discontinuidades

Definición 3.21.1. *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$.*

1) *Se dice que f tiene en $x_0 \in A$ una* ***discontinuidad evitable*** *si existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ pero o bien el límite no coincide con $f(x_0)$, o bien $x_0 \notin A$.*

2) *Se dice que f tiene en $x_0 \in A$ una* ***discontinuidad de salto*** *si existen $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \in \mathbb{R}$ y $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \in \mathbb{R}$ pero son distintos.*

3) *Se dice que f tiene una* ***discontinuidad en*** $x_0 \in A$ ***de primera especie*** *si tiene una discontinuidad evitable o de salto en $x_0 \in A$.*

4) *Se dice que f tiene una* ***discontinuidad en*** $x_0 \in A$ ***de segunda especia*** *si tiene una discontinuidad y no es de primera especie.*

Observación 3.21.2. *En el caso de la discontinuidad evitable, se puede prolongar f por continuidad a otra función g continua en el punto x_0, definida de la forma siguiente:*

$$\begin{array}{rcl} g: \; A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{lll} f(x) & si & x \in A - \{x_0\} \\ \\ \lim\limits_{t \to x_0} f(t) & si & x = x_0. \end{array} \right. \end{array}$$

Ejemplos 3.21.3.

1) La función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} & x \neq 0 \\ 0 & \text{si} & x = 0 \end{array} \right.$$

una discontinuidad evitable en $x = 0$.

2) La función $f(x) = [x]$ tiene discontinuidades de salto en todo $\mathbb{Z}$.

3) La función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} & x \neq 0 \\ 0 & \text{si} & x = 0 \end{array} \right.$$

tiene una discontinuidad de segunda especie en $x = 0$.

4) La función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

tiene discontinuidades de segunda especie en todos los puntos.

Proposición 3.21.4. *Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona. Si $x_0 \in (a, b)$, entonces o bien f es continua en x_0 o bien f tiene en x_0 una discontinuidad de salto.*

Demostración. Supongamos que f es creciente, la demostración en el caso decreciente es similar.

Supongamos que f no es continua en $x_0 \in (a, b)$. Por la Proposición 3.12.6 se tiene que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup \left\{ f(x) : \ x \in (a, x_0) \right\} \in \mathbb{R},$$

y

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf \left\{ f(x) : \ x \in (x_0, b) \right\} \in \mathbb{R}.$$

Como f no es continua en x_0 entonces

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Por tanto f tiene en x_0 una discontinuidad de salto. $\square$

Teorema 3.21.5. *Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona. Entonces f es continua excepto en una cantidad numerable de puntos.*

Demostración. Supongamos que f es creciente, la demostración en el caso decreciente es similar.

Por la proposición anterior sabemos que las discontinuidades de f sólo pueden ser del primer tipo.

Sea D el conjunto de discontinuidades de f:

$$D = \left\{ x \in (a, b) : \ \lim_{t \to x^-} f(t) < \lim_{t \to x^+} f(t) \right\}.$$

Para $x \in D$ sea $I_x = \left(\lim_{t \to x^-} f(t), \ \lim_{t \to x^+} f(t) \right)$ y por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ tomamos $q_x \in I_x \cap \mathbb{Q}$. El conjunto

$$\{q_x : x \in D\}$$

es un subconjunto de $\mathbb{Q}$ y por lo tanto es numerable. $\square$

3.22. Continuidad uniforme

Definición 3.22.1. *Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y f una función real definida en A. Se dice que f es **uniformemente continua** en A si*

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0 \ (\textit{que sólo depende de } \varepsilon) \ \textit{tal que:}$$
$$\textit{si} \ \ x, y \in A \ \ \textit{con} \ \ |x-y| < \delta \ \ \textit{entonces} \ \ \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon.$$

Ejemplo 3.22.2. La función

$$\begin{array}{rccc} f: & (0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \frac{1}{x} \end{array}$$

es continua, pero no uniformemente continua. En efecto, si tomemos

$$x = \frac{1}{n}, \quad y = \frac{1}{n+1}$$

para un entero grande n, entonces

$$|x-y| < \frac{2}{n},$$

pero

$$|f(x) - f(y)| = 1.$$

Ejemplo 3.22.3. La función

$$\begin{array}{rccc} f: & [1,+\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \frac{1}{x} \end{array}$$

es uniformemente continua. En efecto, tenemos

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|y-x|}{xy} < |x-y|.$$

Si

$$|x-y| < \varepsilon = \delta,$$

entonces

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Ejemplo 3.22.4. La función

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & x^2 \end{array}$$

no es uniformemente continua. En efecto:

Supongamos que f es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, $|h| < \delta$, $(h = y - x)$

$$|(x+h)^2 - x^2| = |2xh + h^2| < \varepsilon,$$

cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$.

Considerando un $x_0 > 0$ y $h > 0$ tendremos:

$$|2x_0h + h^2| > 2x_0h.$$

Si tomamos

$$h = \frac{\delta}{2} \quad \text{y} \quad x_0 > \frac{\varepsilon}{\delta}$$

resulta

$$|(x_0+h)^2 - x_0^2| > 2x_0h > \varepsilon$$

con lo que llegamos a una contradicción.

Observación 3.22.5. *La diferencia entre continuidad y continuidad uniforme consiste en que en la primera, dado un $\varepsilon > 0$ y un punto x_0, se exige la existencia del $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ correspondiente, que dependerá del ε elegido y del punto x_0 de que se trate; mientras que la continuidad uniforme exige que dado un $\varepsilon > 0$ encontremos el $\delta = \delta(\varepsilon)$ correspondiente, que dependerá solamente de ε, válido para todos los puntos del conjunto A.*

Proposición 3.22.6. *Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real definida en A. Si f es uniformemente continua en A, entonces f es continua en A.*

Demostración. Inmediata. $\square$

Observación 3.22.7. *El recíproco de la proposición anterior no es cierto.*

Nota 3.22.8. *Por comodidad, diremos a veces que una función es uniformemente continua en un subconjunto de su dominio en lugar de decir que la restricción de la función a dicho subconjunto es uniformemente continua. Así, en los ejemplos anteriores, la función*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \frac{1}{x} \end{array}$$

es uniformemente continua en $[1, +\infty)$, pero no es uniformemente continua en $(0, 1]$.

Observación 3.22.9. *Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua en $A \subset \mathbb{R}$, entonces $f|_A : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua (lo cual, nótese bien, no quiere decir que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sea continua en A, como ya sabemos, Observación* 3.18.5).

Proposición 3.22.10. *Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real definida en A. Son equivalentes:*

1) *f es uniformemente en A*

2) *Para cada par de sucesiones $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1} \subset A$ con*
$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$$
se tiene que
$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0.$$

Demostración.

$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Como f es uniformemente continua en A, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $x, y \in A$, con $|x - y| < \delta$ se tiene
$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
Sean $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1} \subset A$ tales que
$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0.$$
Para este $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ se tiene
$$|x_n - y_n| < \delta,$$
luego
$$|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon,$$
es decir,
$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0.$$

$\boxed{2) \Rightarrow 1)}$ Supongamos que f no es uniformemente continua en A, entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta = \frac{1}{n}$ (n natural) existen x_n, y_n puntos en A tales que
$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{pero} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$
Entonces
$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0,$$
pero
$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| \neq 0.$$
Esto contradice la afirmación 2).

□

Nota 3.22.11. *El resultado anterior resulta especialmente indicado en la práctica para ver que una determinada función no es uniformemente continua: basta encontrar dos sucesiones tales que la distancia entre sus términos tiende a cero pero la distancia entre los términos de sus sucesiones imágenes no tiende a cero.*

Teorema 3.22.12 (Heine). *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Si f es una función continua en K, entonces f es uniformemente continua en K.*

Demostración. Sea $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$, supongamos que no es uniformemente continua en K y probemos que entonces hay algún punto de K donde f no es continua.

Como f no es uniformemente continua, existe algún $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$ hay al menos un par de puntos $x, y \in K$ (que dependerán de δ) para los cuales

$$|x - y| < \delta, \quad \text{pero} \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0.$$

Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un par de puntos $x_n, y_n \in K$ tales que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \quad \text{pero} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

En particular

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0.$$

Dado que la sucesión $(y_n)_{n\geq 1}$ está acotada, por el Teorema 2.6.1 de Bolzano-Weierstrass hay alguna subsucesión suya convergente:

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0 \in K.$$

Por otra parte, y dado que

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0,$$

también

$$\lim_{k\to\infty} |x_{n_k} - y_{n_k}| = 0.$$

Por lo tanto

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \left[\lim_{k\to\infty} \left(x_{n_k} - y_{n_k}\right)\right] + \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0.$$

Por último, la función f no puede ser continua en el punto x_0, ya que entonces se tendría

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0,$$

y, sin embargo,

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0,$$

para todos los $k \in \mathbb{N}$. □

Observación 3.22.13. *Aunque el dominio A de la función f continua no sea un compacto, el Teorema* 3.22.12 *puede seguir siendo aplicable, ya que tal vez f pueda extenderse con continuidad a una función $\widetilde{f}$ definida sobre un compacto K que contenga a A, con lo que $\widetilde{f}$ será uniformemente continua en K y por tanto $\widetilde{f}|_A = f$ también será uniformemente continua en A.*

Proposición 3.22.14. *Si f es uniformemente continua en un conjunto A y $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy contenida en A, entonces $\big(f(x_n)\big)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, entonces existe algún $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in A$ con $|x - y| < \delta$, se tiene

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Ahora, como la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy, existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $n, m > n_0$ se tiene $|x_n - x_m| < \delta$. Y además, $x_n, x_m \in A$. Entonces, para cualesquiera $n, m > n_0$ se tiene

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, la sucesión $\big(f(x_n)\big)_{n\geq 1}$ es de Cauchy. $\square$

Observación 3.22.15. *El resultado anterior no es cierto, en general, si f no es uniformemente continua, como prueba el ejemplo siguiente: la función*

$$\begin{array}{rccc} f: & (0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \frac{1}{x} \end{array}$$

no es uniformemente continua y la sucesión $x_n = \frac{1}{n}$ es de Cauchy.

Nota 3.22.16. *Una propiedad importante de las funciones uniformemente continuas es que siempre poseen extensiones únicas a la adherencia de sus dominios.*

Proposición 3.22.17. *Una función $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua si y solo si posee una extensión continua en $[a, b]$.*

Demostración. Si f tiene una extensión continua $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces g es uniformemente continua, según el Teorema 3.22.12 de Heine. Cualquier restricción de una función uniformemente continua también es uniformemente continua, y en particular, f.

Ahora supongamos que f es uniformemente continua en (a, b); se trata de probar que existen los dos límites

$$\lim_{x\to a^+} f(x), \quad \lim_{x\to b^-} f(x)$$

y que son números reales, ya que entonces la siguiente función será una extensión continua de f al intervalo $[a, b]$:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in (a, b) \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) & \text{si} \quad x = a \\ \lim\limits_{x \to b^-} f(x) & \text{si} \quad x = b \end{cases}$$

Solo vamos a probar que existe $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ y que es un número real; el otro límite se prueba de manera análoga.

Elijamos una sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ contenida en el intervalo (a, b) y tal que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Como es convergente, la sucesión es de Cauchy; y como la función f es uniformemente continua, la sucesión $\big(f(x_n)\big)_{n \geq 1}$ es también de Cauchy y, por lo tanto, convergente. Sea

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \ell \in \mathbb{R}.$$

Ahora sea $(y_n)_{n \geq 1}$ una sucesión cualquiera contenida en el intervalo (a, b) y tal que

$$\lim_{n \to \infty} y_n = a.$$

Definamos la nueva sucesión

$$z_{2n} = y_n, \quad z_{2n-1} = x_n$$

Por la misma razón que antes, la sucesión $\big(f(z_n)\big)_{n \geq 1}$ es convergente. Como $\big(f(y_n)\big)_{n \geq 1}$ y $\big(f(x_n)\big)_{n \geq 1}$ son dos subsucesiones suyas, deducimos que

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(y_n) = \lim_{n \to \infty} f(z_n) = \ell$$

Según la proposición 3.7.2,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Capítulo 4

Derivabilidad

4.1. La derivada

Definición 4.1.1. *La* ***derivada*** *de una función f en el punto $a \in D(f)$, que denotaremos $f'(a)$, es:*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

siempre que el límite anterior exista. En este caso, decimos que f es ***derivable*** *en a.*

- *La expresión $f'(a)$ se lee "f prima de a". También se emplean las notaciones:*

  $$\frac{d}{dx} f(a) \quad o \quad \frac{df}{dx}(a)$$

  que se leen "derivada de f respecto de x en a".

- *Decimos que f es* ***derivable*** *si f es derivable en a para todo a del dominio de f.*

Proposición 4.1.2. *Si f es derivable en el punto a, entonces f es continua en a.*

Demostración. Si f es derivable en a podemos escribir:

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) - f(a) \big) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

es decir, f es continua en a. □

Observación 4.1.3. *Hay funciones continuas que no son derivables, por ejemplo, la función* $f(x) = |x|$ *es continua en* 0 *pero no derivable* (*véase* Ejemplo 4.2.7).

Proposición 4.1.4. *La recta tangente a la gráfica de* f *en el punto* $\big(a, f(a)\big)$ *tiene por ecuación*

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Ejemplo 4.1.5. Encontrar la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3 - x$, en el punto de abscisa $\frac{2}{3}$ sabiendo que $f'\big(\frac{2}{3}\big) = \frac{1}{3}$.

Como $f\big(\frac{2}{3}\big) = \big(\frac{2}{3}\big)^3 - \frac{2}{3} = -\frac{10}{27}$, el punto correspondiente a $x = \frac{2}{3}$ es:

$$\left(\frac{2}{3}, f\Big(\frac{2}{3}\Big)\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{10}{27}\right)$$

Por tanto, la recta tangente será:

$$y - \Big(-\frac{10}{27}\Big) = \frac{1}{3}\Big(x - \frac{2}{3}\Big) \Longleftrightarrow y + \frac{10}{27} = \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} \Longleftrightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{16}{27}$$

El cociente $\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ recibe el nombre de ***pendiente*** de la recta tangente.

4.2. Significado de la derivada

Proposición 4.2.1. *La derivada es la pendiente de la recta tangente.*

Dada una función f, ***busquemos la tangente a su gráfica en un punto*** $\big(a, f(a)\big)$.

Las rectas que pasan por el punto $\big(a, f(a)\big)$ tienen la forma:

$$y - f(a) = m(x - a), \quad (m \text{ es la pendiente de la recta}).$$

Según varía m, vamos recorriendo todas las rectas del plano que pasan por $\big(a, f(a)\big)$ (excepto la vertical).

Así pues, la pregunta "¿cuál es la recta tangente?" significa simplemente "¿qué pendiente m debemos tomar?".

Una idea para encontrar esta pendiente, que no conocemos, es partir de pendientes que sí conocemos.

Para ello, tomamos puntos x próximos a a, que expresamos de la forma $a + h$, y consideremos las rectas que pasan por $\big(a, f(a)\big)$ y por $\big(a + h, f(a + h)\big)$.

Estas rectas tienen pendiente:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Haciendo h más y más pequeño, nuestras rectas se aproximan más y más a la tangente, es decir, sus pendientes se acercan más y más a la pendiente buscada.

En una palabra, la pendiente buscada será:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

Ejemplo 4.2.2. Sea $f(x)=mx+b$. Calcular $f'(x)$.

Tomemos un punto x cualquiera, se trata de calcular

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{m(x+h)+b-(mx+b)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{mh}{h}=\lim_{h\to 0}m=m\end{aligned}$$

Así, obtenemos $f'(x)=m$ para todo x.

Ejemplo 4.2.3. Sea $g(x)=x^2$. Calcular $g'(x)$. Tomemos un punto x cualquiera, se trata de calcular

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh}{h}=\lim_{h\to 0}(h+2x)=2x\end{aligned}$$

Así, obtenemos $g'(x)=2x$ para todo x.

Definición 4.2.4. *Dada una función f definida en un intervalo I y un punto $a\in I$, definimos la derivada lateral por la derecha de f en a como el límite finito*

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Análogamente se define la derivada lateral por la izquierda de f en a, $f'_-(a)$.

Nota 4.2.5. *Si a es uno de los extremos de I solo tiene sentido una de las dos derivadas laterales.*

Observación 4.2.6. *La derivabilidad de f en a equivale a que las dos derivadas laterales de f en a existan y sean iguales.*

Ejemplo 4.2.7. Sea la función $f(x) = |x|$. Estudia en qué puntos es derivable y calcular la derivada cuando exista.

Observamos que dado $x > 0$, si h es suficientemente pequeño tenemos $x+h > 0$. Por tanto, si $x > 0$:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|x+h|-|x|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

Análogamente, si $x < 0$, también tenemos $x+h < 0$ para valores pequeños de h, por lo que:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|x+h|-|x|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-(x+h)-(-x)}{h} = -1$$

Luego

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Sin embargo, para $x = 0$, tenemos:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$
$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Así, los límites laterales $f'_+(0)$ y $f'_-(0)$ son distintos y deducimos que no existe $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$.

Por tanto $|x|$ no es derivable en 0.

Nota 4.2.8. *Las funciones derivables son aquellas cuyas gráficas son curvas "**suaves**", es decir, curvas que no tienen "**picos**" o "**esquinas**"*

4.3. Técnicas para el cálculo de derivadas

Con la definición de la derivada y las propiedades de los límites, se obtienen unas reglas que convierten el proceso de calcular derivadas en algo sencillo y mecánico.

4.3.1. Reglas básicas de derivación

Sean f y g dos funciones definidas en un intervalo I y derivables, y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

1) La función $f+g$ es derivable, y se tiene que la derivada de la suma es la suma de las derivadas, es decir,

$$\big(f(x)+g(x)\big)' = f'(x)+g'(x) \quad \forall\, x \in I.$$

2) La función αf es derivable, y se tiene que La derivada del producto de una constante por una función es la constante por la derivada de la función, es decir,

$$\big(\alpha f(x)\big)' = \alpha f'(x) \quad \forall\, x \in I.$$

3) La función $f-g$ es derivable, y se tiene que La derivada de la diferencia es la diferencia de las derivadas, es decir,

$$\big(f(x)-g(x)\big)' = f'(x)-g'(x) \quad \forall\, x \in I.$$

4) La función fg es derivable, y se tiene que la derivada del producto de dos funciones es la derivada de la primera por la segunda más la primera por la derivada de la segunda, es decir,

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \quad \forall\, x \in I.$$

5) Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ entonces la función $\frac{f}{g}$ es derivable, y la derivada del cociente viene dada de la siguiente forma:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}.$$

Observación 4.3.1.

1) $\dfrac{d}{dx}\alpha = (\alpha)' = 0, \quad \textit{donde} \;\; \alpha \in \mathbb{R} \quad (\textit{función constante } f(x)=\alpha)$

2) $\dfrac{d}{dx}x = (x)' = 1 \quad (f(x)=x)$

Ejemplo 4.3.2. Calcular la derivada de $f(x)=3x+7$.

Utilizando las propiedades 1 y 2, obtenemos:

$$f'(x) = (3x+7)' = (3x)'+(7)' = 3(x)'+0 = 3\cdot 1 = 3.$$

Ejemplo 4.3.3. Calcular la derivada de x^2 y de x^3.

Utilicemos que x^2 es el producto de x por sí mismo. Así podemos aplicar la propiedad 3:

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = (x)' \cdot x + x \cdot (x)' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x.$$

Utilizando esto, y de nuevo la propiedad 3:

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2.(x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

Con la idea del Ejemplo 4.3.3 podemos calcular también la derivada de x^4, x^5, ... En general, tenemos (basta utilizar inducción):

Proposición 4.3.4.

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Ejemplo 4.3.5. Calcular la derivada de

$$f(x) = 2x^6 + 3x^5 - 9x^3 + 7x^2 - 8x + 3.$$

Determinar la recta tangente a la gráfica de f en el punto

$$(1, f(1)) = (1, -2).$$

Aplicamos las propiedades anteriores:

$$\begin{aligned}
(2x^6 + 3x^5 - 9x^3 &+ 7x^2 - 8x + 3)' = \\
&= (2x^6)' + (3x^5)' - (9x^3)' + (7x^2)' - (8x)' + (3)' \\
&= 2(x^6)' + 3(x^5)' - 9(x^3)' + 7(x^2)' - 8(x)' + 0 \\
&= 2 \cdot 6x^5 + 3 \cdot 5x^4 - 9 \cdot 3x^2 + 7 \cdot 2x^1 - 8 \cdot 1 \\
&= 12x^5 + 15x^4 - 27x^2 + 14x - 8
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$f'(x) = 12x^5 + 15x^4 - 27x^2 + 14x - 8.$$

La recta tangente en el punto $(1, f(1)) = (1, -2)$ es:

$$y - (-2) = f'(1)(x - 1).$$

Como $f'(1) = 12 \cdot 1^5 + 15 \cdot 1^4 - 27 \cdot 1^2 + 14 \cdot 1 - 8 = 6$, la recta tangente será:

$$y + 2 = 6(x - 1) \Longleftrightarrow y = 6x - 8.$$

Proposición 4.3.6. *La derivada de un polinomio de grado n es un polinomio de grado $n-1$, es decir,*

$$\big(a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\big)' = n a_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

Ejemplo 4.3.7. Calcular la derivada de $\frac{x-1}{x^2+1}$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)' &= \frac{(x-1)'(x^2+1) - (x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1\cdot(x^2+1) - (x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

4.3.2. Derivadas de algunas funciones

1) La función exponencial:

$$\frac{d}{dx} e^x = (e^x)' = e^x.$$

2) La función logaritmo neperiano:

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \big(\ln(x)\big)' = \frac{1}{x}.$$

3) Las funciones trigonométricas:

- $\frac{d}{dx}\sin(x) = \big(\sin(x)\big)' = \cos(x)$
- $\frac{d}{dx}\cos(x) = \big(\cos(x)\big)' = -\sin(x)$
- $\frac{d}{dx}\operatorname{tg}(x) = \big(\operatorname{tg}(x)\big)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Ejemplo 4.3.8. Calcular la derivada de $\sin(x)\operatorname{tg}(x) + 3\cos(x)$ y la de $\frac{x^2+7}{\sin(x)+\cos(x)}$.

$$\begin{aligned}\big(\sin(x)\operatorname{tg}(x) + 3\cos(x)\big)' &= \big(\sin(x)\operatorname{tg}(x)\big)' + \big(3\cos(x)\big)' \\ &= \big(\sin(x)\big)'\operatorname{tg}(x) + \sin(x)\big(\operatorname{tg}(x)\big)' + 3\big(\cos(x)\big)' \\ &= \cos(x)\operatorname{tg}(x) + \sin(x)\frac{1}{\cos^2(x)} - 3\sin(x) \\ &= \sin(x) + \frac{\operatorname{tg}(x)}{\cos(x)} - 3\sin(x) \\ &= \frac{\operatorname{tg}(x)}{\cos(x)} - 2\sin(x).\end{aligned}$$

$$\left(\frac{x^2+7}{\sin(x)+\cos(x)}\right)' = \frac{(x^2+7)'\big(\sin(x)+\cos(x)\big)-(x^2+7)\big(\sin(x)+\cos(x)\big)'}{\big(\sin(x)+\cos(x)\big)^2}$$
$$= \frac{2x\big(\sin(x)+\cos(x)\big)-(x^2+7)\cos(x)-\sin(x)}{\big(\sin(x)+\cos(x)\big)^2}$$
$$= \frac{(x^2+2x+7)\sin(x)-(x^2-2x+7)\cos(x)}{\big(\sin(x)+\cos(x)\big)^2}$$

4.3.3. Derivadas de funciones definidas "a trozos"

Nota 4.3.9. *Si una función no es continua en un punto, entonces no puede ser derivable en dicho punto.*

Ejemplo 4.3.10. Estudiar la derivabilidad y calcular la derivada, donde exista, de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3+x^2+1 & \text{si } x<0 \\ \\ |x^2-1| & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

Para estudiar la derivabilidad lo más recomendable es expresar la función sin valor absoluto.

Como $x^2-1=(x+1)(x-1)$, entonces:

$$\begin{cases} x^2-1\geq 0 & \text{si } \ x\in(-\infty-1]\cup[1,+\infty) \\ \\ x^2-1\leq 0 & \text{si } \ x\in[-1,1] \end{cases}$$

Por tanto

$$f(x) = \begin{cases} x^3+x^2+1 & \text{si } \ x<0 \\ \\ -(x^2-1) & \text{si } \ 0\leq x\leq 1 \\ \\ x^2-1 & \text{si } \ x\geq 1 \end{cases}$$

- Para $x<0$, $f\,'(x)=(x^3+x^2+1)'=3x^2+2x$.
- Para $0<x<1$, $f\,'(x)=(1-x^2)'=-2x$.
- Para $x>1$, $f\,'(x)=(x^2-1)'=2x$.

Falta estudiar qué ocurre en los puntos "de empalme": 0 y 1. En primer lugar, se prueba fácilmente que la función es continua en ambos:

♦ Para $x = 1$,

si $x > 1$, tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x^2-1)-0}{x-1} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^+} (x+1) = 2\end{aligned}$$

Análogamente, si $x < 1$, tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x^2-1)-0}{x-1} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} -(x+1) = -2\end{aligned}$$

Estos límites laterales no coinciden, luego no existe

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}.$$

Por tanto, f no es derivable en 1.

♦ Para $x = 0$,

si $x > 0$, tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-(x^2-1)-1}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0\end{aligned}$$

si $x < 0$, tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+x^2+1-1}{x} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+x^2}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^-} (x^2+x) = 0\end{aligned}$$

Esto nos dice que f es derivable en 0 y que $f'(0) = 0$.

En resumen, f es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$, y

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2+2x & \text{si } \ x < 0 \\ -2x & \text{si } \ 0 \le x < 1 \\ 2x & \text{si } \ x > 1 \end{cases}$$

Ejemplo 4.3.11. Estudiar la derivabilidad y calcular la derivada, donde exista, de la función

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Para $x \neq 0$, f es claramente derivable, y con las reglas de derivación tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = (x)' \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \\ &= \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

En cuanto a la derivabilidad en $x = 0$, tenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

pero ya vimos que este límite no existe. Por tanto, f no es derivable en $x = 0$.

4.4. La regla de la cadena

Proposición 4.4.1 (Regla de cadena). *Si f es derivable en c y g es derivable en $f(c)$, entonces $g \circ f$ es derivable en c y*

$$(g \circ f)'(c) = \Big(g\big(f(c)\big)\Big)' = g'\big(f(c)\big) f'(c).$$

Ejemplo 4.4.2. Sea $h(x) = \sin(x^2 + x + \pi)$. Calcular $h'(0)$ y $h'(x)$.

Para aplicar la regla de la cadena, tomemos $f(x) = x^2 + x + \pi$, $g(y) = \sin(y)$. Así, tenemos $h(x) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$.

Por tanto:

$$h'(0) = (g \circ f)'(0) = g'\big(f(0)\big) f'(0) = g'(0^2 + 0 + \pi) f'(0)$$

Como $f'(x) = 2x + 1$ y $g'(y) = \cos(y)$, tenemos

$$h'(0) = (g \circ f)'(0) = \cos(\pi) \cdot (2 \cdot 0 + 1) = (-1) \cdot 1 = -1.$$

En general, tenemos:

$$
\begin{aligned}
h'(x) = \Big(g\big(f(x)\big)\Big)' &= g'\big(f(x)\big)f'(x) = [\cos(x^2+x+\pi)](2x+1) \\
&= (2x+1)\cos(x^2+x+\pi)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4.4.3. Sea $h(x) = e^{\sin(x)}$. Calcular $h'(0)$ y $h'(x)$.

Tomamos $f(x) = \sin(x)$, $g(y) = e^y$. Tenemos:

$$f'(x) = \cos(x) \qquad g'(y) = e^y$$

Por tanto:

$$h'(x) = \Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = g'\big(f(x)\big)f'(x) = e^{\sin(x)}\cos(x).$$

En particular,

$$h'(0) = e^{\sin(0)}\cos(0) = e^0 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Proposición 4.4.4.

- $$\Big(\sin\big(u(x)\big)\Big)' = \big[\cos\big(u(x)\big)\big] \cdot u'(x)$$

- $$\Big(e^{u(x)}\Big)' = e^{u(x)} \cdot u'(x)$$

Ejemplo 4.4.5. Calcular las derivadas de las funciones

$f(x) = \mathrm{tg}(7x^2+9x)$, $g(x) = \cos^4(x^3+2x)$ y $h(x) = e^{(x^2+3x)^5}$.

En el primer caso, utilizamos que $\big(\mathrm{tg}(x)\big)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$.
Por tanto, tenemos:

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \mathrm{tg}'(7x^2+9x)\cdot(7x^2+9x)' &= \frac{1}{\cos^2(7x^2+9x)\cdot(14x+9)} \\
&= \frac{14x+9}{\cos^2(7x^2+9x)}
\end{aligned}
$$

Para la función g utilizamos que $(x^4)' = 4x^3$:

$$g'(x) = 4\cos^3(x^3+2x)[\cos(x^3+2x)]'.$$

Ahora tenemos que seguir derivando $\cos(x^3+2x)$. Utilizamos el mismo argumento (teniendo en cuenta ahora que $\big(\cos(x)\big)'$). Así, tenemos:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 4\cos^3(x^3+2x)[-\sin(x^3+2x)](x^3+2x)' \\ &= -4\cos^3(x^3+2x)[\sin(x^3+2x)](3x^2+2) \\ &= -4(3x^2+2)\sin(x^3+2x)\cos^3(x^3+2x) \end{aligned}$$

Finalmente, para h, como $(e^x)' = e^x$, tenemos:

$$h'(x) = e^{(x^2+3x)^5}\big((x^2+3x)^5\big)'$$

Por tanto

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^{(x^2+3x)^5}\big((x^2+3x)^5\big)' = e^{(x^2+3x)^5}\big(5(x^2+3x)^4(x^2+3x)'\big) \\ &= e^{(x^2+3x)^5}\big(5(x^2+3x)^4(2x+3)\big) \\ &= 5(2x+3)(x^2+3x)^4 e^{(x^2+3x)^5}. \end{aligned}$$

4.5. Funciones inversas

Proposición 4.5.1. *La función g es **inversa** de f si y sólo si se cumple*

$$g\circ f(x) = x \quad (f \ \textit{inyectiva}) \quad \textit{y} \quad f\circ g(y) = y \ (f \ \textit{sobreyectiva})$$

para todo $x \in D(f)$ y para todo $y \in D(g)$. En tal caso se denota $g = f^{-1}$.

Observación 4.5.2.

1) Tenemos que trabajar en un dominio en el que distintos valores de x den distintos valores de $f(x)$ (f inyectiva), así, eliminamos el problema siguiente:

   Sea $f(x) = x^2$. Dado $y = 4$, tanto $x = 2$ como $x = -2$ satisfacen $f(x) = 4$.

2) Hay puntos y para los que no existe ningún x tal que $f(x) = y$. En el ejemplo $f(x) = x^2$, basta tomar $y = -1$.

   En general, el dominio de f^{-1} no es toda la recta real (f no es sobreyectiva).

Observación 4.5.3. *Usamos las letras x para la variable de la función f e y para su inversa f^{-1}, con el fin de subrayar que la inversa f^{-1} está definida en los valores que toma la función f, y viceversa.*

Proposición 4.5.4. *La gráfica de la inversa f^{-1} es simétrica de la gráfica de f respecto a la recta $y = x$.*

Proposición 4.5.5.

- ♦ *Si f es continua en c, entonces la inversa f^{-1} es continua en $f(c)$.*
- ♦ *Si f es derivable en c, $f'(c) \neq 0$ entonces la inversa f^{-1} es derivable en $f(c)$.*

Teorema 4.5.6. *Si f es derivable en $x \in D(f)$, $f'(x) \neq 0$, entonces la inversa f^{-1} es derivable en $f(x)$ y*

$$\big(f^{-1}\big)'\big(f(x)\big) = \frac{1}{f'(x)}.$$

O bien, denotando $f(x) = y$, es decir, $x = f^{-1}(y)$

$$\big(f^{-1}\big)'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}.$$

Ejemplo 4.5.7. Calcular la derivada de $\ln(y)$.

La función $\ln(y)$ es inversa de $f(x) = e^x$, con $x \in \mathbb{R}$. Como $f'(x) = e^x$, para cada $y > 0$ tenemos:

$$\big(\ln(y)\big)' = \frac{1}{f'\big(\ln(y)\big)} = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}$$

Ejemplo 4.5.8. Calcular la derivada de $\arcsin(y)$.

La función que tenemos que derivar es la inversa de $f(x) = \sin(x)$, donde $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Como $f'(x) = \cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$, para cada $y \in (-1, 1)$ tenemos:

$$\begin{aligned}\big(\arcsin(y)\big)' = \frac{1}{f'\big(\arcsin(y)\big)} &= \frac{1}{\cos\big(\arcsin(y)\big)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\big(\arcsin(y)\big)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\end{aligned}$$

Ejemplo 4.5.9. Calcular la derivada de $\arccos(y)$.

La función que tenemos que derivar es la inversa de $f(x) = \cos(x)$, donde $x \in (0, \pi)$.

Como $f'(x) = -\sin(x) = -\sqrt{1 - \cos^2(x)}$, para cada $y \in (-1, 1)$ tenemos:

$$\begin{aligned}\big(\arccos(y)\big)' = \frac{1}{f'\big(\arccos(y)\big)} &= -\frac{1}{\sin\big(\arccos(y)\big)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2\big(\arccos(y)\big)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\end{aligned}$$

Ejemplo 4.5.10. Calcular las derivadas de las funciones x^a, a^x y x^x, donde $a, x > 0$.

Recordemos que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\alpha > 0$, se tiene $\alpha^\beta = e^{\beta \ln(\alpha)}$.

Por la regla de cadena, tenemos:

- $$(x^a)' = \big(e^{a\ln(x)}\big)' = e^{a\ln(x)}\big(a\ln(x)\big)' = x^a a\big(\ln(x)\big)' = x^a a\Big(\frac{1}{x}\Big) = ax^{a-1}$$

- $$(x^a)' = \big(e^{x\ln(a)}\big)' = e^{x\ln(a)}\big(x\ln(a)\big)' = a^x\ln(a)$$

- $$(x^x)' = \big(e^{x\ln(x)}\big)' = e^{x\ln(x)}\big(x\ln(x)\big)' = x^x\Big[(x)'\ln(x) + x\big(\ln(x)\big)'\Big] = x^x\Big[\ln(x) + x\frac{1}{x}\Big] = \big(1+\ln(x)\big)x^x$$

4.6. Teorema de los valores intermedios para la derivada

Teorema 4.6.1 (Darboux). *Sea f una función derivable en un intervalo I. Si la derivada f' toma dos valores, toma también todos los valores intermedios; es decir, si $a, b \in I$, $a < b$, y λ está entre $f'(a)$ y $f'(b)$, existe al menos un $x_0 \in (a,b)$ tal que $f'(x_0) = \lambda$.*

4.7. Teorema de Rolle

Teorema 4.7.1 (Rolle). *Sea f una función continua en un intervalo $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c) = 0$$

Observación 4.7.2. *Geométricamente el Teorema de Rolle dice que en algún punto $(c, f(c))$ de la gráfica de f, siendo c intermedio entre a y b, la tangente es horizontal y paralela, al segmento que une los extremos de la gráfica.*

4.8. Teorema del Valor Medio

El siguiente resultado constituye una generalización del Teorema de Rolle.

Teorema 4.8.1 (Lagrange o Valor Medio o incrementos finitos). *Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Observación 4.8.2. *Geométricamente el Teorema de Valor Medio dice que cuando unimos los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ mediante una gráfica suave, en algún punto la tangente a la gráfica es paralela, al segmento que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$.*

4.9. Aplicaciones del Teorema del Valor Medio

Ejemplo 4.9.1. Demostrar que $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$ para cualquier par de números reales x, y. Deducir el valor de

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\sin\big(\sqrt{n+1}\big) - \sin\big(\sqrt{n}\big) \Big).$$

Sean x, y números reales.

Si $x = y$, la desigualdad es trivialmente cierta (tenemos el valor 0 en ambos lados).

Si $x \neq y$, supongamos, por ejemplo, $x < y$ (el otro caso es igual). Apliquemos el Teorema del Valor Medio a la función $f(t) = \sin(t)$ en el intervalo $[x, y]$. Deducimos que existe $c \in (x, y)$ tal que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{\sin(y) - \sin(x)}{y - x} = f'(c) = \cos(c)$$

Tomando valor absoluto y recordando que $|\cos(t)| \leq 1$ para todo t, tenemos:

$$\left| \frac{\sin(y) - \sin(x)}{y - x} \right| = \frac{\big|\sin(y) - \sin(x)\big|}{|y - x|} = \big|\cos(c)\big| \leq 1$$

Así que,

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$

que es la desigualdad que queríamos demostrar.

En cuanto al límite, utilizando la desigualdad anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}
\left|\sin\left(\sqrt{n+1}\right)-\sin\left(\sqrt{n}\right)\right| &\leq \left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right| = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \\
&= \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to+\infty} = \Big(\sin\left(\sqrt{n+1}\right)-\sin\left(\sqrt{n}\right)\Big) = 0.$$

Ejemplo 4.9.2. Demostrar que $\operatorname{arc\,tg}(x) < x$ para todo $x > 0$.

Sea $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x)$. Como $f(0) = \operatorname{arc\,tg}(0) = 0$, resulta que

$$\operatorname{arc\,tg}(x) = f(x) - f(0).$$

Tomemos $x > 0$ y apliquemos el teorema del Valor Medio en el intervalo $[0, x]$. Existe $c \in (0, x)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x}$$

Pero $f'(c) = \frac{1}{1+c^2} < 1$. Por tanto,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{1+c^2} < 1 \Longrightarrow \operatorname{arc\,tg}(x) = f(x) < x.$$

Ejemplo 4.9.3. Calcular $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)$.

Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Tenemos $\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n} = f(n+2)-f(n)$. Para cada n, vamos a aplicar el Teorema del Valor Medio en el intervalo $[n, n+2]$.

Deducimos que existe $c_n \in (n, n+2)$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{f(n+2)-f(n)}{n+2-n} = \frac{f(n+2)-f(n)}{2} &= f'(c_n) \\
\Longrightarrow f(n+2)-f(n) &= 2f'(c_n)
\end{aligned}$$

Como $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, y $n < c_n$, se tiene

$$\begin{aligned}
0 < \sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n} &= f(n+2)-f(n) = 2f'(c_n) \\
&= \frac{2}{3\sqrt[3]{c_n^2}} < \frac{2}{3\sqrt[3]{n^2}} \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Por el criterio del sandwich, obtenemos el resultado:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)=0.$$

Veamos ahora las dos consecuencias del Teorema de valor Medio que anunciábamos antes.

Proposición 4.9.4. *Sea f una función derivable en un intervalo I. Si $f'(x)=0$ para todo $x\in I$, entonces f es constante.*

Proposición 4.9.5. *Sean f,g funciones derivables en un intervalo I tales que $f'(x)=g'(x)$ para todo $x\in I$. Entonces existe una constante α tal que*

$$f(x)=g(x)+\alpha$$

para todo $x\in I$.

Ejemplo 4.9.6. Demostrar que $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$ para todo número real x.

Consideremos $f(x)=\sin^2(x)+\cos^2(x)$. Tenemos

$$f'(x)=2\sin(x)\cos(x)+2\cos(x)\big(-\sin(x)\big)=0 \quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Por tanto, gracias a la primera de las proposiciones anteriores, f es constante en todo la recta real.

Para saber cuál es la constante, evaluamos f en un punto sencillo, por ejemplo en $x=0$. Tenemos

$$f(0)=\sin^2(0)+\cos^2(0)=0^2+1^2=1$$

De lo que se deduce

$$f(x)=\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$$

para todo número real x.

Ejemplo 4.9.7. Comprobar que $\ln(x^9)=9\ln(x)$ para todo $x>0$.

Sea $f(x)=\ln(x^9)$ y $g(x)=9\ln(x)$. Tenemos

$$f'(x)=\frac{9x^8}{x^9}=\frac{9}{x} \quad \text{y} \quad g'(x)=9\frac{1}{x}$$

Como f y g tienen la misma derivada en $(0,+\infty)$, difieren en una constante, esto es, existe α tal que

$$f(x)=\ln(x^9)=g(x)+\alpha=9\ln(x)+\alpha$$

para todo $x > 0$. Pero, además, tomando $x = 1$, tenemos

$$f(1) = \ln(1^9) = \ln(1) = 0 \quad \text{y} \quad g(1) = 9\ln(1) = 9 \cdot 0 = 0.$$

Con lo cual,

$$f(1) = g(1) + \alpha = 0 + \alpha = \alpha \Longrightarrow \alpha = 0.$$

Luego $\ln(x^9) = 9\ln(x)$ para todo $x > 0$.

4.10. Monotonía local de una función

Definición 4.10.1. *Sea f una función real definida en un intervalo I y $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ (interior de I).*

1) *Se dice que f es **creciente en** x_0 si existe $\delta > 0$ tal que*

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I, \quad y \quad \begin{cases} f(x) \leq f(x_0) & si \quad x_0 - \delta < x < x_0, \\ f(x_0) \leq f(x) & si \quad x_0 < x < x_0 + \delta. \end{cases}$$

2) *Se dice que f es **decreciente en** x_0 si existe $\delta > 0$ tal que*

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I, \quad y \quad \begin{cases} f(x) \geq f(x_0) & si \quad x_0 - \delta < x < x_0, \\ f(x_0) \geq f(x) & si \quad x_0 < x < x_0 + \delta. \end{cases}$$

3) *Si estas desigualdades se verifican en sentido estricto se dice f es **estrictamente creciente** (**resp. decreciente**) **en** x_0.*

Definición 4.10.2. *Una función f es **monótona en un punto** x_0 si f es creciente o decreciente en x_0.*

Observación 4.10.3. *Sea f una función real definida en un intervalo I y $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ (interior de I).*

1) *f es creciente si, y sólo si, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$.

2) *f es decreciente si, y sólo si, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$.

Proposición 4.10.4. *Sea f una función definida sobre el intervalo I y derivable en el punto $x_0 \in \overset{\circ}{I}$. Se tiene que:*

1) *Si f es creciente en x_0 entonces $f'(x_0) \geq 0$.*

2) *Si $f'(x_0) > 0$ entonces f es creciente en x_0.*

3) *Si f es decreciente en x_0 entonces $f'(x_0) \leq 0$.*

4) *Si $f'(x_0) < 0$ entonces f es decreciente en x_0.*

5) *Si $f'(x_0) = 0$ no se puede asegurar nada a este respecto.*

4.11. Monotonía en un conjunto

Proposición 4.11.1. *Si f es monótona en un intervalo abierto (ver* Definición 3.4.1*), entones f es monótona en cada uno de sus puntos.*

Observación 4.11.2. *Una función puede ser creciente en un punto x_0 sin serlo en ningún entorno de la forma $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

Como ejemplo, considérese la función

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{cll} x + 2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si & x \neq 0 \\ 0 & si & x = 0. \end{array} \right. \end{array}$$

y estúdiese su comportamiento en un entorno de $x_0 = 0$.

Proposición 4.11.3. *Sea f una función continua en un intervalo I y derivable en todos los puntos interiores del intervalo. Se tiene:*

1) *f es creciente en I si, y sólo si, $f'(x) \geq 0$ para cada $x \in \overset{\circ}{I}$.*

2) *f es decreciente en I si, y sólo si, $f'(x) \leq 0$ para cada $x \in \overset{\circ}{I}$.*

3) *Si $f'(x) > 0$ para cada $x \in \overset{\circ}{I}$, entonces f es estrictamente creciente.*

4) *Si $f'(x) < 0$ para cada $x \in \overset{\circ}{I}$, entonces f es estrictamente decreciente.*

Observación 4.11.4. *El recíproco de 3) y 4) es falso, es decir, de la monotonía estricta de una función derivable en un intervalo no se deduce la no anulación de la derivada. Basta considerar la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:*

$$f(x) = x^3,$$

que es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, y para la que $f'(0) = 0$.

Ejemplo 4.11.5. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $2x = \cos^2(x)$?

Consideremos la función $f(x) = 2x - \cos^2(x)$. Se trata de contar cuántos ceros tiene.

Como f es continua en toda la recta real y

$$f(0) = -1 < 0 < \pi = f\Big(\frac{\pi}{2}\Big)$$

sabemos, por el teorema de Bolzano, que, al menos, se anula en un punto $c \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big)$.

Estudiando el crecimiento y decrecimiento de f, podemos ir más lejos: podemos decir exactamente en cuántos puntos se anula.

Tenemos

$$f'(x) = 2 - 2\big(\cos(x)\big) \cdot \big(-\sin(x)\big) = 2 + 2\cos(x)\sin(x) = 2 + \sin(2x).$$

Por otra parte,

$$-1 \leq \sin(2x) \leq 1 \Longrightarrow 1 \leq f'(x) = 2 + \sin(2x) \leq 3$$

Así que, $f'(x) > 0$ para todo x. Luego f es estrictamente creciente en $(-\infty, +\infty)$.

Deducimos que la ecuación tiene una solución que, de hecho, pertenece al intervalo $c \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big)$.

4.12. Teorema de Cauchy

El siguiente resultado generaliza el Teorema del Valor Medio, tiene interés principalmente por sus aplicaciones.

Teorema 4.12.1 (Cauchy). *Sean f y g funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ y derivables en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Nota 4.12.2. *El Teorema de Cauchy es el instrumento básico que usaremos a menudo para el cálculo de límites de la forma:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde $a \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

Ejemplo 4.12.3. Calcular

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{e^{\sin(x)} - e^{\cos(x)}}{\sin(x) - \cos(x)}.$$

Hagamos: $x = \frac{\pi}{4} + t$, si $x \to \frac{\pi}{4}$, $t \to 0$:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{e^{\sin(x)} - e^{\cos(x)}}{\sin(x) - \cos(x)} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)} - e^{\cos\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{e^{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)} - e^{\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}$$

Aplicando el Teorema de Cauchy a las funciones $f(x) = e^{\sin(x)}$, $g(x) = \sin(x)$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4} - t, \frac{\pi}{4} + t\right]$, obtenemos que existe $c \in \left(\frac{\pi}{4} - t, \frac{\pi}{4} + t\right)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{e^{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)} - e^{\sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-t\right)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$= \frac{e^{\sin(c)} \cdot \cos(c)}{\cos(c)} = e^{\sin(c)}$$

Puesto que $c \in \left(\frac{\pi}{4} - t, \frac{\pi}{4} + t\right)$, tenemos que, si $t \to 0$, $c \to \frac{\pi}{4}$:
De aquí se deduce:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{e^{\sin(x)} - e^{\cos(x)}}{\sin(x) - \cos(x)} = \lim_{c \to \frac{\pi}{4}} e^{\sin(c)} = e^{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

4.12.1. Regla de L'Hôpital (caso $\frac{0}{0}$)

Proposición 4.12.4 (L'Hôpital). *Sean f y g funciones derivables en el intervalo (a, b) y supongamos que g y g' no se anulan en (a, b). Si* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$ *y* $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$*, entonces*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

donde l puede ser un número real, $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo 4.12.5. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x}$.

Observemos que el límite pedido es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Apliquemos la regla de L'Hôpital.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{0}{0} \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\big(\sin(x)\big)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{1} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

4.12.2. Regla de L'Hôpital (caso $\frac{\infty}{\infty}$)

Proposición 4.12.6 (L'Hôpital). *Sean f y g funciones derivables en el intervalo (a,b) y supongamos que g y g' no se anulan en (a,b). Si $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, entonces*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

donde l puede ser un número real, $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo 4.12.7. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln\big(\sin(x)\big)}{\frac{1}{x}}$.

Tenemos una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Apliquemos la regla de L'Hôpital. Se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\big(\sin(x)\big)}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{\frac{-1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\cos(x)}{\sin(x)} \\ &= -\big(\lim_{x\to 0^+} x\cos(x)\big)\cdot\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin(x)}\right) \\ &= -\big(\lim_{x\to 0^+} x\cos(x)\big)\cdot\left(\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x}}\right) = -0\cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Observación 4.12.8. *La regla de L'Hôpital no solo es válida para límites por la derecha, sino que lo es para todo tipo de límites de funciones: cuando $x \longrightarrow a^+$, $x \longrightarrow a^-$, $x \longrightarrow a$, $x \longrightarrow +\infty$ y $x \longrightarrow -\infty$.*

Nota 4.12.9.

1) *La condición "g y g' no se anula en (a,b) es para que tenga sentido hablar de las funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$ y $\frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

2) *Si no tenemos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, en general,*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Por ejemplo,

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x+4}{2x} = \frac{7}{2} \neq \lim_{x\to 1} \frac{(3x+4)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 1} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Ejemplo 4.12.10. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$.

Se trata de una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

Nota 4.12.11. *No es raro que tengamos que aplicar la regla de L'Hôpital más de una vez.*

Ejemplo 4.12.12. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3}$.

Es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hôpital, obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{3x^2}.$$

Y llegamos de nuevo a una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Aplicamos L'Hôpital dos veces más:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{6} = -\frac{1}{6}.$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Observación 4.12.13. *Muchas veces, indeterminaciones de la forma $\infty - \infty$ o $0\cdot(\pm\infty)$, se pueden expresar, mediante alguna sencilla manipulación, de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Esto nos permite utilizar L'Hôpital. Otras veces, utilizando la igualdad $\alpha^\beta = e^{\beta\ln(\alpha)}$, podemos trabajar con indeterminaciones de la forma 0^0, 1^∞ o ∞^0.*

Ejemplo 4.12.14. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Son tres indeterminaciones de la forma 0^0, 1^∞ y ∞^0, respectivamente.

En el primer caso, tenemos:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = e^0 = 1.$$

Procedemos de igual forma con los otros dos límites:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(x)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}}$$

Ahora, por L'Hôpital, tenemos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Luego

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

En el último,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

Pero, por L'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = e^1 = e.$$

Proposición 4.12.15. *Supongamos que f es derivable en $(a, a+\delta)$. Si existe $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$, entonces f es derivable por la derecha en a y se tiene*

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a^+} f'(x).$$

Demostración. Obsérvese que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

es una indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hôpital, se tiene

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f'(a+h)}{1} = \lim_{h\to 0^+} f'(a+h)$$

Hagamos: $x = a+h$, si $h \longrightarrow 0^+$, $x \longrightarrow a^+$. Por tanto

$$\lim_{h\to 0^+} f'(a+h) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$$

Así que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f'(a+h)}{1} = \lim_{x\to a^+} f'(x)$$

lo que prueba el resultado. $\square$

Observación 4.12.16. *El resultado análogo para calcular derivadas por la izquierda (o derivadas), también es cierto.*

Ejemplo 4.12.17. Estudiar la derivabilidad de la función $f(x) = \sin|x|$.

Lo primero que debemos hacer es estudiar la continuidad, teniendo en cuenta que las funciones $g(x) = |x|$ y $h(x) = \sin(x)$ son continuas en todo $\mathbb{R}$, se deduce que $f = g \circ h$ es continua.

Para estudiar la derivabilidad es conveniente escribir

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \geq 0 \\ \sin(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -\sin(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

puesto que la función seno es derivable, se deduce que f es derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ y que se tiene

$$f'(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x > 0 \\ -\cos(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Para la derivabilidad en cero aplicamos el resultado anterior, para lo que usamos

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \cos(x) = 1$$
$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \big(-\cos(x)\big) = -1.$$

Por tanto, f derivable por la derecha y la izquierda en el punto 0 y se tiene,

$$f'_+(0) = 1, \quad f'_-(0) = -1.$$

Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en 0.

Observación 4.12.18. *A la hora de aplicar el resultado anterior, hay que tener cuidado ya que puede ocurrir que no exista el límite*

$$\lim_{x \to a^+} f'(x).$$

y sin embargo la función sí sea derivable por la derecha. (La existencia de $f'_+(a)$ no garantiza la de $\lim_{x \to a^+} f'(x)$, es decir,

$$\exists \lim_{x \to a^+} f'(x) \Longrightarrow \exists f'_+(a)$$
$$\exists f'_+(a) \not\Longrightarrow \exists \lim_{x \to a^+} f'(x)\big).$$

El problema análogo también se puede presentar por la izquierda. Para evitar esto es mejor estudiar la existencia de derivadas laterales directamente por la definición.

Ejemplo 4.12.19. Estudiar la derivabilidad en cero de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } \; x \neq 0 \\ 0 & \text{si } \; x = 0 \end{cases}$$

Comenzamos estudiando la continuidad en cero, para ello teniendo en cuenta que

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1, \quad \forall\, x \neq 0$$

y que $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, se tiene

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0), \quad (\bigstar)$$

por tanto f es continua en 0.

Para la derivabilidad en 0 podemos tratar de aplicar el resultado anterior para lo cual usamos

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

para todo $x \neq 0$.

Observamos que análogamente a $(\bigstar)$, obtenemos

$$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

La función $x \longrightarrow \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en cambio no tiene límite cuando x tiende a cero, ni por la izquierda ni por la derecha ya que lo que hace es oscilar entre -1 y 1. Esto implica que no puede existir ninguno de los límites

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x), \qquad \lim_{x \to 0^-} f'(x)$$

Veamos que sin embargo, aunque no existe ninguno de los límites laterales de f' en cero, la función f es derivable en 0 y su derivada es cero. Usamos la definición de derivada que nos da

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0 = f'(0).$$

4.13. Aproximación polinómica local

Definición 4.13.1. *Sea f una función derivable en todos los puntos de un intervalo I. Si f' es derivable en $c \in I$, es decir, si existe y es finito*

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c},$$

éste se designa $f''(c)$ y se llama la derivada segunda de f en c.

*De igual forma se define la derivada tercera, cuarta, etc., que denotamos f''' o $f^{(3)}$, $f^{(4)}$, etc. (**derivadas sucesivas**).*

En general, la derivada $n-$ésima, $f^{(n)}$, donde n es un número natural.

Nota 4.13.2. *Las derivadas sucesivas de una función nos permiten aproximar localmente la función por un polinomio.*

4.13.1. Desarrollo de Taylor

Definición 4.13.3. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea f una función n veces derivable en un punto a. Llamamos **polinomio de Taylor de orden n en** a al polinomio*

$$P_n(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Ejemplo 4.13.4. Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 de $\ln(x)$ en el punto 1.

Por la definición, si denotamos $f(x) = \ln(x)$, el polinomio pedido es

$$P_3(x) = f(1) + \frac{(x-1)}{1!} f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!} f''(1) + \frac{(x-1)^3}{3!} f^{(3)}(1).$$

Por tanto, solamente tenemos que calcular las tres primera derivadas de $\ln(x)$ y evaluarlas en $x = 1$. Tenemos

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Con lo cual,

$$f(1) = \ln(1) = 0, \quad f'(1) = \frac{1}{1}, \quad f''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1, \quad f^{(3)}(1) = \frac{2}{1^3} = 2.$$

Así que,

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 0 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} 2 \\ &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3. \end{aligned}$$

Observación 4.13.5. *El polinomio de Taylor de orden n de f en a es el único polinomio de grado menor o igual que n que coincide con f en a hasta la derivada $n-$ésima, es decir, que cumple*

$$\begin{aligned} P_n(a) &= f(a) \\ P_n'(a) &= f'(a) \\ P_n''(a) &= f''(a) \\ P_n^{(3)}(a) &= f^{(3)}(a) \\ &\vdots \\ P_n^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) \end{aligned}$$

Nota 4.13.6. *El polinomio de Taylor de orden n de f en a "normalmente" tiene grado n, pero no siempre: si $f^{(n)}(a) = 0$, entonces su grado es estrictamente menor que n (ver el ejemplo siguiente).*

Ejemplo 4.13.7. Calcular el polinomio de Taylor de orden 5 de $\cos(x)$ en el punto 0.

Denotamos $g(x) = \cos(x)$, tenemos

$$g'(x) = -\sin(x), \quad g''(x) = -\cos(x), \quad g^{(3)}(x) = \sin(x),$$
$$g^{(4)}(x) = \cos(x), \quad g^{(5)}(x) = -\sin(x).$$

Por tanto,

$$\begin{array}{ll} g(0) = \cos(0) = 1, & g'(0) = -\sin(0) = 0, \\ g''(0) = -\cos(0) = -1, & g^{(3)}(0) = \sin(0) = 0, \\ g^{(4)}(0) = \cos(0) = 1, & g^{(5)}(0) = -\sin(0) = 0. \end{array}$$

Así, el polinomio de Taylor de orden 5 de $\cos(x)$ en 0 es el polinomio

$$\begin{aligned} P_5(x) = g(0) &+ \frac{(x-0)}{1!}g'(0) + \frac{(x-0)^2}{2!}g''(0) + \frac{(x-0)^3}{3!}g^{(3)}(0) \\ &+ \frac{(x-0)^4}{4!}g^{(4)}(0) + \frac{(x-0)^5}{5!}g^{(5)}(0). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$P_5(x) = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

4.13.2. Teorema de Taylor

Teorema 4.13.8 (Taylor). *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo I. Sea $a \in I$ y sea P_n el polinomio de Taylor de orden n de f en el punto a. Entonces, dado $x \in I$, $x \neq a$, existe un punto c entre a y x tal que*

$$f(x) - P_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k\,!} f^{(k)}(a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+1)}(c).$$

Observación 4.13.9. *El Teorema de Taylor nos dice que el error que cometemos al sustituir $f(x)$ por $P_n(x)$ es*

$$E(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+1)}(c).$$

En general, no sabemos exactamente cuál es el punto c. Por ello, tampoco podemos saber cuál es exactamente el valor de $E(x)$.

Lo que haremos normalmente es acotar $|E(x)|$ y así lo que tendremos es una cota del error que estamos cometiendo.

En efecto: Sea K el máximo valor de $|f^{(n+1)}(t)|$ para t entre a y x. Entonces

$$|E(x)| \leq \frac{K|x-a|^{n+1}}{(n+1)\,!}.$$

Otras formas de la fórmula de Taylor.

Proposición 4.13.10 (Taylor). *Si en el Teorema de Taylor anterior hacemos $x = a + h$, entonces existe $\theta \in (0,1)$ $(c = a + \theta h)$ tal que*

$$f(a+h) - P_n(a+h) = f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k\,!} f^{(k)}(a) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Además

$$\lim_{h \to 0} \frac{E(a+h)}{|h|^n} = 0.$$

Si $a = 0$ $(x = h)$,

$$f(x) - P_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k\,!} f^{(k)}(0) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+1)}(\theta h).$$

Esta última fórmula se conoce como la fórmula Mac-Laurin.

Ejemplo 4.13.11. Dar una cota del error que cometemos al considerar que el valor del número e es

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}. \qquad \left(e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k\,!}\right).$$

Observamos que $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$ es exactamente $P_5(1)$, donde $P_5(x)$ es el polinomio de Taylor de orden 5 de $f(x) = e^x$ en el punto 0. Por tanto se trata de acotar $|f(1) - P_5(1)|$.

Por el Teorema de Taylor sabemos que existe $c \in (0,1)$ tal que

$$f(1) - P_5(1) = \frac{f^{(6)}(c)}{6!}(1-0)^6$$

Por tanto, teniendo en cuenta que todas las derivadas de e^x coinciden con e^x, y que como $0 < c < 1$ tenemos $1 < e^c < e < 3$, deducimos

$$\begin{aligned} |f(1) - P_5(1)| &= \left| e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}\right)\right| \\ &= \left|\frac{f^{(6)}(c)}{6!}(1-0)^6\right| = \left|\frac{e^c}{6!}\right| < \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} \approx 0,004 \end{aligned}$$

4.14. Convexidad y concavidad

Definición 4.14.1. *Diremos que un subconjunto C de $\mathbb{R}$ es **convexo** si para todo $x, y \in C$, el segmento que une x con y está contenido en C, es decir, si $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$ para todo $\lambda \in [0,1]$.*

Ejemplo 4.14.2.

- Si C es un intervalo de $\mathbb{R}$, entonces C es un conjunto convexo
- El conjunto $C = [-1,2] \cup [3,4]$ no es convexo.

Definición 4.14.3. *Sea D un subconjunto convexo de $\mathbb{R}$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función:*

- *Se dice que f es **convexa** si para cada $x, y \in D$ y cada $\lambda \in [0,1]$ se tiene que*

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

- *Se dice que f es **convexa** si para $a, x, y \in D$ con $a < x < y$ se tiene*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

- *La función f se dice* ***estricтamente convexa*** *si*

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

para cada $x, y \in D$ con $x \neq y$, para cada $\lambda \in (0,1)$

Nota 4.14.4.

- ♦ *La noción de función convexa tiene su origen en la de conjuntos convexos.*
- ♦ *La funciones convexas son aquellas tales que el recinto del plano que queda encima de su gráfica es un conjunto convexo (véase la figura anterior).*

Proposición 4.14.5. *La función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si su epigrafo*

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x,y) \in D \times \mathbb{R} : \; f(x) \leq y\}$$

es convexo en $D \times \mathbb{R}$.

Cuando la función f es derivable, las derivadas son muy útiles para estudiar la convexidad.

Proposición 4.14.6. *Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1) *f es convexa en el intervalo I.*
2) *f' es creciente en el intervalo I.*
3) *$f'' \geq 0$ en el intervalo I.*
4) *Las rectas tangentes a la gráfica de f, en el intervalo I, se mantienen "debajo" de la gráfica, esto significa que para cada $x_0 \in I$*

$$f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x)$$

para cada $x \in I$.

La siguiente figura ilustra el significado de estas afirmaciones:

Ejemplo 4.14.7. Comprobara que $f(x) = x^3$ es convexa en $(0, +\infty)$ y deducir que si $a, b > 0$ entonces:

$$\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^3 \leq \frac{a^3}{2} + \frac{b^3}{2}.$$

Derivando tenemos $f'(x) = 3X^2$, $f''(x) = 6x$. Por tanto, $f''(x) = 6x > 0$ si $x \in (0, +\infty)$. Esto implica que f es convexa en $(0, +\infty)$.

Por la segunda parte, dados dos números $a, b > 0$, por ser f convexa,

$$f\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

para todo $\lambda \in [0,1]$. En particular, tomando $\lambda = \frac{1}{2}$, tenemos

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)$$

es decir,

$$\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^3 \leq \frac{a^3}{2} + \frac{b^3}{2}.$$

El concepto "simétrico" al de convexidad es el de concavidad.

Definición 4.14.8. *La función f es* ***cóncava*** *en el intervalo I si para cada par de puntos $x, y \in I$, se tiene:*

$$f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

para todo $\lambda \in [0,1]$.

Proposición 4.14.9. *La función f es cóncava en I si y solo si $-f$ es convexa en I.*

Naturalmente, la concavidad tiene un comportamiento análogo al de la convexidad.

Proposición 4.14.10. *Si la función f es derivable, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1) *f es cóncava en el intervalo I.*

2) *f' es decreciente en el intervalo I.*

3) *$f'' \leq 0$ en el intervalo I.*

4) *Las rectas tangentes a la gráfica de f, en el intervalo I, se mantienen "encima" de la gráfica, esto significa que para cada $x_0 \in I$*

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq f(x)$$

para cada $x \in I$.

La siguiente figura ilustra el significado de estas afirmaciones:

Ejemplo 4.14.11. Comprobar que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es cóncava en el intervalo $(0, +\infty)$ y deducir, a partir de la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1, f(1))$, que

$$\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$$

para todo $x > 0$.

En primer lugar, $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$. Así, $f''(x) < 0$ si $x \in (0, +\infty)$, luego f es cóncava en $(0, +\infty)$.

La recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1, f(1)) = (1, 1)$ es:

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

que, sustituyendo $f'(1)$ y $f(1)$ por sus valores, se transforma en la siguiente ecuación:

$$y = \frac{1}{2}(x-1) + 1.$$

Como f es cóncava en $(0, +\infty)$, esta recta tangente está por encima de la gráfica de f. Por tanto,

$$f(x) \leq \frac{1}{2}(x-1) + 1 = \frac{x+2}{2}$$

para todo $x > 0$, luego

$$\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$$

para todo $x > 0$.

Definición 4.14.12. *Sea $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $c \in (a,b)$. Se dice que f tiene un **punto de inflexión** en c si existe $\delta > 0$ tal que*

o bien f es convexa en $(c-\delta, c)$ y cóncava en $(c, c+\delta)$

o bien f es cóncava en $(c-\delta, c)$ y convexa en $(c, c+\delta)$.

Nota 4.14.13. *Los puntos puntos de inflexión, son los puntos en los que la función pasa de ser cóncava a ser convexa, o viceversa.*

Como consecuencia del punto 3 de las caracterizaciones de convexidad y concavidad, tenemos La condición necesaria para la existencia de punto de inflexión siguiente:

Proposición 4.14.14. *Si c es un punto de inflexión, entonces $f''(c) = 0$.*

Ejemplo 4.14.15. Estudiar la convexidad y la concavidad de $f(x) = x^4 - 8x^2 + 8$.

Tenemos $f'(x) = 4x^3 - 16x$ y $f''(x) = 12x^2 - 16$.

Así,

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow 12x^2 - 16 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{16}{12} \Longleftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{o} \quad x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Además,

$$f'' \leq 0 \ \text{ en } \left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right] \Longrightarrow f \ \text{ es cóncava en } \left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$$

$$f'' \geq 0 \ \text{ en } \left(-\infty, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$$

$$\Longrightarrow f \ \text{ es convexa en } \left(-\infty, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right).$$

Claramente, los puntos $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ y $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ son puntos de inflexión.

4.15. Máximos y Mínimos locales

Definición 4.15.1. *Sea f una función definida en un intervalo I, $c \in I$.*

*Se dice que f alcanza un **máximo local** (**o relativo**) en c si existe algún $\delta > 0$ tal que*

$$f(x) \leq f(c), \quad \text{para todo} \quad x \in (c - \delta, c + \delta) \subset I.$$

*(c es un **máximo local** de f en I).*

*Análogamente, se dice que f alcanza un **mínimo local** en c si existe algún $\delta > 0$ tal que*

$$f(c) \leq f(x), \quad \text{para todo} \quad x \in (c - \delta, c + \delta) \subset I.$$

*(c es un **mínimo local** de f en I).*

Definición 4.15.2. *Se dice que $c \in I$ es un **extremo local o (relativo)** de una función f si c es un máximo local o un mínimo local de f en I.*

4.15.1. Condición necesaria de extremos locales

La derivada es una herramienta excelente para encontrar los extremos locales, gracias al Teorema del Valor Medio, obtenemos el resultado siguiente:

Proposición 4.15.3 (Primer orden). *Sea f una función definida en un intervalo I y derivable en el punto $c \in I$.*

Si c es un extremo local de f, entonces $f'(c) = 0$.

Nota 4.15.4. *Si una función es derivable en I y queremos encontrar sus extremos locales, solo tenemos que buscarlos entre los ceros de la derivada.*

Teorema 4.15.5. *Sea $D \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto y convexo. Sea $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y derivable en un punto $c \in D$. Entonces,*

la función f admite un mínimo local en c si y sólo si $f'(c) = 0$

Definición 4.15.6. *Decimos que $c \in I$ es un* ***punto crítico*** *de f, si $f'(c) = 0$.*

Observación 4.15.7. ¡OJO! *Un punto crítico puede no ser extremo (por ejemplo el punto $x = 0$ para la función $f(x) = x^3$).*

Proposición 4.15.8 (Segundo orden). *Sea f una función definida en un intervalo I, dos veces derivable en $c \in I$, donde $c \in I$ un punto crítico de f.*

1) *Si f tiene un mínimo local en c, entonces $f''(c) \geq 0$.*

2) *Si f tiene un máximo local en c, entonces $f''(c) \leq 0$.*

Dada la función $f(x) = \cos(x)$ definida en el intervalo $[0, \pi]$. Sabemos que f alcanza su máximo en $c = 0$ y su mínimo en $c' = \pi$, puesto que $|\cos(x)| \leq 1$.

Como $f'(x) = -\sin(x)$ y $f''(x) = -\cos(x)$, se tiene que

$$f''(0) = -1 \leq 0 \quad \text{y} \quad f''(\pi) = 1 \geq 0.$$

Observación 4.15.9. *Si f tiene (por ejemplo) un máximo local en c y $f''(c)$ existe, esto no garantiza que $f''(c)$ sea negativa ($f''(c) < 0$), ya que podría perfectamente anularse ($f''(c) = 0$).*

Por ejemplo, con la función dada por $f(x) = -x^4$, ($c = 0$).

4.15.2. Condición suficiente de extremos locales

Proposición 4.15.10. *Sea f una función definida en un intervalo I, sean a, b, c puntos de I tales que $a < c < b$. Tenemos:*

$$\left.\begin{array}{lll} f & \textit{decreciente en} & (a,c] \\ & & \\ f & \textit{creciente en} & [c,b) \end{array}\right\} \Longrightarrow f \quad \textit{tiene un mínimo local en} \quad c$$

$$\left.\begin{array}{lll} f & \textit{creciente en} & (a,c] \\ & & \\ f & \textit{decreciente en} & [c,b) \end{array}\right\} \Longrightarrow f \quad \textit{tiene un máximo local en} \quad c$$

Ejemplo 4.15.11. Encontrar intervalos de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos locales de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

La función es un polinomio, por tanto, es continua y derivable en toda la recta real. Calculemos su derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2).$$

El signo de f' nos indica dónde crece y dónde decrece la función f.

- Puntos críticos de f: 0 y 2
- $f' \geq 0$ en $(-\infty, 0] \Longrightarrow f$ creciente en $(-\infty, 0]$
- $f' \leq 0$ en $[0,2] \Longrightarrow f$ decreciente en $[0,2]$
- $f' \geq 0$ en $[2,+\infty) \Longrightarrow f$ creciente en $[2,+\infty)$

Podemos representar la información que tenemos del siguiente modo:
Vemos claramente cuáles son los extremos locales:

$$\left.\begin{array}{lll} f & \text{creciente en} & (-\infty,0] \\ & & \\ f & \text{decreciente en} & [0,2] \end{array}\right\} \Longrightarrow f \quad \text{tiene un máximo local en} \quad 0$$

$$\left.\begin{array}{lll} f & \text{decreciente en} & [0,2] \\ & & \\ f & \text{creciente en} & [2,+\infty) \end{array}\right\} \Longrightarrow f \quad \text{tiene un mínimo local en} \quad 2$$

Ahora sustituimos para calcular $f(0)$ y $f(2)$. Obtenemos $f(0) = 3$ y $f(2) = -1$.

Ejemplo 4.15.12. Encontrar los intervalos de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos locales de la función $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$.

La función $f(x)$ es una función racional (es un cociente de polinomios), por tanto, continua y derivable en su dominio, que es toda la recta real excepto los puntos 2 y -2 (las raíces del denominador). Es decir, su dominio es $(-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$.

Calculemos la derivada de f:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-4)^2}.$$

La función f' tiene el mismo dominio de definición que f, es decir,

$$(-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$$

y también es continua.

Observamos que:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{-2x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longleftrightarrow -2x = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Luego el único punto crítico de f es 0.

Analizando el signo de f' tenemos:

- $f' \geq 0$ en $(-\infty,-2) \Longrightarrow f$ creciente en $(-\infty,-2)$
- $f' \geq 0$ en $(-2,0] \Longrightarrow f$ creciente en $(-2,0]$
- $f' \leq 0$ en $[0,2) \Longrightarrow f$ decreciente en $[0,2)$
- $f' \leq 0$ en $(2,+\infty) \Longrightarrow f$ decreciente en $(2,+\infty)$

Esquemáticamente, recogemos la información obtenida hasta ahora en el siguiente gráfico:

En visto de esto:

$$\left.\begin{array}{lll} f & \text{creciente en} & (-2,0] \\ & & \\ f & \text{decreciente en} & [0,2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f \quad \text{tiene un máximo local en} \quad 0$$

Sabemos que la función f es creciente en $(-\infty,-2)$, pero para saber qué valores toma, hemos de calcular el límite de f en los extremos del intervalo, es decir, debemos calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$. Lo mismo hemos de hacer en los otros intervalos.

Tenemos:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{0} \quad \text{(indeterminación)}$$

Analicemos con cuidado el límite anterior. Tenemos $x^2-4 = (x+2)(x-2)$, por tanto,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-2^-} (x^2-4) = 0 \\ \\ x^2-4 > 0 \quad \text{si} \quad x < -2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \lim_{x\to-2^-} \frac{1}{x^2-4} = +\infty$$

Análogamente,

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^+}(x^2-4)=0\\[2ex] x^2-4<0 \ \text{ si } \ -2<x<2\end{array}\right\} \implies \lim_{x\to -2^+}\frac{1}{x^2-4}=-\infty$$

De igual forma,

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x^2-4}=-\infty \ \text{ y } \ \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x^2-4}=+\infty$$

Por último,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

Recogemos esquemáticamente esta información en el siguiente gráfico:

Proposición 4.15.13. *Sea f una función definida en un intervalo I, dos veces derivable en $c\in I$, donde $c\in I$ un punto crítico de f.*

1) *Si $f''(c)>0$, entonces f tiene en c un mínimo local.*

2) *Si $f''(c)<0$, entonces f tiene en c un máximo local.*

Nota 4.15.14. *Si en algún momento olvidamos si se da el mínimo con $f''(c)>0$ o con $f''(c)<0$, una forma fácil de recordar es pensado en la función $f(x)=x^2$. Evidentemente, tiene un mínimo en $x=0$ y $f''\equiv 2>0$.*

Observación 4.15.15. *La* Proposición 4.15.10 *es más simple de usar ya que no se calcula la derivada segunda, además evita el problema siguiente: ¿qué ocurre si $f''(c)=0$?.*

Proposición 4.15.16. *Sea f una función con derivada de orden n en un intervalo I en cuyo interior está el punto a y tal que $f^{(n)}$ es continua en a, $f^{(n)}(a)\neq 0$ y $f''(a)=f'''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$. Entonces:*

1) *Si $f'(a)=0$, $f^{(n)}(a)>0$ y n es par, entonces f tiene en a un mínimo local.*

2) *Si $f'(a)=0$, $f^{(n)}(a)<0$ y n es par, entonces f tiene en a un máximo local.*

3) *Si n es impar ($f^{(n)}(a)\neq 0$), entonces f tiene en a un punto de inflexión.*

Es decir:

$$f'(a)=0 \Longrightarrow \begin{cases} f''(a)>0 & \textit{mínimo local} \\ f''(a)<0 & \textit{máximo local} \\ f''(a)=0 \Longrightarrow \begin{cases} f'''(a)\neq 0 & \textit{punto de inflexión} \\ f'''(a)=0 \Longrightarrow \begin{cases} f^{(4)}(a)>0 & \textit{mínimo local} \\ f^{(4)}(a)<0 & \textit{máximo local} \\ f^{(4)}(a)=0 & \cdots\cdots \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

4.16. Extremos absolutos

Definición 4.16.1. *Sea f una función definida en un conjunto D que contiene al número c. Entonces*

1) *f tiene un **máximo global** (**o absoluto**) en $x=c$ si*

$$f(x)\leq f(c) \quad \textit{para todo} \ \ x\in D$$

2) *f tiene un **mínimo global** (**o absoluto**) en $x=c$ si*

$$f(c)\leq f(x) \quad \textit{para todo} \ \ x\in D$$

*Los máximos y mínimos absolutos, denominados colectivamente **extremos absolutos**, especialmente cuando queremos evitar toda posible confusión con los **extremos relativos**.*

Ejemplo 4.16.2. La función $f(x)=x^2$ tiene en $x=0$ un mínimo absoluto, pues

$$0=f(0)\leq f(x)=x^2$$

para todo $x\in\mathbb{R}$. Sin embargo, f no tiene máximo absoluto, ya que no está acotada superiormente.

En el intervalo $[-2,2]$ la función f sí tiene un máximo absoluto. Está claro que:

$$f(x)=x^2\leq 4=f(-2)=f(2)$$

para todo $x\in[-2,2]$. Esto nos dice que, en el intervalo $[-2,2]$, la función f alcanza su máximo absoluto en los puntos -2 y 2.

4.16.1. ¿Cómo determinar los extremos absolutos en un intervalo I?

Supongamos que f tiene un extremo absoluto en c.

Si c no es punto extremo del intervalo I (por ejemplo, $I = [a, b]$, $c \notin \{a, b\}$), entonces f tiene también un extremo local en c.

Por tanto según la Proposición 4.15.3, si f es derivable en c se debe cumplir $f'(c) = 0$.

Nota 4.16.3. *En el argumento anterior es importante el hecho de que c no sea un extremo del intervalo I. Nótese que en el* Ejemplo 4.16.2 *la función tiene extremos absolutos en -2 y en 2 ($I = [-2, 2]$) y, sin embargo, no son puntos críticos.*

Como se ve, la derivada es una herramienta excelente para encontrar los extremos absolutos de una función. *Solamente hay un caso en que no nos puede ayudar: cuando no existe.*

Nota 4.16.4. *Dada una función f en un intervalo I, para encontrar sus extremos absolutos debemos buscar entre:*

1) *Los puntos críticos (aquellos puntos en que la función es derivable y su derivada es 0).*

2) *Los extremos del intervalo I (si pertenecen a I, por supuesto).*

3) *Los puntos en que la función f no es derivable (si es que existe alguno).*

Observación 4.16.5. ¡Ojo! *Hemos dicho que tenemos que buscar los extremos "entre" estos puntos, esto es, de los demás podemos olvidarnos, pero en ningún momento hemos dicho que estos puntos tengan necesariamente que ser extremos: pueden serlo o no.*

Ejemplo 4.16.6. Hallar el máximo y el mínimo de la función $f(x) = \frac{|x-1|}{e^x}$ en el intervalo $[-3, 3]$.

En primer lugar, notemos que la existencia de máximos y mínimos está garantizada puesto que f es una función continua en el intervalo cerrado y acotado $[-3, 3]$ (véase el Teorema de Weierstrass 3.19.12).

Para saber qué valor toman y dónde se alcanzan estos extremos, utilizamos la derivada.

Observemos que

$$f(x) = \frac{|x-1|}{e^x} = \begin{cases} \frac{1-x}{e^x} & \text{si } x \in [-3, 1] \\ \\ \frac{x-1}{e^x} & \text{si } x \in [1, 3] \end{cases}$$

Por tanto, f es derivable en todos los puntos salvo, quizá, en $x = 1$. Calculamos f'. Tenemos:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{e^x} & \text{si } \ x \in [-3, 1) \\ \\ \frac{2-x}{e^x} & \text{si } \ x \in (1, 3] \end{cases}$$

Así, el único punto crítico es $x = 2$. Por tanto, tenemos que los extremos absolutos de f se tienen que alcanzan en alguno de los puntos siguientes:

- El punto $x = 2$ (punto crítico de f).
- El punto $x = 1$ (punto en el que quizás la función f no sea derivable).
- Los puntos $x = -3$ y $x = 3$ (extremos del intervalo).

Evaluemos f en esos puntos:

$$f(2) = \frac{1}{e^2}, \quad f(1) = 0, \quad f(-3) = 4e^4 \ \text{ y } \ f(3) = \frac{2}{e^3}.$$

El máximo de estos valores es $f(-3) = 4e^4$ y el mínimo, $f(1) = 0$. Por tanto, estos son los valores máximos y mínimos de la función f en el intervalo $[-3, 3]$, y se alcanzan en los puntos $x = -3$ y $x = 1$, respectivamente.

Ejemplo 4.16.7. Hallar, si existen, los extremos absolutos de $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

La función f está definida y es derivable en el intervalo abierto $(0, +\infty)$. Por tanto, si tiene algún extremo absoluto, lo alcanza en un punto crítico.

Tenemos:

$$f'(x) = \frac{\big(\ln(x)\big)' x - \big(\ln(x)\big)(x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

De modo que

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1 - \ln(x)}{x^2} &= 0 \Longleftrightarrow 1 - \ln(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow 1 = \ln(x) \Longleftrightarrow x = e. \end{aligned}$$

Luego el único posible punto de extremo absoluto es e.

Como el intervalo no es un cerrado y acotado, no podemos utilizar el Teorema de Weierstrass 3.19.12. Con lo cual, en principio, no tenemos asegurado que f alcance máximo o mínimo. No queda más remedio que estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función.

Como f' es continua y solo se anula en e, su signo es constante en los intervalos $(0, e)$ y $(e, +\infty)$ (Teorema de Bolzano). Evaluando en algún punto de cada uno de estos intervalos, por ejemplo en $x = 1$ y $x = e^2$, deducimos que:

$$f' \geq 0 \quad \text{en} \quad (0, e] \quad \text{y} \quad f' \leq 0 \quad \text{en} \quad [e, +\infty)$$

Por tanto,

$$\left.\begin{array}{ll} f \text{ creciente en} & (0, e] \\ & \\ f \text{ decreciente en} & [e, +\infty) \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ tiene un máximo absoluto en } \; x = e$$

Luego

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \leq f(e) = \frac{1}{e}$$

para todo $x \in (0, +\infty)$.

Por otra parte, f no tiene mínimo absoluto, ya que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Teorema 4.16.8. *Sea $D \subset \mathbb{R}$ un conjunto convexo.*

Si la función $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa y $c \in D$ es un mínimo local de f, entonces c es mínimo global de f.

Además, si la función f es estrictamente convexa, el mínimo es único.

Proposición 4.16.9. *Sean D un abierto convexo de $\mathbb{R}$, y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa. Supongamos que f es derivable en $c \in D$, y que $f'(c) = 0$. Entonces f tiene un mínimo absoluto en c.*

Nota 4.16.10. *Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa, entonces f es continua.*

Si I es cerrado, la convexidad no implica la continuidad sobre I, ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \textit{si} \;\; x \in [-1, 1] - \{0\} \\ & \\ 1 & \textit{si} \;\; x = 0 \end{cases}$$

Proposición 4.16.11. *Sea $D \subset \mathbb{R}$ un convexo cerrado no vacío y $f \colon D \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ una función convexa, continua y $f \not\equiv +\infty$ tal que*

$$\lim_{\substack{x \in D \\ |x| \to \infty}} f(x) = +\infty \quad (\textit{ninguna hipótesis si } D \textit{ es acotado}).$$

Entonces f alcanza su mínimo sobre D.

4.16.2. Aplicaciones: “Maximizar” y “Minimizar”

Hemos aprendido a localizar extremos absolutos. Esto tiene gran cantidad de aplicaciones, pues muchos problemas prácticos se formulan en términos de máximos y mínimos. Pensemos, por ejemplo, que habitualmente se quiere “maximizar” los beneficios y “minimizar” los costes.

Ejemplo 4.16.12. Un fabricante hace latas de aluminio de forma cilíndrica, de 16 cm^3 de volumen. Hallar las dimensiones de la lata para que la cantidad de material empleada sea mínima.

Denotemos r al radio de la base y h a su altura. El volumen será:

$$V(r) = 16 = \pi r^2 h$$

y su superficie (la de tapas más la superficie lateral)

$$S(r) = 2(\pi r^2) + 2\pi r h$$

Si despejamos h en la primera igualdad, tenemos

$$16 = \pi r^2 h \Longleftrightarrow h = \frac{16}{\pi r^2}$$

Sustituyendo h en la expresión de la superficie, nos queda

$$S(r) = 2(\pi r^2) + 2\pi r \frac{16}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{32}{r}$$

Por tanto, se trata de encontrar el mínimo de la función

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{32}{r},$$

donde, naturalmente, $r \in (0, +\infty)$.
Calculemos la derivada:

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{32}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 32}{r^2}.$$

Por tanto,

$$S'(r) = 0 \Longleftrightarrow \frac{4\pi r^3 - 32}{r^2} = 0 \Longleftrightarrow 4\pi r^3 = 32 \Longleftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{8}{\pi}}$$

Luego, si S tiene mínimo absoluto en $(0, +\infty)$, solamente puede alcanzarlo en $r_0 = \sqrt[3]{\frac{8}{\pi}}$. A partir del signo de S' confirmamos que, efectivamente, S alcanza su máximo en $r_0 = \sqrt[3]{\frac{8}{\pi}}$, pues $S' < 0$ en $(0, r_0)$ y $S' > 0$ en $(r_0, +\infty)$. La altura correspondiente es

$$h_0 = \frac{16}{\pi r_0^2} = \frac{16}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{8}{\pi}}\right)^2} = 2\sqrt[3]{\frac{8}{\pi}}$$

Luego la lata tendrá las dimensiones siguientes:

radio de la base:

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{8}{\pi}} \text{ cm} \approx 1,36 \text{ cm}$$

altura:

$$h_0 = 2\sqrt[3]{\frac{8}{\pi}} \text{ cm} \approx 2,72 \text{ cm}$$

Ejemplo 4.16.13. Una ventana de forma rectangular, rematada por un arco de medio punto, tiene u perímetro de 12 metros. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que su superficie sea lo mayor posible?

Denotemos x al ancho de la ventana e y a la altura del rectángulo. El perímetro es

$$12 = \frac{2\pi\left(\frac{x}{2}\right)}{2} + 2y + x$$

y su área

$$A(x) = xy + \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}.$$

Si despejamos y en la primera igualdad, obtenemos

$$12 = \pi\frac{x}{2} + 2y + x \Longrightarrow y = \frac{1}{2}\left(12 - x - \pi\frac{x}{2}\right) = 6 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x.$$

Por tanto, sustituyendo y en la expresión del área, vemos que lo que queremos es obtener el máximo de la función

$$A(x) = x\left(6 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x\right) + \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = 6x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x^2$$

donde, naturalmente, $x \in (0, +\infty)$. La gráfica de A es una parábola "hacia abajo", luego alcanza su máximo en su único punto crítico. Vamos a calcularlo:

$$A'(x) = 6 - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x.$$

Por tanto,

$$A'(x) = 0 \Longleftrightarrow 6 - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{6}{2\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)} = \frac{24}{4 + \pi} \approx 3,36.$$

Con lo que $x_0 = \frac{24}{4+\pi} \approx 3,36$ ha de ser el ancho de la ventana (en metros).

La altura del rectángulo correspondiente es:

$$y_0 = 6 - \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{\pi}{2}\Big)x_0 = 6 - \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{\pi}{2}\Big)\frac{24}{4+\pi} = \frac{12}{4+\pi} \approx 1,68.$$

De modo que la ventana debe tener las dimensiones siguientes:

Ancho:

$$x_0 = \frac{24}{4+\pi} \approx 3,36 \text{ m}$$

Altura:

$$y_0 = \frac{12}{4+\pi} \approx 1,68 \text{ m}$$

4.17. Asíntotas

Definición 4.17.1. *Una asíntota es una recta a la que se va aproximando una curva. Hay tres tipos de asíntotas:*

1) *Decimos que la recta* $\boldsymbol{x = a}$ *es una* ***asíntota vertical*** *de la gráfica de la función f si se cumple alguna de las igualdades siguientes:*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad o \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

(*o ambas igualdades a la vez*).

2) *Decimos que la recta* $\boldsymbol{y = l}$ *es una* ***asíntota horizontal*** *de la gráfica de la función f si*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l \quad o \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = l$$

3) *Decimos que la recta* $\boldsymbol{y = mx + b}$ *es una* ***asíntota oblicua*** *de la gráfica de la función f si*

$$\lim_{x\to +\infty} \big[f(x) - (mx+b)\big] = 0 \quad o \quad \lim_{x\to -\infty} \big[f(x) - (mx+b)\big] = 0$$

Nota 4.17.2. *Si una función admite una asíntota oblicua, entonces* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. *Pero esto no basta, por ejemplo, $f(x) = x^2$ verifica la igualdad anterior y no tiene asíntotas oblicuas.*

Proposición 4.17.3. *La recta $y = mx + b$ es asíntota de la gráfica de f en $+\infty$ si y solamente si*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad y \quad \lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - mx\big] = b$$

Análogamente, para $-\infty$.

Ejemplo 4.17.4. Hallar las asíntotas de la función $f(x) = \frac{3x^2-x+2}{x-1}$.

La función es continua en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Estudiemos los límites en los extremos de los intervalos.

$$\lim_{x\to1^-} \frac{3x^2 - x + 2}{x - 1} = \frac{4}{0} \quad \text{(indeterminación)}.$$

Como $x - 1 < 0$ si $x < 1$, tenemos

$$\lim_{x\to1^-} \frac{3x^2 - x + 2}{x - 1} = -\infty.$$

Luego $x = 1$ es una asíntota vertical. Análogamente,

$$\lim_{x\to1^+} \frac{3x^2 - x + 2}{x - 1} = +\infty.$$

Luego $x = 1$ es también una asíntota vertical cuando "nos acercamos a $x = 1$ desde la derecha", pero observemos que ahora acercamos "al otro extremo de la recta".

Veamos qué ocurre en $+\infty$ y en $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x - 1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{3(+\infty) - 1 + 0}{1 - 0} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x - 1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{3(-\infty) - 1 + 0}{1 - 0} = -\infty.$$

Como los límites de f cuando $x \longrightarrow +\infty$ y $x \longrightarrow -\infty$ son infinitos, no hay asíntotas horizontales. ¿Habrá asíntotas oblicuas?. Tenemos que calcular el límite de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

► En $+\infty$, tenemos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{x(x - 1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 3$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - 3x\big] &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x^2 - x + 2}{x - 1} - 3x\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x + 2}{x - 1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}}\right) = 2\end{aligned}$$

Luego $y = 3x + 2$ es una asíntota de f cuando $x \longrightarrow +\infty$.

▶ Análogamente se comprueba que también es una asíntota de f cuando $x \longrightarrow -\infty$.

Ejemplo 4.17.5. Estudiar si la gráfica de $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ tiene asíntotas.

La función f está definida y continua en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Hallemos el límite en los extremos de estos intervalos. Tenemos:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{x}\right)} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to +\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)} = e^{0} = 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to -\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)} = e^{0} = 1$$

Por tanto, $x = 0$ es una asíntota vertical e $y = 1$ una asíntota horizontal.

4.18. Esquema-Resumen para la representación gráfica de funciones

1) Determinar el dominio de f y expresarlo como unión de intervalos.

2) Estudiar si la gráfica de f tiene algún tipo de simetría (véase Nota al final).

3) Estudiar la continuidad de f y ver qué ocurre en los puntos de discontinuidad.

4) Estudiar el comportamiento de f al acercarnos a los extremos de los intervalos que componen su dominio. En particular, en $+\infty$ y $-\infty$. Asíntotas.

5) Determinar los puntos de corte con los ejes ($f(0)$ y soluciones de $f(x) = 0$).

6) Si f es una función definida a trozos, estudiarla en cada trozo. Hay que ser especialmente cuidados en los "empalmes".

7) Estudiar f': ¿dónde existe?, ¿qué signo tiene?, puntos críticos ... Esto permite obtener:
   - Intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
   - Extremos locales.

8) Estudiar f'': ¿dónde existe?, ¿qué signo tiene?, ¿dónde se anula?. Esto permite:
   - Saber si los puntos críticos son máximos o mínimos locales.
   - Obtener los intervalos de convexidad y concavidad.
   - Encontrar los puntos de inflexión.

9) Elaborar una tabla resumiendo la información obtenida y evaluando f en algunos puntos clave (extremos locales, puntos de inflexión ...).

10) Dibujar la gráfica.

Nota 4.18.1. *Hay dos simetrías muy conocidas:*

1) *Si f es par, es decir, $f(x) = f(-x)$ para todo x, entonces la gráfica f es simétrica respecto del eje OY (por ejemplo, los polinomios que tiene solamente exponentes pares, o la función coseno).*

2) *Si f es impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$ para todo x, entonces la gráfica de f es simétrica respecto del origen (por ejemplo, los polinomios que tienen solamente exponentes impares, o la función seno).*