SERIE
SCHAUM

MATRICES

FRANK AYRES, JR.

TEORIA Y
340
PROBLEMAS RESUELTOS

schaum·mcgraw-hill
schaum·mcgraw-hill
schaum·mcgraw-hill
schaum·mcgraw-hill
schaum·mcgraw-hill
schaum·mcgraw-hill
schaum·mcgraw-hill

SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM

TEORIA Y PROBLEMAS

DE

MATRICES

FRANK AYRES, JR., Ph. D.

Ex Profesor y Director del Departamento de Matemáticas

Dickinson College

TRADUCCION Y ADAPTACION

LUIS GUTIÉRREZ DÍEZ

Ingeniero de Armamento

ANGEL GUTIÉRREZ VÁZQUEZ

Ingeniero de Armamento
Licenciado en Ciencias Físicas
Diplomado en Ingeniería Nuclear

McGRAW-HILL

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • GUATEMALA • LISBOA • MADRID
NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • JOHANNESBURGO • LONDRES • MONTREAL
NUEVA DELHI • PARÍS • SAN FRANCISCO • SINGAPUR
ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

MATRICES

LIBROS McGRAW-HILL DE MÉXICO, S. A. de C. V.
Atlacomulco 499-501, Fracc. Industrial San Andrés Atoto
53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 465

ISBN 968-451-190-6

Traducido de la primera edición en inglés de
MATRICES

ISBN 0-07-002656-4

2109876543 LINSA-70 8012346795

Impreso en México Printed in Mexico

Esta obra se terminó de
imprimir en Junio de 1985
en Ultragráfica, S. A. de C. V.
Calle 13 No. 944
Col. Urbana
Delegación Iztapalapa
09310 México, D. F.

Se tiraron 3 700 ejemplares

Prólogo

El álgebra matricial se ha convertido en una parte integrante de los conocimientos de matemáticas, necesarios en campos tan diversos como la ingeniería eléctrica, la pedagogía, la química y la sociología, así como la estadística y la matemática pura. El propósito de este libro de matrices es, en primer lugar, servir de complemento a los libros de texto básicos, pero será igualmente útil como libro de consulta para todos aquellos que por su trabajo y estudio necesiten unos conocimientos prácticos de cálculo matricial. Sin embargo, la teoría expuesta es lo suficientemente amplia y completa para que este libro pueda ser utilizado de por sí como texto propiamente dicho.

La obra se ha dividido en veintiséis capítulos, sin que por ello se altere la secuencia lógica del tema, y, en cambio, se tiende a aumentar la utilidad del libro como obra de consulta. Además, ello ha permitido separar el estudio de las matrices en el campo real —con el que la mayoría de los alumnos universitarios y de escuelas técnicas están familiarizados— y el de las matrices en el campo complejo. Cada capítulo comienza con las definiciones, principios y teoremas pertinentes, ampliamente ilustrados con ejemplos muy diversos. Sigue, a continuación, una colección de problemas cuidadosa y totalmente resueltos y, por último, un considerable número de problemas propuestos.

Al comenzar el estudio del álgebra de matrices, la resolución de los primeros ejercicios resulta para el estudiante extremadamente sencilla. Sin embargo, lo más probable es que surjan dificultades al tratar de resolver problemas teóricos o al intentar hacer demostraciones. Ello, naturalmente, ocurre por falta de madurez matemática, pues en general el estudiante, al iniciar el estudio del álgebra de matrices, no se ha ejercitado más que con problemas de matemáticas numéricos, y técnicas fáciles de asimilar, ya que el establecimiento riguroso de los principios y teoremas se relega a los últimos cursos. El propósito de este libro —siempre que el estudiante se aprenda a fondo la teoría preliminar y los problemas resueltos de cualquier capítulo— es proporcionarle una seguridad suficiente en sí mismo en relación con la materia tratada.

Los problemas resueltos, además de proporcionar una mayor variedad a los ejemplos ilustrativos de los teoremas, contienen más o menos detalladamente la mayoría de las demostraciones. Los problemas enunciados exigirán la solución de los ejercicios numéricos y el desarrollo de las demostraciones. Algunas de éstas solo requieren las correspondientes modificaciones de otras demostraciones expuestas anteriormente, pero lo más importante son los muchos teoremas fundamentales, cuyo desarrollo solo requiere unas pocas líneas. Aunque algunas demostraciones parezcan fáciles y otras muy difíciles, ninguna debe ser estudiada con ligereza, pues precisamente la abundancia de tales teoremas en el álgebra elemental de matrices es lo que constituye un buen primer curso para quienes tratan de conseguir la necesaria madurez matemática. Como el elevado número de problemas en cualquier capítulo hace impracticable la resolución de todos ellos antes de pasar al capítulo siguiente, se dedica una atención especial a los problemas enunciados en los dos primeros. El dominio de los problemas de estos dos capítulos dará al alumno la seguridad necesaria para resolver después los demás problemas del libro.

El autor desea aprovechar esta oportunidad para expresar su sincero agradecimiento a los directivos de la Schaum Publishing Company por su espléndida cooperación.

FRANK AYRES, JR.

Tabla de materias

Capítulo 1

Matrices

UNA ORDENACION DE NUMEROS, dispuestos en filas y columnas, encerrados entre corchetes, como, por ejemplo,

$$(a)\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad (b)\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix},$$

y que verifiquen ciertas reglas o álgebra se llama *matriz*. La matriz (a) es la *matriz de los coeficientes* del sistema homogéneo de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x+3y+7z=0 \\ x-\ y+5z=0 \end{cases}$ o bien la *matriz ampliada* con los términos independientes del sistema no homogéneo de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x-\ y=5 \end{cases}$. Más adelante veremos como se aplican las matrices en relación con estos sistemas de ecuaciones. La matriz (b) es susceptible de una interpretación análoga, pero también se puede considerar que sus filas son, simplemente, las coordenadas de ciertos puntos (1, 3, 1), (2, 1, 4) y (4, 7, 6) en un espacio tridimensional. Otra de las aplicaciones que también veremos posteriormente es la resolución de cuestiones como, por ejemplo, averiguar si tres puntos están o no situados en un plano, o en una recta, etc.

En la matriz,

$$(1.1)\qquad \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \,\ldots\ldots\ldots\, a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \,\ldots\ldots\ldots\, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, a_{m2}\, a_{m3} \,\ldots\ldots\ldots\, a_{mn} \end{bmatrix}$$

los números, o funciones, a_{ij} se llaman *elementos* de la misma. El primero de los subíndices indica la fila y el segundo la columna a las que pertenece dicho elemento. Así, pues, todos los elementos de la segunda fila se caracterizan, en esta notación, por tener un 2 como primer subíndice, y el segundo subíndice de la columna quinta es el 5. Una matriz de m filas y n columnas es de orden «m por n» o bien $m \times n$.

(También se representa a las matrices por medio de paréntesis, ( ), o de barras, ‖ ‖. En este libro se emplea la notación entre corchetes.)

La matriz (1.1) se puede representar esquemáticamente por «matriz $[a_{ij}]$, $m \times n$», o bien, «matriz $A = [a_{ij}]$, $m \times n$». Cuando no existan dudas acerca del orden de una matriz, la representaremos simplemente por una letra mayúscula, por ejemplo, «matriz A».

MATRICES CUADRADAS. Cuando $m = n$, (1.1) se llama *matriz cuadrada* de orden n.

En una matriz cuadrada, la *diagonal principal* es la línea formada por los elementos a_{11}, a_{22}, $\ldots$, a_{nn}.

La suma de los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada A se llama *traza* de la misma.

IGUALDAD DE MATRICES. La condición necesaria y suficiente para que dos matrices, $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$, sean *iguales* ($A = B$) es que tengan el mismo orden y que cada uno de los elementos de una de ellas sea igual al correspondiente de la otra, esto es,

$$a_{ij} = b_{ij}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

En otras palabras, dos matrices son iguales solo cuando una es «copia» de la otra.

MATRIZ NULA. Una matriz que tenga nulos todos sus elementos se llama *matriz nula*. En el caso de que una matriz A sea nula y no haya lugar a confusiones con respecto a su orden, escribiremos simplemente $A = 0$, en lugar de la disposición $m \times n$ con sus elementos iguales a cero.

SUMA ALGEBRAICA DE MATRICES. Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ dos matrices de orden $m \times n$; la suma o diferencia de ambas, $A \pm B$, es otra matriz $C = [c_{ij}]$, de orden $m \times n$, en la que cada elemento de C es igual a la suma o diferencia de los elementos correspondientes de A y B. Así, pues, $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]$.

Ejemplo 1. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ se tiene

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+3 & 3+0 \\ 0+(-1) & 1+2 & 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

y

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & 2-3 & 3-0 \\ 0-(-1) & 1-2 & 4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dos matrices del mismo orden se llaman *conformes* respecto de la suma algebraica. Dos matrices de distinto orden no se pueden sumar ni restar.

La suma de k matrices A es otra matriz del mismo orden que A cuyos elementos son iguales a los correspondientes de A multiplicados por k. Por definición, si k es un *escalar* cualquiera (decimos que k es un escalar para distinguirlo de $[k]$, que es una matriz de orden 1×1) la expresión $kA = Ak$ significa la matriz obtenida al multiplicar por k cada uno de los elementos de A.

Ejemplo 2. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, se tiene

$$A + A + A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} = 3A = A \cdot 3$$

y

$$-5A = \begin{bmatrix} -5(1) & -5(-2) \\ -5(2) & -5(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -10 & -15 \end{bmatrix}$$

En particular, $-A$, que se llama matriz *opuesta* a A, representa la matriz que se obtiene al multiplicar cada uno de los elementos de A por el escalar -1, es decir, cambiando de signo *todos* sus elementos. Cualquiera que sea A, $A + (-A) = 0$, siendo 0 la matriz nula del mismo orden que A.

Suponiendo que las matrices A, B, C sean del mismo orden:

(*a*) $A + B = B + A$ (propiedad conmutativa)
(*b*) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (propiedad asociativa)
(*c*) $k(A + B) = kA + kB = (A + B)k$, k un escalar
(*d*) Existe una matriz D tal que $A + D = B$.

Estas propiedades son consecuencia de las correspondientes a la suma de números y polinomios del álgebra elemental. De ellas se deduce también:

1. Las matrices del mismo orden, o conformes respecto de la suma algebraica, obedecen a las mismas leyes de la adición que los elementos de que se componen.

MULTIPLICACION DE MATRICES. El producto AB, *en este orden*, de una matriz de orden $1 \times m$, $A = [a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1m}]$, por otra de orden $m \times 1$,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{m1} \end{bmatrix}$$

es otra matriz de orden 1×1, $C = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{1m}b_{m1}]$.

Esto es, $$[a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1m}] \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{m1} \end{bmatrix} = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1m}b_{m1}] = \left[\sum_{k=1}^{m} a_{1k}b_{k1}\right].$$

Obsérvese que la operación hay que hacerla multiplicando *la fila por la columna*; cada elemento de la fila se multiplica por el correspondiente de la columna y, a continuación, se suman los productos obtenidos. Esta operación se llama producto escalar de la fila por la columna.

Ejemplo 3. (*a*) $[2\ 3\ 4]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = [2(1)+3(-1)+4(2)] = [7]$

(*b*) $[3\ -1\ 4]\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = [-6-6+12] = 0$

El producto AB, *en este orden*, de la matriz de orden $m \times p$, $A = [a_{ij}]$ por otra de orden $p \times n$, $B = [b_{ij}]$ es otra matriz de orden $m \times n$, $C = [c_{ij}]$, tal que orden = nº filas (A) × nº columnas (B)

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}, \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Teniendo en cuenta que A consta de m filas y B de n columnas, para obtener el producto $C = AB$ se multiplica cada fila de A por todas y cada una de las columnas de B. El elemento c_{ij} de C es, pues, el producto escalar de la fila i de A por la columna j de B.

Ejemplo 4.

$$\underset{3\times 2}{A}\ \underset{2\times 2}{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \overset{3\times 2}{\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}}$$

El producto AB está definido, o sea, A es *conforme* con B respecto de la multiplicación, cuando el número de columnas de A es igual al de filas de B. Si el producto AB está definido (A conforme con B) no significa que B sea necesariamente conforme con A respecto de la multiplicación (BA puede o no estar definido). Véanse Problemas 3-4.

Suponiendo que A, B, C son matrices conformes respecto de la suma algebraica y producto se tiene

(*e*) $A(B + C) = AB + AC$ (primera propiedad distributiva)
(*f*) $(A + B)C = AC + BC$ (segunda propiedad distributiva)
(*g*) $A(BC) = (AB)C$ (propiedad asociativa)

Sin embargo,

(*h*) $AB \neq BA$, en lo general,
(*i*) $AB = 0$ no implica necesariamente que $A = 0$ o $B = 0$,
(*j*) $AB = AC$ no implica necesariamente que $B = C$.

Véanse Problemas 3-8.

PRODUCTOS POR SUBDIVISION EN CAJAS. Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden $m \times p$ y $B = [b_{ij}]$ de orden $p \times n$. Para efectuar el producto AB, la matriz A se puede dividir en m submatrices de orden $1 \times p$ y B en n submatrices de orden $p \times 1$. Esta es una posible subdivisión, pero no la única. Por ejemplo, las matrices A y B se han descompuesto en las submatrices o cajas de los órdenes indicados por medio de las líneas de trazos:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} (m_1 \times p_1) & (m_1 \times p_2) & (m_1 \times p_3) \\ \hline (m_2 \times p_1) & (m_2 \times p_2) & (m_2 \times p_3) \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} (p_1 \times n_1) & (p_1 \times n_2) \\ \hline (p_2 \times n_1) & (p_2 \times n_2) \\ \hline (p_3 \times n_1) & (p_3 \times n_2) \end{array}\right]$$

o bien $$A = \overset{2\times 3}{\left[\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array}\right]}, \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \\ \hline B_{31} & B_{32} \end{array}\right]^{3\times 2}$$

Para efectuar una de estas subdivisiones, es necesario que las columnas de A y las filas de B se subdividan, exactamente, de la misma forma; sin embargo, m_1, m_2, n_1, n_2 pueden ser números enteros cualesquiera no negativos (incluido el 0), de manera que $m_1 + m_2 = m$ y $n_1 + n_2 = n$.

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = C$$

Ejemplo 5. Hallar AB, siendo $A = \overset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$ y $B = \overset{3\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}}$

Efectuando la subdivisión en cajas

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right]^{2\times 2} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right]^{2\times 2},$$

resulta $$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}[2 \;\; 3 \;\; 1] & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}[2] \\ [1 \;\; 0]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + [1][2 \;\; 3 \;\; 1] & [1 \;\; 0]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [1][2] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [1 \;\; 1 \;\; 1] + [2 \;\; 3 \;\; 1] & [0] + [2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [3 \;\; 4 \;\; 2] & [2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Véase, también, el Problema 9.

Sean $A, B, C, \ldots n$ matrices cuadradas. Descompongamos de la misma forma cada una de ellas en cajas, como se observa en la matriz A con los órdenes indicados:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} (p_1 \times p_1) & (p_1 \times p_2) & \ldots & (p_1 \times p_s) \\ \hline (p_2 \times p_1) & (p_2 \times p_2) & \ldots & (p_2 \times p_s) \\ \hline \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \hline (p_s \times p_1) & (p_s \times p_2) & \ldots & (p_s \times p_s) \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{s1} & A_{s2} & \ldots & A_{ss} \end{bmatrix}$$

La suma algebraica y los productos se pueden obtener utilizando las submatrices de las cajas A_{11}, A_{12}, $\ldots$, B_{11}, B_{12}, $\ldots$; C_{11}, C_{12}, $\ldots$.

PROBLEMAS RESUELTOS

√**1.** (*a*) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+(-4) & -1+1 & 0+2 \\ 4+1 & 0+5 & 2+0 & 1+3 \\ 2+2 & -5+(-2) & 1+3 & 2+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & -7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

(*b*) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & 2+4 & -1-1 & 0-2 \\ 4-1 & 0-5 & 2-0 & 1-3 \\ 2-2 & -5+2 & 1-3 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 & -2 \\ 3 & -5 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

(*c*) $3\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & 0 \\ 12 & 0 & 6 & 3 \\ 6 & -15 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

(*d*) $-\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

√**2.** Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, hallar $D = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}$ de manera que $A + B - D = 0$.

La matriz $A + B - D = \begin{bmatrix} 1-3-p & 2-2-q \\ 3+1-r & 4-5-s \\ 5+4-t & 6+3-u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-p & -q \\ 4-r & -1-s \\ 9-t & 9-u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, con lo que $-2 - p = 0$, de donde $p = -2$, $4 - r = 0$, de donde, $r = 4, \ldots$. Por tanto, $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} = A + B$.

3. √(*a*) $\overset{1\times 3}{\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}} \overset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 4(2) + 5(3) + 6(-1) \end{bmatrix} = \overset{1\times 1}{\begin{bmatrix} 17 \end{bmatrix}}$

√(*b*) $\overset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}} \overset{1\times 3}{\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2(4) & 2(5) & 2(6) \\ 3(4) & 3(5) & 3(6) \\ -1(4) & -1(5) & -1(6) \end{bmatrix} = \overset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}}$

√(*c*) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 & 9 & 6 \\ 0 & -7 & 10 & 7 \\ 5 & 8 & -11 & -8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1(4) + 2(0) + 3(5) & 1(-6) + 2(-7) + 3(8) & 1(9) + 2(10) + 3(-11) & 1(6) + 2(7) + 3(-8) \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} 19 & 4 & -4 & -4 \end{bmatrix}$

√(*d*) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1) + 3(2) + 4(3) \\ 1(1) + 5(2) + 6(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 29 \end{bmatrix}$

(*e*) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(3) + 2(1) + 1(-2) & 1(-4) + 2(5) + 1(2) \\ 4(3) + 0(1) + 2(-2) & 4(-4) + 0(5) + 2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}$

4. Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Se deja para el alumno la demostración de que $A^3 = A \cdot A^2$ y $A^2 \cdot A^3 = A^3 \cdot A^2$.

5. Demostrar que:

(a) $\sum_{k=1}^{2} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{2} a_{ik}c_{kj}$.

(b) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} a_{ij}$.

(c) $\sum_{k=1}^{2} a_{ik}(\sum_{h=1}^{3} b_{kh}c_{hj}) = \sum_{h=1}^{3}(\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kh})c_{hj}$.

$$(a)\quad \sum_{k=1}^{2} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = a_{i1}(b_{1j}+c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j}+c_{2j}) = (a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}) + (a_{i1}c_{1j}+a_{i2}c_{2j})$$
$$= \sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{2} a_{ik}c_{kj}.$$

$$(b)\quad \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \sum_{i=1}^{2}(a_{i1}+a_{i2}+a_{i3}) = (a_{11}+a_{12}+a_{13}) + (a_{21}+a_{22}+a_{23})$$
$$= (a_{11}+a_{21}) + (a_{12}+a_{22}) + (a_{13}+a_{23})$$
$$= \sum_{i=1}^{2} a_{i1} + \sum_{i=1}^{2} a_{i2} + \sum_{i=1}^{2} a_{i3} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} a_{ij}.$$

Esto quiere decir que para sumar todos los elementos de una matriz se pueden sumar, en primer lugar, los elementos de cada fila o los elementos de cada columna.

$$(c)\quad \sum_{k=1}^{2} a_{ik}(\sum_{h=1}^{3} b_{kh}c_{hj}) = \sum_{k=1}^{2} a_{ik}(b_{k1}c_{1j} + b_{k2}c_{2j} + b_{k3}c_{3j})$$
$$= a_{i1}(b_{11}c_{1j} + b_{12}c_{2j} + b_{13}c_{3j}) + a_{i2}(b_{21}c_{1j} + b_{22}c_{2j} + b_{23}c_{3j})$$
$$= (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21})c_{1j} + (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22})c_{2j} + (a_{i1}b_{13} + a_{i2}b_{23})c_{3j}$$
$$= (\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{k1})c_{1j} + (\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{k2})c_{2j} + (\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{k3})c_{3j}$$
$$= \sum_{h=1}^{3}(\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kh})c_{hj}$$

6. Dadas las matrices $A = [a_{ij}]$ de orden $m \times n$, y $B = [b_{ij}]$ y $C = [c_{ij}]$ de orden $n \times p$, demostrar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, es decir, $A(B + C) = AB + AC$.

Los elementos de la fila i de A son $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$, y los de la columna j de $B + C$ son $b_{1j} + c_{1j}, b_{2j} + c_{2j}, \ldots, b_{nj} + c_{nj}$. Entonces el elemento que pertenece a la fila i y columna j de $A(B + C)$ es

$$a_{i1}(b_{1j}+c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j}+c_{2j}) + \ldots + a_{in}(b_{nj}+c_{nj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj},$$

la suma de los elementos que pertenecen a la fila i y columna j de AB y AC.

7. Demostrar la propiedad asociativa del producto de matrices: Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de orden $m \times n$, $B = [b_{ij}]$ de orden $n \times p$ y $C = [c_{ij}]$ de orden $p \times q$, se verifica: $A(BC) = (AB)C$.

Los elementos de la fila i de A son $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ y los de la columna j de BC son $\sum_{h=1}^{p} b_{1h}c_{hj}$, $\sum_{h=1}^{p} b_{2h}c_{hj}, \ldots, \sum_{h=1}^{p} b_{nh}c_{hj}$, luego el elemento que pertenece a la fila i y columna j de $A\,(BC)$ es

$$a_{i1}\sum_{h=1}^{p} b_{1h}c_{hj} + a_{i2}\sum_{h=1}^{p} b_{2h}c_{hj} + \ldots + a_{in}\sum_{h=1}^{p} b_{nh}c_{hj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\sum_{h=1}^{p} b_{kh}c_{hj})$$
$$= \sum_{h=1}^{p}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kh})c_{hj} = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1})c_{1j} + (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k2})c_{2j} + \ldots + (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kp})c_{pj}$$

Este es el elemento que pertenece a la fila i y columna j de $(AB)C$; por tanto, $A(BC) = (AB)C$.

8. Suponiendo que A, B, C, D son matrices conformes demostar, por dos procedimientos, que: $(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$.

Aplicando (*e*) y luego (*f*), $(A + B)(C + D) = (A + B)C + (A + B)D = AC + BC + AD + BD$.

Aplicando (*f*) y luego (*e*), $(A + B)(C + D) = A(C + D) + B(C + D) = AC + AD + BC + BD$
$= AC + BC + AD + BD$.

9. (*a*) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}[3\ \ 1\ \ 2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 9 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

(*b*) $$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & [0] & [0] \\ [0] & \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} & [0] \\ [0] & [0] & \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

(*c*) $$\left[\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \\ \hline 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix} \\ [1]\cdot[8\ \ 7] & [1]\cdot[6\ \ 5\ \ 4] & [1]\cdot[1] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 9 & 11 \\ 10 & 13 & 16 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 13 \\ 19 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 31 & 33 \\ 20 & 22 \\ 13 & 13 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 35 & 37 & 39 \\ 24 & 26 & 28 \\ 13 & 13 & 13 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 41 \\ 30 \\ 13 \end{bmatrix} \\ [8\ \ 7] & [6\ \ 5\ \ 4] & [1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \\ 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 19 \\ 31 & 33 & 35 & 37 & 39 & 41 \\ 20 & 22 & 24 & 26 & 28 & 30 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Sean $\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 \end{cases}$ tres formas lineales en y_1 e y_2 y sea $\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \end{cases}$

una transformación lineal de las coordenadas (y_1, y_2) en otras nuevas (z_1, z_2). El resultado de aplicar la transformación a las formas dadas es

$$\begin{cases} x_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})z_2 \\ x_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})z_2 \\ x_3 = (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21})z_1 + (a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22})z_2 \end{cases}$$

Empleando la notación matricial, se obtienen las tres formas $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ y la transformación $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$. El resultado de aplicar la transformación es

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, cuando un conjunto de m formas lineales en n variables, de matriz A, se somete a una transformación lineal de las mismas de matriz B, resulta un conjunto de m formas lineales de matriz $C = AB$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

11. Siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, y $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

(*a*) Hallar $A+B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $A-C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(*b*) Hallar $-2A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -10 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $0 \cdot B = 0$

(*c*) Comprobar: $A + (B - C) = (A + B) - C$.

(*d*) Hallar la matriz D de forma que $A + D = B$. Comprobar que $D = B - A = -(A - B)$.

12. Siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, se obtiene $AB = 0$ y $BA = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$. Por tanto, $AB \neq BA$, es general.

13. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, y $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, demostrar que $AB = AC$.

Por tanto, la igualdad $AB = AC$ no implica necesariamente que $B = C$.

14. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, y $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, demostrar que $(AB)C = A(BC)$.

15. Con las matrices del Problema 11 demostrar que $A(B + C) = AB + AC$ y $(A + B)C = AC + BC$.

16. Explicar por qué, en general, $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ y $A^2 - B^2 \neq (A - B)(A + B)$.

17. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, y $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$,

(*a*) Demostrar que $AB = BA = 0$, $AC = A$, $CA = C$.

(*b*) Aplicando los resultados de (*a*) demostrar que $ACB = CBA$, $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, $(A \pm B)^2 = A^2 + B^2$.

18. Siendo $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, en la que $i^2 = -1$, deducir una fórmula para las potencias enteras positivas de A.

Sol. $A^n = I, A, -I, -A$ según que $n = 4p, 4p+1, 4p+2, 4p+3$, siendo $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

19. Demostrar que el producto de dos o más matrices cualesquiera del conjunto

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix},$$

$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ es otra matriz del conjunto (propiedad uniforme o conjunto cerrado respecto de una operación).

20. Dadas las matrices A de orden $m \times n$, B de orden $n \times p$ y C de orden $r \times q$, ¿en qué condiciones de p, q y r las matrices son conformes respecto de los productos que se indican y cuál es el orden de cada una de las matrices siguientes: (*a*) ABC, (*b*) ACB, (*c*) $A(B + C)$?

Sol. (*a*) $p = r$; $m \times q$ (*b*) $r = n = q$; $m \times p$ (*c*) $r = n$, $p = q$; $m \times q$

21. Hallar AB, siendo

(a) $A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ y $B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ *Sol.* $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ y $B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 \end{array}\right]$ *Sol.* $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$ y $B = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$ *Sol.* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

22. Demostrar que: (*a*) traza $(A + B) =$ traza A + traza B, (*b*) traza $(kA) = k$ traza A.

23. Si $\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_2 = 2y_1 + y_2 - 3y_3 \end{cases}$ y $\begin{cases} y_1 = z_1 + 2z_2 \\ y_2 = 2z_1 - z_2 \\ y_3 = 2z_1 + 3z_2 \end{cases}$, verificar $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -z_1 + 7z_2 \\ -2z_1 - 6z_2 \end{bmatrix}$.

24. Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son de orden $m \times n$ y $C = [c_{ij}]$ es de orden $n \times p$, demostrar que $(A + B)C = AC + BC$.

25. Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{jk}]$, para $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, p; k = 1, 2, \ldots, n)$. Representemos por β_j la suma de los elementos de la fila j de B, es decir, $\beta_j = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}$. Demostrar que el elemento de la fila i de $A \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_p \end{bmatrix}$ es la suma de los elementos situados en la fila i de AB. Aplicar este procedimiento para comprobar los productos formados en los Problemas 12 y 13.

26. Una relación (de paralelismo, de congruencia, etc.) entre entes matemáticos que posea las propiedades siguientes:

(i) Determinativa: a está relacionado con b, o bien a no está relacionado con b.
(ii) Reflexiva: a está relacionado con a para todo valor de a.
(iii) Simétrica: Si a está relacionado con b, b lo está con a.
(iv) Transitiva: Si a está relacionado con b y b lo está con c, a está relacionado con c.

Se llama *relación de equivalencia*.

Demostrar que el paralelismo de rectas, la semejanza de triángulos y la igualdad de matrices son relaciones de equivalencia. Demostrar que la perpendicularidad de rectas, por el contrario, no es una relación de equivalencia.

27. Demostrar que la conformidad respecto de la suma de matrices es una relación de equivalencia, mientras que la conformidad respecto de la multiplicación no lo es.

28. Demostrar que si A, B, C son matrices tales que $AC = CA$ y $BC = CB$, se verifica: $(AB + BA)C = C(AB \pm BA)$.

Capítulo 2

Matrices especiales

MATRIZ UNIDAD. Una matriz cuadrada A cuyos elementos $a_{ij} = 0$ para $i > j$ se llama *triangular superior*; una matriz cuadrada A cuyos elementos $a_{ij} = 0$ para $i < j$ se denomina *triangular inferior*. Así, pues,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{es una matriz triangular superior y}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{es una matriz triangular inferior}$$

La matriz $D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, que es triangular superior e inferior, se llama *matriz diagonal*. Se representa normalmente por

$$D = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn})$$

Véase Problema 1.

Si en esta matriz diagonal D se verifica que $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = k$, D recibe el nombre de matriz *escalar*; si además $k = 1$, la matriz se denomina *matriz unidad* y se representa por I_n. Por ejemplo,

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cuando el orden de la matriz es evidente, o no haya necesidad de considerarlo, la matriz unidad se representará por I. Se ve inmediatamente que $I_n + I_n + \overset{p}{\dots} + I_n = p \cdot I_n = \operatorname{diag}(p, p, p, \dots, p)$, e $I^p = I \cdot I \overset{p}{\dots} I = I$. Las matrices unitarias tienen algunas de las propiedades del entero 1. Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, se verifica $I_2 \cdot A = A \cdot I_3 = I_2 A I_3 = A$, como fácilmente se puede comprobar.

CASOS PARTICULARES DE MATRICES CUADRADAS. Si A y B son dos matrices cuadradas y se verifica que $AB = BA$ dichas matrices se llaman *permutables, conmutativas* o *que conmutan*. Es fácil demostrar que si A es una matriz cuadrada de orden n, conmuta consigo misma y también con I_n.

Véase Problema 2.

En las condiciones anteriores, si A y B son tales que $AB = -BA$, las matrices A y B se llaman *antipermutables* o *anticonmutativas*.

Una matriz A de manera que $A^{k+1} = A$, siendo k un número entero y positivo, se llama *periódica*. Si k es el menor número entero y positivo para el cual $A^{k+1} = A$, la matriz A tiene de *período* k.

Si $k = 1$, esto es, $A^2 = A$. La matriz A se llama *idempotente*.

Véanse Problemas 3-4.

Una matriz A tal que $A^p = 0$, siendo p un número entero y positivo, se llama *nilpotente*. Si p es el menor número entero y positivo para el cual $A^p = 0$, la matriz A es nilpotente de *índice* p.

Véanse Problemas 5-6.

MATRIZ INVERSA. Sean A y B dos matrices cuadradas de forma que $AB = BA = I$; en estas condiciones, la matriz B se llama *inversa* de A y se escribe $B = A^{-1}$ (B igual a inversa de A). Recíprocamente, la matriz A es la inversa de B, y se puede escribir $A = B^{-1}$.

Ejemplo 1. Como $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$, cada una de las matrices del producto es inversa de la otra.

Más adelante veremos (Capítulo 7) que no todas las matrices poseen inversa. Se puede demostrar, sin embargo, que si A posee matriz inversa, ésta es única.

Véase Problema 7.

Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden cuyas inversas son, respectivamente, A^{-1} y B^{-1}; entonces, $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, es decir,

I. La inversa del producto de dos matrices, que posean inversa, es igual al producto de la inversa en *orden contrario*.

Véase Problema 8.

Una matriz A tal que $A^2 = I$ se llama *involutiva*. Una matriz unidad, por ejemplo, es involutiva. La inversa de una matriz involutiva es ella misma.

Véase Problema 9.

MATRIZ TRASPUESTA. La matriz *traspuesta* de una matriz A de orden $m \times n$ es la matriz A' (traspuesta de A) de orden $n \times m$ que se obtiene permutando las filas por las columnas. Por ejemplo, la traspuesta de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ es $A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. Obsérvese que el elemento a_{ij} de A (fila i, columna j) es a_{ji} de A' (fila j, columna i).

Sean A' y B', respectivamente, las traspuestas de las matrices A y B, y k un escalar cualquiera; en estas condiciones, se deduce de forma inmediata que:

$$(a)\ (A')' = A \qquad \text{y} \qquad (b)\ (kA)' = kA'$$

En los Problemas 10 y 11 se demuestran los teoremas siguientes:

II. La matriz traspuesta de la suma de dos matrices es la suma de las traspuestas, es decir,

$$(A + B)' = A' + B'$$

III. La matriz traspuesta del producto de dos matrices es igual al producto de las traspuestas en *orden contrario*, es decir,

$$(AB)' = B' \cdot A'$$

Véase Problemas 10-12.

MATRIZ SIMETRICA. Una matriz cuadrada A tal que $A' = A$ se llama *simétrica*. Por tanto, en una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ simétrica se verifica que $a_{ij} = a_{ji}$ para todos los valores de i y de j.

Por ejemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ es simétrica y también kA para cualquier escalar k.

En el Problema 13 se demuestra el teorema siguiente:

IV. Si A es una matriz cuadrada de orden n, la matriz $A + A'$ es simétrica.

Una matriz cuadrada A tal que $A' = -A$ se llama *hemisimétrica* o *antisimétrica*. Por tanto, en una matriz cuadrada A hemisimétrica se verifica que $a_{ij} = -a_{ji}$ para todos los valores de i y de j.

Evidentemente, los elementos de la diagonal principal deben ser nulos. Por ejemplo, $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz hemisimétrica y también lo es kA cualquiera que sea el escalar k.

En el Problema 13 (con ligeras modificaciones) se demuestra el teorema siguiente:

V. Si A es una matriz cuadrada, la matriz $A - A'$ es hemisimétrica.

De los Teorema IV y V se deduce:

VI. Toda matriz cuadrada A se puede descomponer en la suma de una matriz simétrica $B = \frac{1}{2}(A + A')$ y otra hemisimétrica $C = \frac{1}{2}(A - A')$.

Véanse Problemas 14-15.

MATRIZ CONJUGADA. Sean a y b números reales e $i = \sqrt{-1}$; la expresión $z = a + bi$ representa un *número complejo*. Los números complejos de la forma $a + bi$ y $a - bi$ se llaman *conjugados* y cada uno de ellos es *conjugado* del otro. Si $z = a + bi$, su complejo conjugado se representa por $\bar{z} = \overline{a + bi}$.

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = \bar{z}_1 = a - bi$; entonces, $\overline{z_2} = \bar{\bar{z}}_1 = \overline{a - bi} = a + bi$, es decir, el conjugado del conjugado de un número complejo z es él mismo.

Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, se tiene

(i) $z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$ y $\overline{z_1 + z_2} = (a+c) - (b+d)i = (a-bi) + (c-di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, es decir, el conjugado de la suma de dos números complejos es igual a la suma de los conjugados.

(ii) $z_1 \cdot z_2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$ y $\overline{z_1 \cdot z_2} = (ac-bd) - (ad+bc)i = (a-bi)(c-di) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, esto es, el conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de los conjugados.

Sea A una matriz cuyos elementos son números complejos; la matriz obtenida a partir de A sustituyendo cada elemento por su conjugado se llama matriz *conjugada* de A y se representa por $\bar{A}$ (conjugada de A).

Ejemplo 2. Si $A = \begin{bmatrix} 1+2i & i \\ 3 & 2-3i \end{bmatrix}$ será $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1-2i & -i \\ 3 & 2+3i \end{bmatrix}$

Sean $\bar{A}$ y $\bar{B}$ las matrices conjugadas, respectivamente de A y B, y k un escalar cualquiera; en estas condiciones es fácil deducir que:

$$(c)\ \ \overline{(\bar{A})} = A \qquad \text{y} \qquad (d)\ \ \overline{(kA)} = \bar{k} \cdot \bar{A}$$

Teniendo en cuenta (i) y (ii), se demuestran los teoremas siguientes:

VII. La matriz conjugada de la suma de dos matrices es igual a la suma de las conjugadas, es decir, $(\overline{A+B}) = \bar{A} + \bar{B}$.

VIII. La matriz conjugada del producto de dos matrices es igual al producto de las conjugadas consideradas *en el mismo orden*, esto es, $(\overline{AB}) = \bar{A} \cdot \bar{B}$.

La traspuesta de $\bar{A}$ se representa por $\bar{A}'$ (traspuesta de la conjugada de A). Algunas veces se emplea la notación A^*.

IX. La matriz traspuesta de la conjugada de A (*matriz adjunta* en sentido hermítico) es igual a la conjugada de la traspuesta, es decir, $(\bar{A})' = (\overline{A'})$.

Ejemplo 3. Del Ejemplo 2

$$(\bar{A})' = \begin{bmatrix} 1-2i & 3 \\ -i & 2+3i \end{bmatrix} \text{ mientras que } A' = \begin{bmatrix} 1+2i & 3 \\ i & 2-3i \end{bmatrix} \text{ y } (\overline{A'}) = \begin{bmatrix} 1-2i & 3 \\ -i & 2+3i \end{bmatrix} = (\bar{A})'$$

MATRIZ HERMITICA. Una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ tal que $\overline{A'} = A$ se llama *hermítica* o *autoadjunta*. Por tanto, A será *hermítica* siempre que $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ para todos los valores de i y de j. Evidentemente, los elementos de la diagonal principal de una matriz hermítica han de ser números reales.

Ejemplo 4. La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$ es hermítica.

Si k es un número real o complejo, la matriz kA ¿es hermítica?

Una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ tal que $\overline{A'} = -A$ se llama *hemihermítica* o *antihermítica*. Por tanto, una matriz A es hemihermítica siempre que $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$ para todos los valores de i y de j. Se desprende fácilmente que todos los elementos de la diagonal principal de una matriz hemihermítica han de ser o nulos o números imaginarios puros.

Ejemplo 5. La matriz $A = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$ es hemihermítica. ¿Es kA hemihermítica si k es un número real, un número complejo, un número imaginario puro cualquiera?

En el Problema 13, con ligeras modificaciones, se demuestra el teorema siguiente:

X. Si A es una matriz cuadrada, $A + \overline{A'}$ es una matriz hermítica y $A - \overline{A'}$ es hemihermítica.

Del Teorema X se deduce:

XI. Toda matriz cuadrada A cuyos elementos son números complejos se puede descomponer en la suma de una matriz hermítica $B = \frac{1}{2}(A + \overline{A'})$ y otra hemihermítica $C = \frac{1}{2}(A - \overline{A'})$.

SUMA DIRECTA O MATRIZ ESCALONADA. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_s$ matrices cuadradas de órdenes $m_1, m_2, \ldots, m_s$, respectivamente. La generalización

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & A_s \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_s)$$

de la matriz diagonal se llama *suma directa* o matriz escalonada de las matrices A_i.

Ejemplo 6. Sean $A_1 = [2]$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, y $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

La suma directa de A_1, A_2, A_3 es la matriz escalonada diag $(A_1, A_2, A_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

En el Problema 9(*b*) del Capítulo 1 se demuestra que:

XII. Si $A = \text{diag}\,(A_1, A_2, \ldots, A_s)$ y $B = \text{diag}\,(B_1, B_2, \ldots, B_s)$, en donde A_i y B_i son del mismo orden $(i = 1, 2, \ldots, s)$, se verifica: $AB = \text{diag}\,(A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_sB_s)$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Puesto que $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \ldots & a_{11}b_{1n} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & \ldots & a_{22}b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{mm}b_{m1} & a_{mm}b_{m2} & \ldots & a_{mm}b_{mn} \end{bmatrix}$, el producto AB de una matriz diagonal cuadrada de orden m, $A = \text{diag}\,(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm})$ por otra cualquiera B de orden $m \times n$ se obtiene multiplicando la primera fila de B por a_{11}, la segunda de B por a_{22}, y así sucesivamente.

2. Demostrar que las matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$ son permutables para todos los valores de a, b, c, d.

   Esto se deduce de $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$.

3. Demostrar que $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ es una matriz idempotente

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = A$$

4. Demostrar que si $AB = A$ y $BA = B$, las matrices A y B son idempotentes.

   $ABA = (AB)A = A \cdot A = A^2$ y $ABA = A(BA) = AB = A$; luego $A^2 = A$ y A es idempotente. Aplicar BAB para demostrar que B es idempotente.

5. Demostrar que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ es una matriz nilpotente de orden 3.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = 0$$

6. Si A es una matriz nilpotente de índice 2, demostrar que $A(I \pm A)^n = A$, siendo n un entero positivo cualquiera.

Puesto que $A^2 = 0$, $A^3 = A^4 = \ldots = A^n = 0$, se tiene $A(I \pm A)^n = A(I \pm nA) = A \pm nA^2 = A$.

7. Sean A, B, C tres matrices cuadradas de forma que $AB = I$ y $CA = I$. En estas condiciones, $(CA)B = C(AB)$ y, por tanto, $B = C$. En otra forma, $B = C = A^{-1}$ es la *única* inversa de A. (¿Cuál es B^{-1}?)

8. Demostrar que: $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Por definición $(AB)^{-1}(AB) = (AB)(AB)^{-1} = I$. Ahora bien

$$(B^{-1} \cdot A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1} \cdot A)B = B^{-1} \cdot I \cdot B = B^{-1} \cdot B = I$$

y
$$AB(B^{-1} \cdot A^{-1}) = A(B \cdot B^{-1})A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

Del Problema 7, $(AB)^{-1}$ es única; luego $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

9. Demostrar: La condición necesaria y suficiente para que una matriz A sea involutiva es que $(I - A)(I + A) = 0$.

Supongamos $(I - A)(I + A) = I - A^2 = 0$; luego $A^2 = I$ y A es involutiva.

Supongamos que A es involutiva; entonces $A^2 = I$ y $(I - A)(I + A) = I - A^2 = I - I = 0$.

10. Demostrar que $(A + B)' = A' + B'$.

Sean las matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$. Hemos de comprobar que los elementos de la fila i y columna j de A', B' y $(A + B)'$ son, respectivamente, a_{ji}, b_{ji} y $a_{ji} + b_{ji}$.

11. Demostrar que: $(AB)' = B'A'$.

Sean $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden $m \times n$ y $B = [b_{ij}]$ de orden $n \times p$; entonces, $C = AB = [c_{ij}]$ es de orden $m \times p$. El elemento de la fila i y columna j de AB es $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$, que también pertenece a la fila j y columna i de $(AB)'$.

Los elementos de la fila j de B' son $b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}$, y los de la columna i de A son $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$. Por tanto, el elemento de la fila j y columna i de $B'A'$ es

$$\sum_{k=1}^{n} b_{kj} \cdot a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = c_{ij}$$

Luego, $(AB)' = B'A'$.

12. Demostrar que: $(ABC)' = C'B'A'$.

Tenemos $ABC = (AB)C$. Según el Problema 11, $(ABC)' = \{(AB)C\}' = C'(AB)' = C'B'A'$.

13. Demostrar que si $A = [a_{ij}]$ es una matriz cuadrada, la matriz $B = [b_{ij}] = A + A'$ es simétrica.

Primera demostración.

El elemento de la fila i y columna j de A es a_{ij} y el correspondiente de A' es a_{ji}; luego $b_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$. El elemento de la fila j y columna i de A es a_{ji} y el correspondiente de A' es a_{ij}; luego $b_{ji} = a_{ji} + a_{ij}$. Por tanto, $b_{ij} = b_{ji}$, con lo que B es simétrica.

Segunda demostración.

Del Problema 10 se deduce $(A + A')' = A' + (A')' = A' + A = A + A'$, de donde $(A + A')$ es simétrica.

14. Demostrar que si A y B son dos matrices cuadradas simétricas de orden n, la condición necesaria y suficiente para que AB sea simétrica es que A y B conmuten.

Supongamos que A y B conmutan, o sea, $AB = BA$. Entonces, $(AB)' = B'A' = BA = AB$, de donde AB es simétrica.

Supongamos que AB sea simétrica, o sea, $(AB)' = AB$. Ahora bien, $(AB)' = B'A' = BA$; luego, $AB = BA$, y las matrices A y B conmutan.

15. Demostrar que si una matriz cuadrada A de orden m es simétrica (hemisimétrica) y que si P es de orden $m \times n$, $B = P'AP$ es otra matriz simétrica (hemisimétrica).

Si A es simétrica se tiene (véase Problema 12), $B' = (P'AP)' = P'A'(P')' = P'A'P = P'AP$, de donde B es simétrica.

Si A es hemisimétrica, $B' = (P'AP)' = -P'AP$, de donde B es hemisimétrica.

16. Demostrar que si A y B son dos matrices cuadradas de orden n, la condición necesaria y suficiente para que A y B sean permutables es que $A - kI$ y $B - kI$ conmuten para cualquier valor del escalar k.

Supongamos que A y B conmuten; entonces, $AB = BA$ y

$$\begin{aligned}(A - kI)(B - kI) &= AB - k(A + B) + k^2I \\ &= BA - k(A + B) + k^2I = (B - kI)(A - kI)\end{aligned}$$

Por tanto, $A - kI$ y $B - kI$ son permutables.

Supongamos que $A - kI$ y $B - kI$ conmutan; entonces,

$$\begin{aligned}(A - kI)(B - kI) &= AB - k(A + B) + k^2I \\ &= BA - k(A + B) + k^2I = (B - kI)(A - kI)\end{aligned}$$

$AB = BA$, y A y B son permutables.

PROBLEMAS PROPUESTOS

17. Demostrar que el producto de dos matrices triangulares superiores (inferiores) es otra matriz triangular superior (inferior).

18. Deducir una fórmula para hallar el producto BA de una matriz B de orden $m \times n$ por otra $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.
Ind. Véase Problema 1.

19. Demostrar que la matriz escalar cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales a k se puede representar por kI, y que $kA = kIA = \text{diag}(k, k, \ldots, k)\, A$, siendo el orden de I igual al número de filas de A.

20. Si A es una matriz cuadrada, demostrar que $A^p \cdot A^q = A^q \cdot A^p$, en donde p y q son números enteros y positivos.

21. (*a*) Demostrar que las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ son idempotentes.

(*b*) Con estas matrices A y B demostrar que no se verifica el recíproco del Problema 4.

22. Si A es una matriz idempotente, demostrar que también lo es la matriz $B = I - A$, y que $AB = BA = 0$.

23. (*a*) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, demostrar que $A^2 - 4A - 5I = 0$.

(*b*) Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, demostrar que $A^3 - 2A^2 - 9A = 0$, pero $A^2 - 2A - 9I \neq 0$.

24. Demostrar que $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^4 = I$.

25. Demostrar que $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ es una matriz periódica de periodo 2

26. Demostrar que $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ es una matriz nilpotente.

27. Demostrar que (*a*) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ son matrices permutables.

(*b*) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -3/5 & 2/5 & 1/5 \\ 7/15 & -1/5 & 1/15 \end{bmatrix}$ son matrices permutables.

28. Demostrar que $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ no conmutan y que $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

29. Demostrar que las matrices $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ son, dos a dos, anticonmutativas.

30. Demostrar que las únicas matrices permutables con n matrices cuadradas son n matrices cuadradas escalares.

31. (*a*) Hallar todas las matrices permutables con la matriz diag(1, 2, 3).
(*b*) Hallar todas las matrices que conmutan con la matriz $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.
Sol. (*a*) diag(a, b, c) siendo a, b, c cualesquiera.

32. Demostrar que (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ es la inversa de $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ es la inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

33. Siendo $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, hallar la inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. *Sol.* $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

34. Demostrar que la inversa de una matriz diagonal A, cuyos elementos de la diagonal principal son todos distintos de cero, es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son el recíproco de los correspondientes de A y en el mismo orden. En estas condiciones, la matriz inversa de I_n es I_n.

35. Demostrar que $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ son involutivas.

36. Haciendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ c & d & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ A_{21} & -I_2 \end{bmatrix}$ por subdivisión en cajas, demostrar que $A^2 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = I_4$.

37. Demostrar que: (a) $(A')' = A$, (b) $(kA)' = kA'$, (c) $(A^p)' = (A')^p$ siendo p un número entero y positivo.

38. Demostrar que: $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$. *Ind.* Hacer $ABC = (AB)C$.

39. Demostrar que: (a) $(A^{-1})^{-1} = A$, (b) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$, (c) $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$ siendo p un número entero y positivo.

40. Demostrar que toda matriz real simétrica es hermítica.

41. Demostrar que: (a) $\overline{(\bar{A})} = A$, (b) $\overline{(A + B)} = \bar{A} + \bar{B}$, (c) $\overline{(kA)} = \bar{k}\,\bar{A}$, (d) $\overline{(AB)} = \bar{A}\,\bar{B}$.

42. Demostrar que: (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{bmatrix}$ es hermítica,

(b) $B = \begin{bmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{bmatrix}$ es hemihermítica,

(c) iB es hermítica,

(d) $\bar{A}$ es hermítica y $\bar{B}$ es hemihermítica.

43. Demostrar que si A es una matriz cuadrada, (a) AA' y $A'A$ son simétricas, (b) $A + \bar{A}'$, $A\bar{A}'$ y $\bar{A}'A$ son hermíticas.

44. Demostrar que si H es una matriz hermítica y A una matriz conforme respecto de la multiplicación, se verifica que $(\bar{A})'HA$ es hermítica.

45. Demostrar que toda matriz hermítica A se puede expresar por $B + iC$, siendo B una matriz real y simétrica y C otra matriz real pero hemisimétrica.

46. Demostrar que: (a) Toda matriz hermítica A se puede representar por $A = B + iC$, siendo B una matriz real y hemisimétrica y C otra matriz real pero simétrica. (b) $\bar{A}'A$ es una matriz real si, y solo si, B y C son anticonmutativas.

47. Demostrar que si A y B son dos matrices permutables, también lo son A^{-1} y B^{-1}, A' y B', y $\bar{A}'$ y $\bar{B}'$.

48. Demostrar que, siendo m y n enteros y positivos, A^m y B^n son matrices permutables si lo son A y B.

49. Demostrar que: (a) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$

50. Demostrar que si A es una matriz simétrica o hemisimétrica, tanto AA' = $A'A$ como A^2 son matrices simétricas.

51. Demostrar que si A es una matriz simétrica también lo es $aA^p + bA^{p-1} + \cdots + gI$, en donde $a, b, \ldots, g$ son escalares y p un número entero y positivo.

52. Demostrar que toda matriz cuadrada A se puede escribir en la forma $A = B + C$, siendo B una matriz hermítica y C hemihermítica.

53. Demostrar que si A es una matriz real y hemisimétrica, o bien compleja y hemihermítica, las matrices $\pm iA$ son hermíticas.

54. Demostrar que el teorema del Problema 52 se puede enunciar en los siguientes términos:
Toda matriz cuadrada A se puede escribir en la forma $A = B + iC$, siendo B y C dos matrices hermíticas.

55. Demostrar que si A y B son dos matrices tales que $AB = A$ y $BA = B$, se verifica: (a) $B'A' = A'$ y $A'B' = B'$, (b) A' y B' son idempotentes, (c) $A = B = I$ siempre que A posea inversa.

56. Si A es una matriz involutiva, demostrar que $\frac{1}{2}(I + A)$ y $\frac{1}{2}(I - A)$ son matrices idempotentes, y que $\frac{1}{2}(I + A) \cdot \frac{1}{2}(I - A) = 0$.

57. Si A^{-1} es la matriz inversa de la matriz cuadrada A, demostrar que:
(a) $(A^{-1})' = (A')^{-1}$, (b) $(\bar{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$, (c) $(\bar{A}')^{-1} = (\overline{A^{-1}})'$.

Ind. (a) De la traspuesta de $AA^{-1} = I$, obtener $(A^{-1})'$ como inversa de A'.

58. Hallar todas las matrices permutables con (a) diag(1, 1, 2, 3), (b) diag(1, 1, 2, 2).
Sol. (a) diag(A, b, c), (b) diag(A, B), siendo A y B dos matrices cuadradas de elementos arbitrarios y b, c escalares.

59. Si $A_1, A_2, \ldots, A_s$ son matrices escalares de órdenes $m_1, m_2, \ldots, m_s$, respectivamente, hallar todas las matrices permutables con diag($A_1, A_2, \ldots, A_s$).
Sol. diag($B_1, B_2, \ldots, B_s$), siendo $B_1, B_2, \ldots, B_s$ de órdenes $m_1, m_2, \ldots, m_s$, respectivamente, y de elementos arbitrarios.

60. Siendo $AB = 0$ y A y B matrices cuadradas no nulas, A y B se llaman *divisores de cero*. Demostrar que las matrices A y B del Problema 21 son divisores de cero.

61. Si A = diag($A_1, A_2, \ldots, A_s$) y B = diag($B_1, B_2, \ldots, B_s$), siendo A_i y B_i del mismo orden, ($i = 1, 2, \ldots, s$), demostrar que
(a) $A + B$ = diag($A_1 + B_1, A_2 + B_2, \ldots, A_s + B_s$)
(b) AB = diag($A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_sB_s$)
(c) Traza de AB = traza de A_1B_1 + traza de $A_2B_2 + \cdots$ traza de A_sB_s.

62. Demostrar que si A y B son matrices cuadradas hemisimétricas de orden n, la condición necesaria y suficiente para que la matriz AB sea simétrica es que A y B conmuten.

63. Demostrar que si A es una matriz cuadrada de orden n y $B = rA + sI$, siendo r y s escalares, A y B conmutan.

64. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n, y r_1, r_2, s_1, s_2 escalares de forma que $r_1s_2 \neq r_2s_1$. Demostrar que las matrices $C_1 = r_1A + s_1B$ y $C_2 = r_2A + s_2B$ son permutables si, y solo si, A y B conmutan.

65. Demostrar que una matriz cuadrada de orden n no posee inversa cuando (a) A tiene una línea cuyos elementos son nulos, o bien, (b) A tiene dos líneas idénticas, o bien, (c) A tiene una línea igual a la suma de otras dos.

66. Si A y B son matrices cuadradas de orden n y A posee inversa, demostrar que:
$$(A + B)A^{-1}(A - B) = (A - B)A^{-1}(A + B)$$

Capítulo 3

Determinante de una matriz cuadrada

PERMUTACIONES. Consideremos las $3! = 6$ permutaciones de los números enteros 1, 2, 3,

(3.1) $$123 \quad 132 \quad 213 \quad 231 \quad 312 \quad 321$$

y ocho de las $4! = 24$ permutaciones de los enteros 1, 2, 3, 4,

(3.2) $$\begin{matrix} 1234 & 2134 & 3124 & 4123 \\ 1324 & 2314 & 3214 & 4213 \end{matrix}$$

En una permutación dada existe una *inversión* cuando un entero precede a otro menor que él. Si el número de inversiones de una permutación es par (impar), dicha permutación se llama *par* (*impar*). Por ejemplo, en (3.1), la permutación 123 es par, ya que no hay en ella inversión alguna; la permutación 123 es impar porque en ella existe una inversión, el 3 precede al 2; la permutación 312 es par porque en ella existen dos inversiones, el 3 precede al 1 y el 3 precede al 2. En (3.2), la permutación 4213 es par porque en ella existen cuatro inversiones, el 4 precede al 2, el 4 precede al 1, el 4 precede al 3 y el 2 precede al 1.

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA. Consideremos la matriz cuadrada de orden n

(3.3) $$A = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \dots a_{nn} \end{bmatrix}$$

y un producto

(3.4) $$a_{1j_1}\, a_{2j_2}\, a_{3j_3} \dots a_{nj_n}$$

de n de sus elementos elegidos de manera que solo exista un elemento de cada fila y uno de cada columna. En este producto (3.4) los factores se han tomado, por comodidad, de forma que los primeros subíndices sigan el orden natural $1, 2, \dots, n$; la sucesión que forman los segundos subíndices, $j_1, j_2, \dots, j_n$, es una de las $n!$ permutaciones de los enteros $1, 2, \dots, n$. (Para mayor facilidad podemos suponer que los segundos subíndices están dispuestos también en orden natural.)

Dada una permutación $j_1, j_2, \dots, j_n$ de los segundos subíndices, definimos $\epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} = +1$ o -1, según que dicha permutación sea par o impar. Por tanto, el producto con su signo es

(3.5) $$\epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n}\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

Se llama *polinomio determinante* o, simplemente, *determinante* de A, y se representa por $|A|$, la suma de todos los productos con su signo de la forma (3.5) –*términos* de $|A|$–, que se pueden formar con los elementos de A; es decir,

(3.6) $$|A| = \sum_{\rho} \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n}\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

en donde la suma se extiende a las $\rho = n!$ permutaciones $j_1 j_2 \dots j_n$ de los enteros $1, 2, \dots n$.

El orden del determinante de una matriz cuadrada es el orden n de la misma.

DETERMINANTES DE SEGUNDO Y TERCER ORDEN. De (3.6), para $n = 2$ y $n = 3$,

$$(3.7)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \epsilon_{12}\,a_{11}a_{22} + \epsilon_{21}\,a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

y

$$(3.8)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \epsilon_{123}\,a_{11}a_{22}a_{33} + \epsilon_{132}\,a_{11}a_{23}a_{32} + \epsilon_{213}\,a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$+ \epsilon_{231}\,a_{12}a_{23}a_{31} + \epsilon_{312}\,a_{13}a_{21}a_{32} + \epsilon_{321}\,a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 1.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = 4 - 6 = -2$

(b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 0 - (-1)3 = 0 + 3 = 3$

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 2(0\cdot 0 - 1\cdot 1) - 3(1\cdot 0 - 1\cdot 2) + 5(1\cdot 1 - 0\cdot 2) = 2(-1) - 3(-2) + 5(1) = 9$$

(d) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & -6 \end{vmatrix} = 2\{0(-6) - (-2)(-5)\} - (-3)\{1(-6) - (-2)0\} + (-4)\{1(-5) - 0\cdot 0\}$

$$= -20 - 18 + 20 = -18$$

Véase Problema 1.

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES. En lo que sigue de este capítulo, por A se representa una matriz cuadrada cuyo determinante, $|A|$, viene dado por el polinomio (3.6).

Supongamos que cada elemento de la fila i (columna j) es igual a cero. Como cada término de (3.6) contiene un elemento de esta fila (columna), todos los términos de la suma serán nulos y, en consecuencia:

I. Si todos los elementos de una línea (fila o columna) de una matriz cuadrada A son nulos, el determinante $|A| = 0$.

Consideremos la matriz A' traspuesta de A. Se ve fácilmente que cada término de (3.6) se puede obtener a partir de A' eligiendo apropiadamente los factores en el orden primera, segunda, . . ., columnas. Por tanto:

II. Si A es una matriz cuadrada, $|A'| = |A|$; es decir, a todo teorema relativo a las filas de un determinante, le corresponde otro relativo a las columnas, y viceversa.

Representemos por B la matriz obtenida multiplicando cada uno de los elementos de la fila i de A por un escalar k. Como cada término del desarrollo de $|B|$ contiene un solo elemento de la fila i, habrá un elemento multiplicado por k, es decir,

Por consiguiente, $\qquad |B| = k\sum_{p}\{\epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}\} = k\,|A|$

III. Si todos los elementos de una línea (fila o columna) de un determinante $|A|$ se multiplican por un escalar k, el determinante queda multiplicado por k; si todos los elementos de una línea de un determinante $|A|$ son múltiplos de un escalar k, se puede sacar el factor común k en dicho $|A|$. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}$$

Sea B la matriz obtenida de A permutando las filas i e $(i+1)$. Cada producto del desarrollo (3.6) de $|A|$ es también un producto de $|B|$, y viceversa; por tanto, excepto los signos, la expresión (3.6) es el desarrollo de $|B|$. Teniendo en cuenta las inversiones de los subíndices de un término cualquiera de (3.6), considerado como término de $|B|$, i antes de $(i+1)$ en los subíndices de las filas en una inversión; en consecuencia, cada producto de (3.6), con su signo contrario, es un término de $|B|$, con lo que $|B| = -|A|$. Así, pues,

IV. Si B se obtiene de A permutando dos líneas adyacentes cualesquiera, $|B| = -|A|$.

Consecuencia del Teorema IV es:

V. Si B se obtiene de A permutando dos *cualesquiera* de sus líneas, $|B| = -|A|$.

VI. Si B se obtiene de A trasladando una de sus líneas p lugares, $|B| = (-1)^p\,|A|$.

VII. Si dos líneas de A son idénticas, $|A| = 0$.

Supongamos que cada elemento de la primera fila de A se expresa por un binomio $a_{1j} = b_{1j} + c_{1j}$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$. En estas condiciones,

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\rho} \epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} (b_{1j_1} + c_{1j_1}) a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{\rho} \epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} b_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n} + \sum_{\rho} \epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} c_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n} \\ &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

En general:

VIII. Si todos los elementos de una línea de A son iguales a la suma de p términos, $|A|$ se puede expresar como suma de p determinantes. Los elementos de las líneas de estos p determinantes que ocupan el mismo lugar que la dada son, respectivamente, el primero, segundo, ..., p-ésimo término de las sumas, siendo el resto de las líneas iguales a las de A.

Desde el punto de vista práctico, el teorema de mayor utilidad es el siguiente:

IX. Si B se obtiene de A sumando a los elementos de una de sus líneas los correspondientes de otra línea multiplicados por un escalar, $|B| = |A|$. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{21} & a_{32}+ka_{22} & a_{33}+ka_{23} \end{vmatrix}$$

Véanse Problemas 2-7.

MENOR COMPLEMENTARIO Y ADJUNTO DE UN ELEMENTO. Sea A una matriz cuadrada (3.3) de orden n cuyo determinante $|A|$ viene dado por el polinomio (3.6). Se llama *menor complementario* de A, o de $|A|$, y se representa por $|M_{ij}|$, al determinante de la matriz cuadrada de orden $(n-1)$ que resulta de suprimir en A todos los elementos de la fila i y todos los de la columna j.

A este determinante se le denomina, corrientemente, *menor* del elemento a_{ij}. El menor afectado de su signo, $(-1)^{i+j}|M_{ij}|$ recibe el nombre de *adjunto* del elemento a_{ij} y se representa por α_{ij}.

Ejemplo 2. Sea la matriz $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

y

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = |M_{11}|, \quad \alpha_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -|M_{12}|,$$
$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = |M_{13}|$$

Luego (3.8) es

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}| \\ &= a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13} \end{aligned}$$

En el Problema 9, se demuestra el teorema siguiente:

X. El valor del determinante $|A|$, siendo A la matriz (3.3), es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) de $|A|$ por sus respectivos adjuntos, es decir,

$$(3.9) \qquad |A| = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \cdots + a_{in}\alpha_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_{ik}$$

$$(3.10) \qquad |A| = a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \cdots + a_{nj}\alpha_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\alpha_{kj} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

Aplicando el Teorema VII, se puede demostrar que:

XI. La suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) de una matriz cuadrada A por los adjuntos de *otra* línea (fila o columna) es igual a cero.

Ejemplo 3. Si A es la matriz del Ejemplo 2 se tiene:

$$a_{31}\alpha_{31} + a_{32}\alpha_{32} + a_{33}\alpha_{33} = |A|$$

y

$$a_{12}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} + a_{32}\alpha_{32} = |A|$$

mientras que

$$a_{31}\alpha_{21} + a_{32}\alpha_{22} + a_{33}\alpha_{23} = 0$$

y

$$a_{12}\alpha_{13} + a_{22}\alpha_{23} + a_{32}\alpha_{33} = 0$$

Véanse Problemas 10-11.

MENOR Y COMPLEMENTO ALGEBRAICO DE UNA MATRIZ. Consideremos la matriz (3.3) y sea m de forma que $(1 \le m < n)$. Tomando la matriz formada por los elementos de las filas $i_1, i_2, \ldots, i_m$ y $j_1, j_2, \ldots, j_m$, y la formada por los de las filas $i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n$ y columnas $j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n$, se obtienen las dos matrices

$$(3.11) \qquad A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m} = \begin{bmatrix} a_{i_1, j_1} & a_{i_1, j_2} & \cdots & a_{i_1, j_m} \\ a_{i_2, j_1} & a_{i_2, j_2} & \cdots & a_{i_2, j_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_m, j_1} & a_{i_m, j_2} & \cdots & a_{i_m, j_m} \end{bmatrix}$$

y

$$(3.12) \qquad A^{j_{m+1},j_{m+2},\ldots,j_n}_{i_{m+1},i_{m+2},\ldots,i_n} = \begin{bmatrix} a_{i_{m+1},j_{m+1}} & a_{i_{m+1},j_{m+2}} & \cdots & a_{i_{m+1},j_n} \\ a_{i_{m+2},j_{m+1}} & a_{i_{m+2},j_{m+2}} & \cdots & a_{i_{m+2},j_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_n,j_{m+1}} & a_{i_n,j_{m+2}} & \cdots & a_{i_n,j_n} \end{bmatrix}$$

que son submatrices de A.

El determinante de cada una de estas submatrices es un *menor* de A y la pareja de menores

$$\left| A^{j_1,j_2,\ldots,j_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m} \right| \quad \text{y} \quad \left| A^{j_{m+1},j_{m+2},\ldots,j_n}_{i_{m+1},i_{m+2},\ldots,i_n} \right|$$

se llaman *menores complementarios* de A, siendo cada uno de ellos el complemento del otro.

Ejemplo 3. En la matriz cuadrada de quinto orden $A = \left[a_{ij} \right]$.

$$\left| A^{1,3}_{2,5} \right| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{51} & a_{53} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \left| A^{2,4,5}_{1,3,4} \right| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}$$

son un par de menores complementarios.

Sean

$$(3.13) \qquad p = i_1 + i_2 + \cdots + i_m + j_1 + j_2 + \cdots + j_m$$

y

$$(3.14) \qquad q = i_{m+1} + i_{m+2} + \cdots + i_n + j_{m+1} + j_{m+2} + \cdots + j_n$$

El menor con su signo $(-1)^p \left| A^{j_1,j_2,\ldots,j_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m} \right|$ se llama complemento algebraico de

$$\left| A^{j_{m+1},j_{m+2},\ldots,j_n}_{i_{m+1},i_{m+2},\ldots,i_n} \right|$$

y $(-1)^q \left| A^{j_{m+1},j_{m+2},\ldots,j_n}_{i_{m+1},i_{m+2},\ldots,i_n} \right|$ se llama complemento algebraico de

$$\left| A^{j_1,j_2,\ldots,j_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m} \right|$$

Ejemplo 4. En los menores del Ejemplo 3, $(-1)^{2+5+1+3} \left| A^{1,3}_{2,5} \right| = -\left| A^{1,3}_{2,5} \right|$ es el complemento algebraico de $\left| A^{2,4,5}_{1,3,4} \right|$ y $(-1)^{1+3+4+2+4+5} \left| A^{2,4,5}_{1,3,4} \right| = -\left| A^{2,4,5}_{1,3,4} \right|$ es el complemento algebraico de $\left| A^{1,3}_{2,5} \right|$ Obsérvese que el signo dado a los dos menores complementarios es el mismo. ¿Es cierto siempre?

Para $m = 1$, (3.11) se reduce a $A^{j_1}_{i_1} = \left[a_{i_1 j_1} \right]$ y $\left| A^{j_1}_{i_1} \right| = a_{i_1 j_1}$, un elemento de A. El menor complementario $\left| A^{j_2,j_3,\ldots,j_n}_{i_2,i_3,\ldots,i_n} \right|$ corresponde a $\left| M_{i_1,j_1} \right|$ con la notación de la sección anterior, y el complemento algebraico corresponde al adjunto $\alpha_{i_1 j_1}$.

Un menor de A, cuyos elementos de la diagonal principal son también elementos de la diagonal principal de A, se llama *menor principal* de A. El complemento de un menor principal de A es también un menor principal de A; el complemento algebraico de un menor principal es su complemento.

Ejemplo 5. En la matriz cuadrada de quinto orden $A = [a_{ij}]$,

$$|A_{1,3}^{1,3}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad |A_{2,4,5}^{2,4,5}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

son un par de menores complementarios de A. ¿Cuál es el complemento algebraico de cada uno de ellos?

Los términos menor, menor complementario, complemento algebraico y menor principal de una submatriz de una matriz cuadrada A, tal como se acaban de definir, se aplican sin modificación alguna al determinante $|A|$.

Véanse Problemas 12-13.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. (*a*) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 3(-1) = 11$

(*b*) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (1)(4\cdot 7 - 5\cdot 6) - 0 + 2(3\cdot 6 - 4\cdot 5) = -2 - 4 = -6$

(*c*) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = 1(4\cdot 21 - 15\cdot 6) + 6(3\cdot 6 - 4\cdot 5) = -18$

(*d*) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(3\cdot 3 - 5\cdot 1) = 4$

2. Sumando a los elementos de la primera columna los correspondientes de las otras,

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Según el Teorema I.

3. Sumando la segunda columna a la tercera, sacando el factor común de esta tercera columna y aplicando el Teorema VII,

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4. Se suma a la tercera fila la primera y la segunda y, a continuación, se saca el factor común 2; se resta la segunda fila de la tercera; se resta la tercera fila de la primera; se resta la primera fila de la segunda y, finalmente, se traslada la tercera fila hasta el primer lugar.

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

5. Demostrar, sin hacer el desarrollo, que $|A| = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = -(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)$.

Restando la segunda fila de la primera,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1^2-a_2^2 & a_1-a_2 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = (a_1-a_2)\begin{vmatrix} a_1+a_2 & 1 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{por el Teorema III.}$$

con lo que $(a_1 - a_2)$ es un factor o divisor de $|A|$. Análogamente, $a_2 - a_3$ y $a_3 - a_1$ también son divisores de $|A|$. Ahora bien, $|A|$ es de tercer orden, luego

(i) $$|A| = k(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)$$

El producto de los elementos de la diagonal principal, $a_1^2 a_2$, es un término de $|A|$ y de (i) se deduce que este término es $-ka_1^2a_2$. En consecuencia, $k = -1$ y $|A| = -(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)$. Obsérvese que $|A|$ solo se anula cuando dos de los tres elementos a_1, a_2 y a_3 son iguales.

6. Demostrar que si A es una matriz hemisimétrica de orden impar, $2p - 1$, su determinante es nulo, $|A| = 0$.

Como A es hemisimétrica, $A' = -A$; luego $|A'| = |-A| = (-1)^{2p-1}|A| = -|A|$. Ahora bien, por el Teorema II, $|A'| = |A|$; por tanto, $|A| = -|A|$, de donde $|A| = 0$.

7. Demostrar que si A es una matriz hermítica su polinomio determinante, $|A|$, es un número real.

Como A es hermítica, $\bar{A} = A'$, y $|\bar{A}| = |A'| = |A|$ por el Teorema II. Ahora bien,

$$|A| = \sum_{\rho} \epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = a + bi$$

luego

$$|\bar{A}| = \sum_{\rho} \epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} \bar{a}_{1j_1} \bar{a}_{2j_2} \cdots \bar{a}_{nj_n} = a - bi$$

Por tanto, para que $|\bar{A}| = |A|$ es preciso que $b = 0$; luego $|A|$ es un número real.

8. En la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$,

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \qquad \alpha_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \qquad \alpha_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \qquad \alpha_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \qquad \alpha_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5, \qquad \alpha_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \qquad \alpha_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

Obsérvese que los signos dados a los menores complementarios de los elementos para formar los adjuntos siguen la ley

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

en donde cada signo ocupa, en la matriz A, la misma posición que la del elemento cuyo adjunto se quiere hallar. Escribir la ley de los signos en una matriz de quinto orden.

9. Demostrar que el valor del determinante $|A|$ de una matriz cuadrada A de orden n es igual a la suma de los productos obtenidos al multiplicar cada uno de los elementos de una línea (fila o columna) de A por *sus* adjuntos respectivos.

Realizaremos la demostración para una fila. Los términos de (3.6) que contienen el factor a_{11} son

$$(a) \qquad a_{11} \sum \epsilon_{1,j_2 j_3 \ldots j_n} a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n}$$

Ahora bien, $\epsilon_{1,j_2 j_3 \cdots j_n} = \epsilon_{j_2 j_3 \cdots j_n}$ ya que en una permutación $1, j_1, j_2, \ldots, j_n$, el 1 está en orden natural. Luego (a) se puede escribir de la forma

$$(b) \qquad a_{11} \sum_{\sigma} \epsilon_{j_2 j_3 \ldots j_n} a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n}$$

en la que la suma se extiende a las $\sigma = (n-1)!$ permutaciones de los enteros $2, 3, \ldots, n$. Por tanto,

$$(c) \qquad a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}|M_{11}|$$

Consideremos la matriz B obtenida a partir de la matriz A trasladando $s-1$ lugares la columna de lugar s. Según el Teorema VI, $|B| = (-1)^{s-1}|A|$. El elemento de B que pertenece a la primera fila y primera columna es a_{1s}, y el menor de a_{1s} en la matriz B es, precisamente, el menor $|M_{1s}|$ de a_{1s} en la matriz A. Razonando de la misma forma que en (c), todos los términos de $a_{1s}|M_{1s}|$ son todos los de $|B|$ que tienen al elemento a_{1s} como factor y todos los de $(-1)^{s-1}|A|$ tienen el factor a_{1s}. Por tanto, los términos de $a_{1s}\{(-1)^{s-1}|M_{1s}|\}$ son todos los de $|A|$ que tienen el factor a_{1s}. Luego,

$$(3.15) \qquad \begin{aligned} |A| &= a_{11}\{(-1)^{1+1}|M_{11}|\} + a_{12}\{(-1)^{1+2}|M_{12}|\} \\ &\quad + \cdots + a_{1s}\{(-1)^{1+s}|M_{1s}|\} + \cdots + a_{1n}\{(-1)^{1+n}|M_{1n}|\} \\ &= a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + \cdots + a_{1n}\alpha_{1n} \end{aligned}$$

ya que $(-1)^{s-1} = (-1)^{s+1}$. Para $i = 1$ se obtiene la expresión (3.9). El desarrollo (3.15) se llama desarrollo del determinante $|A|$ por los elementos de la primera fila.

El desarrollo de $|A|$ por los elementos de la fila r (es decir, (3.9) para $i = r$) se obtiene razonando de forma análoga a la que se acaba de hacer. Sea B la matriz obtenida desplazando $r-1$ lugares la fila r y $s-1$ lugares la columna s. Entonces,

$$|B| = (-1)^{r-1} \cdot (-1)^{s-1}|A| = (-1)^{r+s}|A|$$

El elemento que pertenece a la primera fila y primera columna de B es a_{rs}, y el menor de a_{rs} en la matriz B es, precisamente, el menor de a_{rs} en A. Luego los términos de

$$a_{rs}\{(-1)^{r+s}|M_{rs}|\}$$

son todos los de $|A|$ que contienen al factor a_{rs}. Por tanto,

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{rk}\{(-1)^{r+k}|M_{rk}|\} = \sum_{k=1}^{n} a_{rk}\alpha_{rk}$$

que es el desarrollo (3.9) para $i = r$.

10. Sea α_{ij} el adjunto del elemento a_{ij} en la matriz $A = [a_{ij}]$ de orden n; demostrar que:

$$(i) \qquad k_1\alpha_{1j} + k_2\alpha_{2j} + \cdots + k_n\alpha_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & k_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & k_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & k_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Esta relación se deduce de (3.10) sustituyendo a_{1j} por k_1, a_{2j} por $k_2, \ldots, a_{nj}$ por k_n. Al hacer estas sustituciones no se alteran los adjuntos, ya que ninguno de ellos contiene un elemento de la columna j de la matriz A.

Según el Teorema VII, el determinante de (*i*) es nulo para $k_r = a_{rs}$, ($r = 1, 2, \ldots, n$ y $s \neq j$). De los Teoremas VIII y VII se deduce que el determinante de (*i*) es igual a $|A|$ para $k_r = a_{rj} + ka_{rs}$, ($r = 1, 2, \ldots, n$ y $s \neq j$).

Escribir la igualdad análoga a (*i*) obtenida de (3.9) cuando los elementos de la fila i de la matriz A se sustituyen por $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

11. Calcular: (*a*) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}$ (*c*) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$ (*e*) $|A| = \begin{vmatrix} 28 & 25 & 38 \\ 42 & 38 & 65 \\ 56 & 47 & 83 \end{vmatrix}$

(*b*) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ (*d*) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

(*a*) Desarrollando por los elementos de la segunda columna (véase Teorema X)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = a_{12}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} + a_{32}\alpha_{32} = 0\cdot\alpha_{12} + 0\cdot\alpha_{22} + (-5)\alpha_{32}$$

$$= -5(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5(4-6) = -10$$

(*b*) Restando el doble de la segunda columna de la tercera (véase Teorema IX)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8-2\cdot4 \\ -2 & 1 & 5-2\cdot1 \\ -3 & 2 & 4-2\cdot2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -3(14) = -42$$

(*c*) Restando el triple de la segunda fila de la primera y sumando el doble de la segunda fila a la tercera,

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-3(1) & 4-3(2) & 5-3(3) \\ 1 & 2 & 3 \\ -2+2(1) & 5+2(2) & -4+2(3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -(-4+36) = -32$$

(*d*) Restando la primera columna de la segunda y procediendo después como en (*c*)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 5 & -11 & 3 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-2(1) & 1 & -4+4(1) \\ 5-2(-11) & -11 & 3+4(-11) \\ 4-2(-2) & -2 & -3+4(-2) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 27 & -11 & -41 \\ 8 & -2 & -11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 27 & -41 \\ 8 & -11 \end{vmatrix} = -31$$

(*e*) Sacando el factor común 14 en la primera columna y teniendo en cuenta el Teorema IX en la reducción de elementos en las columnas restantes,

$$|A| = \begin{vmatrix} 28 & 25 & 38 \\ 42 & 38 & 65 \\ 56 & 47 & 83 \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} 2 & 25 & 38 \\ 3 & 38 & 65 \\ 4 & 47 & 83 \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} 2 & 25-12(2) & 38-20(2) \\ 3 & 38-12(3) & 65-20(3) \\ 4 & 47-12(4) & 83-20(4) \end{vmatrix}$$

$$= 14\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 9 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14\begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -14(-1-54) = 770$$

12. Demostrar que p y q definidos por (3.13) y (3.14) son ambos pares o ambos impares.

Puesto que el índice de cada fila (columna) es p o q, pero no ambos simultáneamente,

$$p + q = (1 + 2 + \cdots + n) + (1 + 2 + \cdots + n) = 2 \cdot \tfrac{1}{2}n(n+1) = n(n+1)$$

Ahora bien, $p + q$ es par (ya que n o $n + 1$ son pares); por tanto, p y q son ambos pares o ambos impares. En consecuencia, $(-1)^p = (-1)^q$, con lo que solo es necesario calcular uno de ellos.

13. En la matriz $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{bmatrix}$, el complemento algebraico de $|A_{2,3}^{2,4}|$ es

$$(-1)^{2+3+2+4}|A_{1,4,5}^{1,3,5}| = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 16 & 18 & 20 \\ 21 & 23 & 25 \end{vmatrix} \qquad \text{(véase Problema 12)}$$

y el complemento algebraico de $|A_{1,4,5}^{1,3,5}|$ es $-|A_{2,3}^{2,4}| = -\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 12 & 14 \end{vmatrix}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

14. Demostrar que la permutación 12534 de los enteros 1, 2, 3, 4, 5 es par, 24135 impar, 41532 par, 53142 impar y 52314 par.

15. Escribir las permutaciones de los elementos 1, 2, 3, 4; demostrar que la mitad de ellas son pares y la otra mitad impares.

16. Sean a, b, c, d, e los elementos de la diagonal principal de una matriz cuadrada A de quinto orden. Demostrar, teniendo en cuenta (3.6), que cuando A es diagonal, triangular superior o triangular inferior, $|A| = abcde$.

17. Siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, demostrar que $AB \neq BA \neq A'B \neq AB' \neq A'B' \neq B'A'$ aunque el determinante de cada producto sea 4.

18. Hallar, como en el Problema 1,

(*a*) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27$ (*b*) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4$ (*c*) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0$

19. (*a*) Comprobar que $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} = -4$.

(*b*) Llamando $|B|$ al determinante obtenido a partir de $|A|$ multiplicando los elementos de su segunda columna por 5, hallar $|B|$ (comprobación del Teorema III).

(*c*) Llamando $|C|$ al determinante obtenido a partir de $|A|$ permutando las columnas primera y tercera, hallar $|C|$ (comprobación del Teorema V).

(*d*) Demostrar que $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$, (comprobación del Teorema VIII).

(*e*) Se obtiene a partir de $|A|$ el determinante $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ restando el triple de los elementos de la primera columna de los elementos correspondientes de la tercera columna. Hallar $|D|$ (comprobación del Teorema IX).

(*f*) Hallar el valor del determinante que resulta al restar, en el determinante $|A|$, el doble de la primera fila de la segunda y el cuádruplo de la primera fila de la tercera.

(*g*) Demostrar que el determinante obtenido a partir de $|A|$ restando la tercera columna del triplo de la primera es igual a tres veces $|A|$. Comparar con (*e*). No deben confundirse (*e*) y (*g*).

20. Sea A una matriz cuadrada de orden n, y k un escalar cualquiera; demostrar que $|kA| = k^n|A|$ teniendo en cuenta (3.6).

21. Demostrar: (*a*) Si $|A| = k$, $|\bar{A}| = \bar{k} = |\bar{A}'|$.
(*b*) Si A es una matriz hemihermítica, $|A|$ es un número real o imaginario puro.

22. (*a*) Hacer un recuento del número de cambios entre líneas (filas o columnas) adyacentes que es necesario efectuar para obtener la matriz B a partir de A en el Teorema V y, a continuación, demostrar dicho teorema.
(*b*) Idem respecto del Teorema VI.

23. Demostrar el Teorema VII. *Ind.* Permutar dos filas iguales y aplicar el Teorema V.

24. Demostrar: Si dos líneas cualesquiera de una matriz cuadrada A son proporcionales, $|A| = 0$.

25. Demostrar el Teorema IX teniendo en cuenta los Teoremas VIII, III y VII.

26. Hallar el valor de los determinantes del Problema 18 por los procedimientos del Problema 11.

27. Aplicar (3.6) para hallar $|A| = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{vmatrix}$; a continuación, comprobar que $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$. Por consiguiente, si $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2)$, siendo A_1 y A_2 dos matrices cuadradas de segundo orden, $|A| = |A_1| \cdot |A_2|$.

28. Demostrar que el adjunto de cada elemento de $\begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ es dicho elemento.

29. Demostrar que el adjunto de un elemento de una fila cualquiera de $\begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ es el elemento correspondiente de la columna de igual índice que el de la fila.

30. Demostrar: (*a*) Si A es una matriz simétrica, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ para $i \neq j$.

(*b*) Si A es una matriz cuadrada de orden n y hemisimétrica, $\alpha_{ij} = (-1)^{n-1}\alpha_{ji}$ para $i \neq j$.

31. Dada la matriz A del Problema 8

(*a*) demostrar $|A| = 1$

(*b*) formar la matriz $C = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$ y demostrar que $AC = I$.

(*c*) Razónese por qué se puede deducir de forma inmediata el resultado de (*b*) una vez conocido el de (*a*).

32. Multiplicando las columnas de $|A| = \begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ca & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}$ respectivamente por a, b, c, y sacando el factor común de cada una de las filas, demostrar que $|A| = \begin{vmatrix} bc & ab & ca \\ ab & ca & bc \\ ca & bc & ab \end{vmatrix}$.

33. Demostrar, sin hacer el desarrollo, que $\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$.

34. Demostrar que el determinante cuadrado de orden n $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$.

35. Demostrar: $\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \ldots & a_1 & 1 \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \ldots & a_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \ldots & a_n & 1 \end{vmatrix} = \{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)\}\{(a_2-a_3)(a_2-a_4)\ldots(a_2-a_n)\} \cdots \{a_{n-1}-a_n\}$.

36. Demostrar, sin hacer el desarrollo, que $\begin{vmatrix} na_1+b_1 & na_2+b_2 & na_3+b_3 \\ nb_1+c_1 & nb_2+c_2 & nb_3+c_3 \\ nc_1+a_1 & nc_2+a_2 & nc_3+a_3 \end{vmatrix} = (n+1)(n^2-n+1) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

37. Demostrar, sin hacer el desarrollo, que la ecuación $\begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ x+a & 0 & x-c \\ x+b & x+c & 0 \end{vmatrix} = 0$ tiene una raíz igual a 0.

38. Demostrar: $\begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix} = b^{n-1}(na+b)$.

Capítulo 4

Cálculo de determinantes

METODOS DE CALCULO. Los procedimientos de cálculo de los determinantes de segundo y tercer orden se han visto en el Capítulo 3. En el Problema 11 de dicho capítulo se expusieron dos formas de aplicar el Teorema IX: (*a*) hacer que un elemento sea 1 o -1, si el determinante dado no tiene ningún elemento igual a estos números, (*b*) hacer que un elemento del determinante sea igual a 0.

Para hallar el valor de un determinante de orden superior al tercero, el método general es obtener, aplicando repetidamente el Teorema IX del Capítulo 3, a partir del determinante dado $|A|$, otro determinante $|B| = |b_{ij}|$ que goce de la propiedad de que todos los elementos de alguna línea (fila o columna), excepto uno, sean iguales a cero. Llamando b_{pq} este elemento distinto de cero y β_{pq} su adjunto,

$$|A| = |B| = b_{pq} \cdot \beta_{pq} = (-1)^{p+q} b_{pq} \cdot \text{menor complementario de } b_{pq}$$

A continuación, se opera de la misma forma con el menor complementario del elemento b_{pq} y se sigue el proceso hasta que se obtenga un determinante de segundo o tercer orden.

Ejemplo 1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+2(3) & 3+2(-2) & -2+2(1) & 4+2(2) \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3-3(3) & 2-3(-2) & 3-3(1) & 4-3(2) \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 0 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ -6 & 8 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 8 & -1 & 8 \\ -6 & 8 & -2 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8+8(-1) & -1 & 8+8(-1) \\ -6+8(8) & 8 & -2+8(8) \\ -2+8(4) & 4 & 5+8(4) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 58 & 8 & 62 \\ 30 & 4 & 37 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} 58 & 62 \\ 30 & 37 \end{vmatrix} = -286$$

Véanse Problemas 1-3.

En el caso de un determinante cuyos elementos sean del tipo del Ejemplo 2, se puede seguir la variante siguiente: Se divide la primera fila por uno de sus elementos que sea distinto de cero y, a continuación, se procede de forma análoga a la anterior para obtener elementos nulos en una línea (fila o columna).

Ejemplo 2.

$$\begin{vmatrix} 0{,}921 & 0{,}185 & 0{,}476 & 0{,}614 \\ 0{,}782 & 0{,}157 & 0{,}527 & 0{,}138 \\ 0{,}872 & 0{,}484 & 0{,}637 & 0{,}799 \\ 0{,}312 & 0{,}555 & 0{,}841 & 0{,}448 \end{vmatrix} = 0{,}921 \begin{vmatrix} 1 & 0{,}201 & 0{,}517 & 0{,}667 \\ 0{,}782 & 0{,}157 & 0{,}527 & 0{,}138 \\ 0{,}872 & 0{,}484 & 0{,}637 & 0{,}799 \\ 0{,}312 & 0{,}555 & 0{,}841 & 0{,}448 \end{vmatrix} = 0{,}921 \begin{vmatrix} 1 & 0{,}201 & 0{,}517 & 0{,}667 \\ 0 & 0 & 0{,}123 & -0{,}384 \\ 0 & 0{,}309 & 0{,}196 & 0{,}217 \\ 0 & 0{,}492 & 0{,}680 & 0{,}240 \end{vmatrix}$$

$$= 0{,}921 \begin{vmatrix} 0 & 0{,}123 & -0{,}384 \\ 0{,}309 & 0{,}196 & 0{,}217 \\ 0{,}492 & 0{,}680 & 0{,}240 \end{vmatrix} = 0{,}921(-0{,}384) \begin{vmatrix} 0 & -0{,}320 & 1 \\ 0{,}309 & 0{,}196 & 0{,}217 \\ 0{,}492 & 0{,}680 & 0{,}240 \end{vmatrix}$$

$$= 0{,}921(-0{,}384) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0{,}309 & 0{,}265 & 0{,}217 \\ 0{,}492 & 0{,}757 & 0{,}240 \end{vmatrix} = 0{,}921(-0{,}384) \begin{vmatrix} 0{,}309 & 0{,}265 \\ 0{,}492 & 0{,}757 \end{vmatrix}$$

$$= 0{,}921(-0{,}384)(0{,}104) = -0{,}037$$

DESARROLLO DE LAPLACE. El desarrollo de un determinante $|A|$ de orden n por los elementos de una línea (fila o columna) es un caso particular del desarrollo de Laplace. Supongamos que en lugar de elegir una fila de $|A|$ se toman m filas, $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Con estas m filas se pueden formar

$$\rho = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2 \ldots m} \text{menores} \left| A_{i_1, i_2, \ldots, i_m}^{j_1, j_2, \ldots, j_m} \right|$$

que son las combinaciones de n columnas tomadas de m en m. A partir de estos menores y de sus complementos algebraicos, se obtiene el desarrollo de Laplace siguiente:

$$(4.1) \qquad |A| = \sum_{\rho} (-1)^s \left| A_{i_1, i_2, \ldots, i_m}^{j_1, j_2, \ldots, j_m} \right| \cdot \left| A_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n} \right|$$

en donde $s = i_1 + i_2 + \ldots + i_m + j_1 + j_2 + \ldots + j_m$ y la suma se extiende a las ρ combinaciones de las n columnas tomadas de m en m.

Ejemplo 3.

Hallar $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$, utilizando los menores de las dos primeras filas

De (4.1)

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+2+1+2} |A_{1,2}^{1,2}| \cdot |A_{3,4}^{3,4}| + (-1)^{1+2+1+3} |A_{1,2}^{1,3}| \cdot |A_{3,4}^{2,4}| \\ &\quad + (-1)^{1+2+1+4} |A_{1,2}^{1,4}| \cdot |A_{3,4}^{2,3}| + (-1)^{1+2+2+3} |A_{1,2}^{2,3}| \cdot |A_{3,4}^{1,4}| \\ &\quad + (-1)^{1+2+2+4} |A_{1,2}^{2,4}| \cdot |A_{3,4}^{1,3}| + (-1)^{1+2+3+4} |A_{1,2}^{3,4}| \cdot |A_{3,4}^{1,2}| \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (-13)(15) - (8)(-6) + (-8)(-12) + (-1)(23) - (14)(6) + (-8)(16) \\ &= -286 \end{aligned}$$

Véanse Problemas 4-6.

DETERMINANTE DE UN PRODUCTO. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n; en estas condiciones,

$$(4.2) \qquad |AB| = |A| \cdot |B|$$

Véase Problema 7.

DESARROLLO POR LOS ELEMENTOS DE LA PRIMERA FILA Y PRIMERA COLUMNA. Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada de orden n; entonces

$$(4.3) \qquad |A| = a_{11}\alpha_{11} - \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} a_{i1} a_{1j} \alpha_{1j}^{i1}$$

siendo α_{11} el adjunto del elemento α_{11} y α_{1j}^{i1} el complemento algebraico del menor $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}$ de A.

DERIVADA DE UN DETERMINANTE. Sea la matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ de orden n cuyos elementos son funciones derivables de la variable x. En estas condiciones:

I. La derivada de $|A|$ con respecto a x, $\dfrac{d}{dx}|A|$, es igual a la suma de los n determinantes que resultan al sustituir de todas las maneras posibles los elementos de una línea (fila o columna) de $|A|$ por sus derivadas con respecto a x.

Ejemplo 4.

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 0 & 2 & 3x^2 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 5 + 4x - 12x^2 - 6x^5$$

Véase Problema 8.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 7 & 4 & -3 & 10 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 7-2(2) & 4-2(3) & -3-2(-2) & 10-2(4) \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -286$$ Véase Ejemplo 1.

Por supuesto, no es ésta la única forma de conseguir que uno de los elementos sea $+1$ o -1; por ejemplo, se puede restar la primera columna de la segunda, la cuarta de la segunda, la primera de la tercera, etc.

2 $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1+1 & 2-2(1) \\ 2 & 3 & 2+2 & -2-2(2) \\ 2 & 4 & 2+2 & 1-2(2) \\ 3 & 1 & 5+3 & -3-2(3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -6 \\ 2 & 4 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 8 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2(4) & 4-2(4) & -6-2(-3) \\ 4 & 4 & -3 \\ 1-3(4) & 8-3(4) & -9-3(-3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -3 \\ -11 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ -11 & -4 \end{vmatrix} = -72$$

3. Hallar $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{vmatrix}$

Multiplicando la segunda fila por $1+i$ y la tercera fila por $1+2i$ se obtiene

$$(1+i)(1+2i)|A| = (-1+3i)|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 2 & 0 & 5-i \\ 5 & -4+7i & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 2 & 0 & 5-i \\ 1 & -4+7i & -10+2i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 0 & 8-14i & 25-5i \\ 1 & -4+7i & -10+2i \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+i & 1+2i \\ 8-14i & 25-5i \end{vmatrix} = -6 + 18i$$

de donde $|A| = 6$.

4. Deducir el desarrollo de Laplace del determinante $|A| = |a_{ij}|$ de orden n utilizando menores de orden $m < n$.

Consideremos el menor cuadrado de orden m $\left|A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right|$ de $|A|$ en el cual los índices de las filas y de las columnas están en orden natural. Efectuando $i_1 - 1$ intercambios de filas adyacentes de $|A|$, la fila i_1 puede pasar a ocupar el primer lugar; efectuando $i_2 - 2$ intercambios de filas adyacentes, la fila i_2 puede pasar a ocupar el segundo lugar, . . . , efectuando $i_m - m$ intercambios de filas adyacentes, la fila i_m puede pasar a ocupar el lugar m. Por tanto, después de $(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \cdots + (i_m - m) = i_1 + i_2 + \cdots + i_m - \frac{1}{2}m(m + 1)$ intercambios de las filas adyacentes $i_1, i_2, \ldots, i_m$, éstas pasan a constituir las m primeras filas. Análogamente, después de $j_1 + j_2 + \cdots + j_m - \frac{1}{2}m(m + 1)$ intercambios de las columnas adyacentes $j_1, j_2, \ldots, j_m$, éstas pasan a formar las m primeras columnas. Como consecuencia de tales cambios entre filas y columnas adyacentes, el menor elegido anteriormente pasa a ocupar el extremo superior izquierdo, y su complemento algebraico ocupará el extremo inferior derecho del determinante; además, el determinante $|A|$ cambia de signo un número de veces dado por $\sigma = i_1 + i_2 + \cdots + i_m + j_1 + j_2 + \cdots + j_m - m(m + 1)$, que equivalen a un número de intercambios $s = i_1 + i_2 + \cdots + i_m + j_1 + j_2 + \cdots + j_m$. Por consiguiente,

$$\left|A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right| \cdot \left|A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}\right| \quad \text{da lugar a } m!(n-m)! \text{ términos de } (-1)^s|A| \text{ o bien}$$

$$(a) \qquad (-1)^s\left|A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right| \cdot \left|A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}\right| \quad \text{da lugar a } m!(n-m)! \text{ términos de } |A|.$$

Supongamos que se mantienen fijas las filas $i_1, i_2, \ldots, i_m$. A partir de estas filas podemos seleccionar $\rho = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2 \ldots m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ diferentes menores cuadrados de orden m. Cada uno de estos menores, multiplicados por sus complementos algebraicos, dan lugar a $m!(n - m)!$ términos de $|A|$. Ahora bien, puesto que entre estos productos, por su formación, no puede haber términos de $|A|$ repetidos,

$$|A| \quad = \quad \sum_{\rho}(-1)^s\left|A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right| \cdot \left|A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}\right|$$

en donde $s = i_1 + i_2 + \cdots + i_m + j_1 + j_2 + \cdots + j_m$ y la suma se extiende a las ρ combinaciones de los índices de las columnas, $j_1, j_2, \ldots, j_m$.

5. Hallar $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, empleando las menores de las dos primeras columnas.

$$|A| \quad = \quad (-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \; + \; (-1)^{1+4+1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \; + \; (-1)^{2+4+1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \quad (-3)(1) \; + \; (-2)(1) \; - \; (5)(-1)$$

$$= \quad 0$$

6. Siendo A, B y C tres matrices cuadradas de orden n, demostrar que

$$|P| \quad = \quad \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} \quad = \quad |A| \cdot |B|$$

Con las n primeras filas de $|P|$ solo se puede formar el menor $|A|$ distinto de cero. Su complemento algebraico es $|B|$. Por tanto, según el desarrollo de Laplace, $|P| = |A| \cdot |B|$.

7. Demostrar que $|AB| = |A| \cdot |B|$.

Supongamos que $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son dos matrices cuadradas de orden n. Sea $C = [c_{ij}] = AB$, es decir, $c_{ij} = \sum_{1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Según el Problema 6,

$$|P| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

Sumando la columna $(n+1)$ de $|P|$ a la primera multiplicada por b_{11}, a la segunda por $b_{21}, \ldots$, a la enésima por b_{n1}, resulta

$$|P| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Sumando la columna $(n+2)$ de $|P|$ a la primera multiplicada por b_{12}, a la segunda por $b_{22}, \ldots$, a la enésima por b_{n2}, se obtiene

$$|P| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Continuando así el proceso, se deduce finalmente que $|P| = \begin{vmatrix} A & C \\ -I_n & 0 \end{vmatrix}$ A partir de las n últimas filas de $|P|$ solo se puede formar el menor cuadrado $|-I_n| = (-1)^n$ de orden n distinto de cero. Su complemento algebraico es $(-1)^{1+2+\cdots+n+(n+1)+\cdots+2n}|C| = (-1)^{n(2n+1)}|C|$. Por tanto, $|P| = (-1)^n(-1)^{n(2n+1)}|C| = |C|$, de donde $|C| = |AB| = |A| \cdot |B|$.

8. Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ en donde $a_{ij} = a_{ij}(x)$, $(i, j = 1, 2, 3)$, son funciones derivables de x. Entonces,

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

y representando a $\dfrac{d}{dx}\, a_{ij}$ por a'_{ij},

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}|A| = {} & a'_{11}a_{22}a_{33} + a'_{22}a_{11}a_{33} + a'_{33}a_{11}a_{22} + a'_{12}a_{23}a_{31} + a'_{23}a_{12}a_{31} + a'_{31}a_{12}a_{23} \\
& + a'_{13}a_{32}a_{21} + a'_{32}a_{13}a_{21} + a'_{21}a_{13}a_{32} - a'_{11}a_{23}a_{32} - a'_{23}a_{11}a_{32} - a'_{32}a_{11}a_{23} \\
& - a'_{12}a_{21}a_{33} - a'_{21}a_{12}a_{33} - a'_{33}a_{12}a_{21} - a'_{13}a_{22}a_{31} - a'_{22}a_{13}a_{31} - a'_{31}a_{13}a_{22}
\end{aligned}
$$

$$
= a'_{11}\alpha_{11} + a'_{12}\alpha_{12} + a'_{13}\alpha_{13} + a'_{21}\alpha_{21} + a'_{22}\alpha_{22} + a'_{23}\alpha_{23} + a'_{31}\alpha_{31} + a'_{32}\alpha_{32} + a'_{33}\alpha_{33}
$$

$$
= \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}
$$

según el Problema 10, Capítulo 3.

PROBLEMAS PROPUESTOS

9. Calcular:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 156$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -304$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 41$ (d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 118$

10. Demostrar que $|\bar{A}'A|$ es un número real y no negativo, siendo A una matriz cuadrada de orden n.

11. Hallar el determinante del Problema 9(*a*) mediante los menores de las dos primeras filas; idem con los menores de las dos primeras columnas.

12. (*a*) Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{bmatrix}$

Teniendo en cuenta que $|AB| = |A| \cdot |B|$ demostrar: $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1b_1 - a_2b_2)^2 + (a_2b_1 + a_1b_2)^2$.

(*b*) Sean $A = \begin{bmatrix} a_1+ia_3 & a_2+ia_4 \\ -a_2+ia_4 & a_1-ia_3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} b_1+ib_3 & b_2+ib_4 \\ -b_2+ib_4 & b_1-ib_3 \end{bmatrix}$

Teniendo en cuenta que $|AB| = |A| \cdot |B|$ expresar $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2)$ como suma de cuatro cuadrados.

13. Hallar $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ por los menores de las tres primeras filas. *Sol.* -720.

14. Hallar $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ por los menores de las dos primeras columnas. *Sol.* 2.

15. Siendo $A_1, A_2, \ldots, A_s$ matrices cuadradas, aplicar el desarrollo de Laplace para demostrar que:

$$|\operatorname{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_s)| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_s|$$

16. Desarrollar $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$ por los menores de las dos primeras filas y demostrar que:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} \; - \; \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} \; + \; \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \; = \; 0$$

17. Aplicar el desarrollo de Laplace para demostrar que el determinante de orden n, $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix}$ es igual a cero cuando $k > \frac{1}{2}n$, siendo 0 una matriz de orden k.

18. En $|A| = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13} + a_{14}\alpha_{14}$ desarrollar los adjuntos $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}$ por los elementos de su primera columna para demostrar que

$$|A| \;=\; a_{11}\alpha_{11} \;-\; \sum_{i=2}^{4}\sum_{j=2}^{4} a_{i1}\, a_{1j}\, \alpha_{1j}^{i1}$$

en donde α_{1j}^{i1} es el complemento algebraico del menor $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}$ de $|A|$.

19. Llamando α_{ij} al adjunto del elemento a_{ij} en la matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ de orden n, demostrar que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & p_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & p_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n & 0 \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} 0 & q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ p_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \;=\; -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j \alpha_{ij}$$

Ind. Aplicar (4.3).

20. Hallar la derivada de los determinantes siguientes:

(a) $\begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x+1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x^2 & 2x+1 & x^3 \\ 0 & 3x-2 & x^2+1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} x^2-1 & x-1 & 1 \\ x^4 & x^3 & 2x+5 \\ x+1 & x^2 & x \end{vmatrix}$

Sol. (a) $2x + 9x^2 - 8x^3$ (b) $1 - 6x + 21x^2 + 12x^3 - 15x^4$. (c) $6x^5 - 5x^4 - 28x^3 + 9x^2 + 20x - 2$

21. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n reales, siendo A regular y $H = A + iB$ hermítica. Demostrar la relación

$$|H|^2 = |A|^2 \cdot |I + (A^{-1}B)^2|$$

Capítulo 5

Equivalencia

CARACTERISTICAS DE UNA MATRIZ. La característica o rango de una matriz no nula A es igual a r si el determinante de al menos uno de sus menores cuadrados de orden r es distinto de cero, siendo nulos los correspondientes a todos los menores cuadrados de orden $(r+1)$, si es que existen. La característica de una matriz nula es 0.

Ejemplo 1. La característica de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ es $r = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ siendo $|A| = 0$.

Véase Problema 1.

Una matriz cuadrada A de orden n se llama *regular* si su característica $r = n$, es decir, si su determinante es distinto de cero, $|A| \neq 0$. En caso contrario, A recibe el nombre de *singular*. La matriz del Ejemplo 1 es singular.

De la igualdad $|AB| = |A| \cdot |B|$ se deduce:

I. El producto de dos o más matrices cuadradas regulares de orden n es otra matriz regular; el producto de dos o más matrices cuadradas de orden n es una matriz singular si al menos una de ellas es singular.

TRANSFORMACIONES ELEMENTALES. Son las operaciones con matrices que no modifican ni su orden ni su característica. Son transformaciones elementales, las siguientes:

(1) La permutación de la fila i y la fila j, se representa por H_{ij}.
La permutación de la columna i y la columna j, se representa por K_{ij}.

(2) El producto de todos los elementos de la fila i por un escalar k distinto de cero, se representa por $H_i(k)$.
El producto de todos los elementos de la coluna i por un escalar k distinto de cero; se representa por $K_i(k)$.

(3) La suma de los elementos de la fila i con los correspondientes de la fila j, multiplicados por un escalar k, se representa por $H_{ij}(k)$.
La suma de los elementos de la columna i con los correspondientes de la columna j, multiplicados por un escalar k, se representa por $K_{ij}(k)$.

Las transformaciones de tipo H se llaman *transformaciones elementales de fila* y las transformaciones de tipo K se denominan *transformaciones elementales de columna*. Ambas son, en general, *transformaciónes elementales de línea*.

Las transformaciones elementales, por realizarse sobre líneas de un determinante, no precisan demostración. Es evidente que este tipo de transformaciones no alteran el orden de la matriz. En el Problema 2, se demuestra que tampoco modifican su característica.

INVERSA DE UNA TRANSFORMACION ELEMENTAL. La *inversa* de una transformación elemental es una operación que destruye el efecto de ésta; es decir, si después de realizar una transformación elemental sobre A se aplica la transformación inversa, se reproduce la matriz original A.

Ejemplo 2. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Mediante la transformación elemental de fila $H_{21}(-2)$ se obtiene la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Por efecto de la transformación elemental $H_{21}(+2)$ sobre B, se reproduce A.
Por tanto, $H_{21}(-2)$ y $H_{21}(+2)$ son transformaciones elementales inversas.

Las transformaciones elementales inversas son:

(1′) $\quad \overset{-1}{H_{ij}} = H_{ij} \qquad \overset{-1}{K_{ij}} = K_{ij}$

(2′) $\quad \overset{-1}{H_i}(k) = H_i(1/k) \qquad \overset{-1}{K_i}(k) = K_i(1/k)$

(3′) $\quad \overset{-1}{H_{ij}}(k) = H_{ij}(-k) \qquad \overset{-1}{K_{ij}}(k) = K_{ij}(-k)$

Por tanto,

II. La inversa de una transformación elemental es otra transformación elemental del mismo tipo.

MATRICES EQUIVALENTES. Dos matrices A y B se denominan *equivalentes*, $A \sim B$, si una de ellas se deduce de la otra como consecuencia de transformaciones elementales de línea.

Las matrices equivalentes han de tener el mismo orden e igual característica.

Ejemplo 3. Aplicando sucesivamente las transformaciones elementales $H_{21}(-2)$, $H_{31}(1)$, $H_{32}(-1)$,

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

Como todos los menores cuadrados de tercer orden son nulos, mientras que $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$, la característica de B es 2; luego el rango de A también es 2. Este procedimiento de obtener a partir de una matriz A otra equivalente B, cuya característica se deduce a simple vista, es mucho más sencillo que el cálculo de los determinantes de los diversos menores de A.

Véase Problema 3.

EQUIVALENCIA DE FILA. Si una matriz B se deduce de otra A aplicando transformaciones elementales de fila, las matrices A y B presentan *equivalencia de fila*. En el Ejemplo 3, las matrices A y B presentan este tipo de equivalencia.

Cualquier matriz A no nula de característica r presenta equivalencia de fila con una *matriz canónica* C en la que

(*a*) Uno o más elementos de cada una de las r filas son distintos de cero, mientras que todos los elementos de las filas restantes son nulos.

(*b*) El primer elemento distinto de cero en la fila i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ es 1; sea j_i la columna a la que pertenece este elemento.

(*c*) $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$.

(*d*) El único elemento distinto de cero de la columna j_i, $(i = 1, 2, \ldots, r)$, es el elemento 1 de la fila i.

Para pasar de A a C, supongamos que j_1 es el índice de la primera columna de A cuyos elementos no son todos nulos.

(i_1) Si $a_{1j_1} \neq 0$, mediante la transformación $H_1(1/a_{1j_1})$ se puede reducir a 1 cuando sea necesario.

(i_2) Si $a_{1j_1} = 0$, siendo $a_{pj_1} \neq 0$, se aplica la transformación H_{1p} y se procede como en (i_1).

(ii) Se aplican transformaciones de fila del tipo (3) con múltiplos apropiados de la primera fila para reducir a cero todos los demás elementos de la columna j_1.

Si los elementos no nulos solo se encuentran en la primera fila de B, entonces $B = C$. En los demás casos, sea j_2 el índice de la primera columna en la que esto no ocurre. Si $b_{2j_2} \neq 0$, se aplica $H_2(1/b_{2j_2})$ como en (i_1); si $b_{2j_2} = 0$, siendo $b_{qj_2} \neq 0$, se aplica H_{2q} y se procede como en (i_1). A continuación se aplica (ii) para hacer que todos los demás elementos de la columna j_2 sean ceros.

Si los elementos distintos de cero se encuentran solamente en las dos primeras filas de la matriz resultante, se obtiene la matriz C. En los demás casos, se repite el procedimiento hasta que se llegue a la matriz C.

Ejemplo 4. Mediante transformaciones de fila $H_{21}(-2)$, $H_{31}(1)$; $H_2(1/5)$; $H_{12}(1)$, $H_{32}(-5)$ sobre la matriz A del Ejemplo 3, resulta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 17/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= C$$

que goza de las propiedades (*a*)-(*d*).

Véase Problema 4.

FORMA NORMAL DE UNA MATRIZ. Mediante transformaciones elementales, cualquier matriz A de característica $r > 0$ se puede reducir a una de las formas

$$(5.1) \qquad I_r, \quad \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [I_r \ \ 0], \quad \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

que se llaman *formas normales*. Una matriz nula es su propia forma normal.

Como se pueden aplicar tanto las transformaciones de fila como de columna, el elemento 1 de la primera fila obtenido en la sección anterior se puede desplazar hasta la primera columna. A continuación, se reducen a cero todos los elementos de la primera fila y de la primera columna. Análogamente, el elemento 1 de la segunda fila se puede llevar a la segunda columna, y así sucesivamente.

Por ejemplo, la serie de transformaciones $H_{21}(-2)$, $H_{31}(1)$, $K_{21}(-2)$, $K_{31}(1)$, $K_{41}(-4)$, K_{23}, $K_2(1/5)$, $H_{32}(-1)$, $K_{42}(3)$ aplicadas a A del Ejemplo 3 conducen a $\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, que es la forma normal.

Véase Problema 5.

MATRICES ELEMENTALES. La matriz que resulta de aplicar una transformación elemental de línea (fila o columna) a la matriz unidad I_n recibe el nombre de *matriz elemental de línea*. Las matrices elementales las representaremos por el símbolo empleado para la transformación que da lugar a la matriz en cuestión.

Ejemplo 5. Ejemplos de matrices elementales obtenidas de $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ son:

$$H_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = K_{12}, \quad H_3(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} = K_3(k), \quad H_{23}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = K_{32}(k)$$

Toda matriz elemental es regular. (¿Por qué?)

El efecto de aplicar una transformación elemental a una matriz A de orden $m \times n$ se puede conseguir multiplicando A por una matriz elemental.

Para efectuar una transformación elemental de fila sobre una matriz A de orden $m \times n$, se aplica la transformación a I_m obteniéndose la matriz elemental H correspondiente y, a continuación, se multiplica A, *por la izquierda*, por H.

Para efectuar una transformación elemental de columna sobre una matriz A, se aplica la transformación a I_n obteniéndose la matriz elemental K correspondiente y, a continuación, se multiplica A, *por la derecha*, por K.

Ejemplo 6. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. $H_{13} \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ que se obtiene al permutar las filas primera y tercera de A; $AK_{13}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 16 & 5 & 6 \\ 25 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ que se obtiene al sumar la primera columna de A con el doble de la tercera columna.

SEAN A Y B DOS MATRICES EQUIVALENTES. Representamos por $H_1, H_2, \ldots, H_s$; $K_1, K_2, \ldots, K_t$ las matrices elementales de fila y columna correspondientes a las transformaciones elementales de fila y columna que transforman A en B, siendo H_1 la primera transformación de fila, H_2 la segunda, ...; K_1 la primera transformación de columna, K_2 la segunda, ... En estas condiciones,

$$H_s \ldots H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 \ldots K_t = PAQ = B \tag{5.2}$$

siendo

$$P = H_s \ldots H_2 \cdot H_1 \quad \text{y} \quad Q = K_1 \cdot K_2 \ldots K_t \tag{5.3}$$

Por tanto,

III. La condición necesaria y suficiente para que dos matrices A y B sean equivalentes es que existan dos matrices P y Q regulares, como las definidas en (5.3), de manera que se verifique la relación $PAQ = B$ (relación de equivalencia).

Ejemplo 7. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. $H_{31}(-1) \cdot H_{21}(-2) \cdot A \cdot K_{21}(-2) \cdot K_{31}(1) \cdot K_{41}(-2) \cdot K_{42}(1) \cdot K_3(\tfrac{1}{2})$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = B$$

Puesto que toda matriz es equivalente a su propia forma normal, se deduce

IV. Si A es una matriz regular cuadrada de orden n, existen dos matrices regulares P y Q, como las definidas en (5.3), tales que $PAQ = I_n$.

Véase Problema 6.

INVERSA DE UN PRODUCTO DE MATRICES ELEMENTALES. Sean

$$P = H_s \dots H_2 \cdot H_1 \quad \text{y} \quad Q = K_1 \cdot K_2 \dots K_t$$

las matrices definidas en (5.3). Como cada una de las matrices H y K posee inversa, y la inversa de un producto es igual al producto de las inversas en orden contrario,

(5.4) $$P^{-1} = H_1^{-1} \cdot H_2^{-1} \dots H_s^{-1} \quad \text{y} \quad Q^{-1} = K_t^{-1} \dots K_2^{-1} \cdot K_1^{-1}$$

Sea A una matriz cuadrada regular de orden n, y P y Q las matrices definidas anteriormente que verifican la relación $PAQ = I_n$. En estas condiciones,

(5.5) $$A = P^{-1}(PAQ)Q^{-1} = P^{-1} \cdot I_n \cdot Q^{-1} = P^{-1} \cdot Q^{-1}$$

Hemos demostrado, pues, el teorema siguiente:

V. Cualquier matriz regular se puede expresar como producto de matrices elementales.

Véase Problema 7.

Como consecuencia, resultan estos otros teoremas:

VI. Si A es una matriz regular, la característica de la matriz AB (y también la de BA) es igual a la correspondiente de B.

VII. Si P y Q son dos matrices regulares, la característica de PAQ coincide con la de A.

CONJUNTO CANONICO DE MATRICES RESPECTO DE LA RELACION DE EQUIVALENCIA. En el Problema 8, se demuestra el teorema siguiente:

VIII. La condición necesaria y suficiente para que dos matrices A y B de orden $m \times n$ sean equivalentes es que tengan la misma característica.

Un conjunto de matrices de orden $m \times n$ forman un *conjunto canónico* de matrices respecto de la equivalencia si cualquier matriz no perteneciente al conjunto es equivalente a una, y solo una, del conjunto canónico. Las matrices (5.1) forman, respecto de la equivalencia, un conjunto canónico en donde r puede tomar los valores $1, 2, \dots, m$, o bien, $1, 2, \dots, n$, según cuál de los dos subíndices sea el menor.

Véase Problema 9.

CARACTERISTICA DE UN PRODUCTO. Sea A una matriz de orden $m \times p$ y característica r. Según el Teorema III, existen dos matrices regulares P y Q tales que

$$PAQ = N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, $A = P^{-1}NQ^{-1}$. Sea B una matriz de orden $p \times n$. Se trata de hallar la característica del producto

(5.6) $$AB = P^{-1}NQ^{-1}B$$

Según el Teorema VI, la característica de AB es igual al rango de $NQ^{-1}B$. Ahora bien, las filas de la matriz $NQ^{-1}B$ son las r primeras filas de $Q^{-1}B$ y m-r filas de elementos nulos. Por tanto, la característica de AB no puede ser superior a r, que es la característica de A. Análogamente, la característica de AB no puede ser mayor que la de B. En consecuencia:

IX. La característica del producto de dos matrices no puede ser superior a la característica de ninguno de sus factores.

Supongamos que $AB = 0$; entonces, de (5.6) se deduce que $NQ^{-1}B = 0$. Esto requiere que las r primeras filas de $Q^{-1}B$ estén constituidas por elementos nulos, mientras que los elementos de las restantes pueden ser números cualesquiera. Por tanto, la característica de la matriz $Q^{-1}B$ y, en consecuencia, la de B, no puede ser mayor que p-r. De aquí el teorema siguiente:

X. Si la característica de la matriz A de orden $m \times p$ es r y si la matriz de orden $p \times n$ es tal que $AB = 0$, la característica de B no puede ser mayor que p-r.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. (*a*) La característica de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ es 2, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ y no hay menores de tercer orden.

(*b*) La característica de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ es 2, ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$.

(*c*) La característica de $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ es 1, ya que $|A| = 0$, los nueve menores cuadrados de segundo orden son nulos, pero no son nulos todos los elementos.

2. Demostrar que las transformaciones elementales de línea no alteran la característica de una matriz.

Solamente consideraremos transformaciones de fila, dejando como ejercicio el razonamiento análogo con las transformaciones de columna. Sea r la característica de una matriz A de orden $m \times n$ de forma que todos los menores cuadrados de orden $(r+1)$ de A, si existen, son nulos. Sea B la matriz que resulta al aplicar a A una transformación de fila, y representemos por $|R|$ un menor cuadrado, cualquiera, de la matriz A de orden $(r+1)$, y por $|S|$ el menor cuadrado de B que ocupe la misma posición que $|R|$.

Supongamos que la transformación efectuada es H_{ij}. Su efecto sobre $|R|$ puede ser: (i) no modificarlo, (ii) permutar dos de sus filas, (iii) intercambiar una de sus filas con otra que no pertenezca a $|R|$. En el caso (i), $|S| = |R| = 0$; en el caso (ii), $|S| = -|R| = 0$; en el caso (iii), $|S|$ es, excepto en lo que se refiere al signo, otro menor cuadrado de A de orden $(r+1)$ y, por consiguiente, igual a cero.

Si la transformación de fila efectuada es $H_i(k)$, su efecto sobre $|R|$ puede ser: (i) no modificarlo, (ii) incrementar los elementos de una de sus filas en los de otra multiplicados por k, (iii) incrementar los elementos de una de sus filas en los de otra, que no pertenezca a $|R|$, multiplicados por k. En los casos (i) y (ii), $|S| = |R| = 0$; en el caso (iii), $|S| = |R| \pm k$ (otro menor cuadrado de A de orden $r+1) = 0 \pm k \cdot 0 = 0$.

Así, pues, una transformación elemental de fila no puede aumentar la característica de una matriz. Por otra parte, tampoco puede disminuirla porque, si así fuera, la transformación inversa la aumentaría. En consecuencia, una transformación elemental de fila no modifica la característica de una matriz.

3. Dada la matriz A, hallar la matriz equivalente B y, de la inspección de ésta, deducir la característica de A.

(*a*) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B$

Las transformaciones efectuadas son $H_{21}(-2)$, $H_{31}(-3)$; $H_2(-1/3)$, $H_3(-1/4)$; $H_{32}(-1)$La característica es 3.

(*b*) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & -4 & -11 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -11 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$. La característica es 3.

(*c*) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 0 & i & 1+2i \\ 1 & 1+2i & 1+i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1+2i \\ 1 & i & 1+2i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1+2i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$. La característica es 2.

Nota. Las matrices equivalentes B obtenidas no son únicas. En particular, en (*a*) y (*b*) solo se han efectuado transformaciones de fila y el alumno puede obtener otras aplicando transformaciones de columna. Cuando los elementos sean números racionales no conviene, en general, mezclar las transformaciones de fila con las de columna.

4. Hallar la matriz canónica C equivalente de fila de cada una de las matrices dadas A.

$$(a)\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

$$(b)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = C$$

5. Reducir las matrices siguientes a forma normal.

$$(a)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 11 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [I_3\ 0]$$

Las transformaciones elementales son:

$H_{21}(-3)$, $H_{31}(2)$; $K_{21}(-2)$, $K_{41}(1)$; K_{23}; $H_{32}(-2)$; $K_{32}(2)$, $K_{42}(-5)$; $K_3(1/11)$, $K_{43}(7)$

$$(b)\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 13 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las transformaciones elementales son:

H_{12}; $K_1(\tfrac{1}{2})$; $H_{31}(-2)$; $K_{21}(-3)$, $K_{31}(-5)$, $K_{41}(-4)$; $K_2(\tfrac{1}{2})$; $K_{32}(-3)$, $K_{42}(-4)$; $H_{32}(-1)$

6. Reducir $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ a forma normal N y hallar las matrices P_1 y Q_1 tales que $P_1 A Q_1 = N$.

Como A es de orden 3×4, utilizaremos la disposición $\begin{matrix} I_4 & \\ A & I_3 \end{matrix}$. Cada transformación se lleva a cabo sobre una línea (fila o columna) de siete elementos.

$$\begin{array}{rrrrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 7 & -3 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrrrr} 1 & -2 & -3 & 2 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 7 & -3 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrrrr} 1 & -2 & -3 & 2 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{rrrrrrr} 1 & 1/3 & -3 & 2 & & & \\ 0 & -1/6 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrrrr} 1 & 1/3 & -4/3 & -1/3 & & & \\ 0 & -1/6 & -5/6 & 7/6 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \quad \text{o bien} \quad \begin{array}{cc} Q_1 & \\ N & P_1 \end{array}$$

Por consiguiente, $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -4/3 & -1/3 \\ 0 & -1/6 & -5/6 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $P_1AQ_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = N$.

7. Expresar $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ como producto de matrices elementales.

Las transformaciones elementales $H_{21}(-1)$, $H_{31}(-1)$; $K_{21}(-3)$, $K_{31}(-3)$ reducen A a I_3, es decir, [véase (5.2)]

$$I = H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 = H_{31}(-1) \cdot H_{21}(-1) \cdot A \cdot K_{21}(-3) \cdot K_{31}(-3)$$

De (5.5), $$A = H_1^{-1} \cdot H_2^{-1} \cdot K_2^{-1} \cdot K_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que dos matrices A y B de orden $m \times n$ sean equivalentes es que tengan la misma característica.

Si A y B tienen la misma característica, ambas son equivalentes a la misma matriz (5.1) y, además, son equivalentes entre sí. Recíprocamente, si A y B son equivalentes, existen dos matrices regulares P y Q tales que $B = PAQ$. Por consiguiente, según el Teorema VII, A y B tienen la misma característica.

9. Un conjunto canónico de matrices no nulas de orden 3 es

$$I_3, \quad \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Un conjunto canónico de matrices no nulas de orden 3×4 es

$$[I_3 \ 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

10. Si de una matriz cuadrada A de orden n y característica r_A se elige una submatriz B formada por s líneas (filas o columnas) de A, la característica r_B de B es igual o mayor que $r_A + s - n$.

La forma normal de A tiene $n - r_A$ líneas cuyos elementos son nulos, y la correspondiente de B tiene $s - r_B$ líneas cuyos elementos son también nulos. Evidentemente,

$$n - r_A \geq s - r_B$$

de donde se deduce, $r_B \geq r_A + s - n$, como queríamos demostrar.

PROBLEMAS PROPUESTOS

11. Hallar la característica de las matrices (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & 6 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \end{bmatrix}$

Sol. (a) 2, (b) 3, (c) 4, (d) 2

12. Demostrar que las matrices A, A', $\bar{A}$ y $\overline{A'}$ tienen la misma característica.

13. Demostrar que la matriz canónica C equivalente de fila de una matriz dada A queda únicamente determinada por A.

14. Hallar la matriz canónica equivalente de fila de las matrices siguientes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & -6 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

15. Hallar la forma normal de las matrices del Problema 14.

Sol. (a) $[I_2 \;\; 0]$, (b), (c) $[I_3 \;\; 0]$ (d) $\begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

16. Siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(a) A partir de I_3, obtener H_{12}, $H_2(3)$; $H_{13}(-4)$, y comprobar que cada producto HA efectúa la correspondiente transformación de fila.

(b) A partir de I_4, obtener K_{24}, $K_3(-1)$, $K_{42}(3)$, y comprobar que cada producto AK efectúa la correspondiente transformación de columna.

(c) Hallar las inversas, H_{12}^{-1}, $H_2^{-1}(3)$, $H_{13}^{-1}(-4)$, de las matrices elementales del apartado (a). Comprobar que para cada una de las matrices H se verifica la condición $H \cdot H^{-1} = I$.

(d) Hallar las inversas, K_{24}^{-1}, $K_3^{-1}(-1)$, $K_{42}^{-1}(3)$, de las matrices elementales del apartado (b). Comprobar que para cada una de las matrices K se verifica la condición $KK^{-1} = I$.

(e) Hallar $B = H_{12} \cdot H_2(3) \cdot H_{13}(-4) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = H_{13}^{-1}(-4) \cdot H_2^{-1}(3) \cdot H_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(f) Demostrar que $BC = CB = I$.

17. (a) Demostrar que $K'_{ij} = H_{ij}$, $K'_i(k) = H_i(k)$, y $K'_{ij}(k) = H_{ij}(k)$.

(b) Demostrar que si R es un producto de matrices elementales de columna, R' es el producto, en orden contrario, de iguales matrices elementales de fila.

18. Demostrar que: (a) AB y BA son regulares si A y B son matrices cuadradas regulares de orden n.

(b) AB y BA son singulares si al menos una de las matrices cuadradas, A o B, de orden n es regular.

19. Si P y Q son dos matrices regulares, demostrar que A, PA, AQ y PAQ tienen la misma característica.
Ind. Expresar P y Q en forma de producto de matrices elementales.

20. Reducir $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ a forma normal N y hallar las matrices P_2 y Q_2 tales que $P_2 B Q_2 = N$.

21. (*a*) Demostrar que el número de matrices de un conjunto canónico de matrices cuadradas de orden n respecto de la relación de equivalencia es $n + 1$.
(*b*) Demostrar que el número de matrices de un conjunto canónico de matrices de orden $m \times n$ respecto de la relación de equivalencia es el menor de los números $m + 1$ y $n + 1$.

22. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 10 \end{bmatrix}$ de característica 2, hallar una matriz cuadrada de cuarto orden, $B \neq 0$, tal que $AB = 0$.

Ind. Seguir la demostración del Teorema X y tomar

$$Q^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}$$

siendo $a, b, \ldots, h$ números arbitrarios.

23. Sabiendo que la matriz A del Problema 6 y B del Problema 20 son equivalentes hallar P y Q de forma que $B = PAQ$.

24. Sabiendo que las características de las matrices A y B de orden $m \times n$ son r_A y r_B, respectivamente, demostrar que la característica de $A + B$ no puede ser mayor que $r_A + r_B$.

25. Sea A una matriz cuadrada cualquiera de orden n, y B una matriz cuadrada elemental. Considerando cada uno de los seis tipos distintos de matrices B, demostrar que $|AB| = |A| \cdot |B|$.

26. Sean A y B matrices cuadradas de orden n. (*a*) Si al menos una de ellas es singular, demostrar que $|AB| = |A| \cdot |B|$. (*b*) Si ambas son regulares, aplíquese (5.5) y el Problema 25 para demostrar que $|AB| = |A| \cdot |B|$.

27. Demostrar que la equivalencia de matrices es una relación de equivalencia.

28. Demostrar que la forma canónica equivalente de fila de una matriz A regular es I, y recíprocamente.

29. Demostrar que no todas las matrices A se pueden reducir a forma normal mediante transformaciones de fila únicamente.
Ind. Poner un ejemplo de una matriz que no se pueda reducir.

30. Indicar cómo se realiza, sobre una matriz cualquiera A, la transformación H_{ij} mediante una sucesión de transformaciones de fila de los tipos (2) y (3).

31. Demostrar que si A es una matriz de orden $m \times n$, ($m \leq n$), de característica m, la matriz AA' es simétrica y regular. Enunciar el teorema en el caso de que la característica de A sea menor que m.

Capítulo 6

Matriz de los adjuntos de una matriz cuadrada

MATRIZ DE LOS ADJUNTOS O ADJUNTA (en sentido no hermítico). Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada de orden n y α_{ij} el adjunto (menor complementario con su signo) del elemento a_{ij}; por definición,

(6.1) $$\text{adjunta de } A \;=\; \text{adj } A \;=\; \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Obsérvese que los adjuntos de los elementos de la fila (columna) i de A son los elementos de la columna (fila) i de la matriz adj A.

Ejemplo 1. En la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$,

$$\alpha_{11} = 6,\ \alpha_{12} = -2,\ \alpha_{13} = -3,\ \alpha_{21} = 1,\ \alpha_{22} = -5,\ \alpha_{23} = 3,\ \alpha_{31} = -5,\ \alpha_{32} = 4,\ \alpha_{33} = -1$$

luego $$\text{adj } A \;=\; \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Véanse Problemas 1-2.

Aplicando los Teoremas X y XI del Capítulo 3, se tiene

(6.2) $$A(\text{adj } A) \;=\; \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \text{diag}(|A|, |A|, \dots, |A|) \;=\; |A| \cdot I_n \;=\; (\text{adj } A)\, A$$

Ejemplo 2. En la matriz A del Ejemplo 1, $|A| = -7$, luego

$$A(\text{adj } A) \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \;=\; -7I$$

Tomando determinantes en (6.2) se obtiene

(6.3) $$|A| \cdot |\text{adj } A| \;=\; |A|^n \;=\; |\text{adj } A| \cdot |A|$$

Por tanto,

I. Si A es una matriz cuadrada regular de orden n,

(6.4) $$|\text{adj } A| \;=\; |A|^{n-1}$$

II. Si A es una matriz cuadrada regular,

$$A\,(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)\,A = 0$$

Si la característica de A es menor que $n - 1$, $\operatorname{adj} A = 0$. Si la característica de A es $n - 1$, la correspondiente de $\operatorname{adj} A$ es igual a 1.

Véase Problema 3.

MATRIZ DE LOS ADJUNTOS DE UN PRODUCTO. En el Problema 4, se demuestra:

III. Si A y B son matrices cuadradas de orden n,

$$\operatorname{adj} AB = \operatorname{adj} B \cdot \operatorname{adj} A \tag{6.5}$$

MENOR DE UNA MATRIZ DE LOS ADJUNTOS. En el Problema 6, se demuestra:

IV. Sean, $\left|A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right|$ un menor cuadrado de orden m de la matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ de orden n $\left|A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}\right|$ su complemento en A, $\left|M^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right|$ el menor cuadrado de orden m de la matriz de los adjuntos, $\operatorname{adj} A$, cuyos elementos ocupan la *misma posición* en $\operatorname{adj} A$ que los de $\left|A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right|$ en A.

En estas condiciones,

$$|A| \cdot \left|M^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right| = (-1)^s |A|^m \cdot \left|A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}\right| \tag{6.6}$$

siendo $s = i_1 + i_2 + \cdots + i_m + j_1 + j_2 + \cdots + j_m$.

Si en (6.6) A es una matriz regular

$$\left|M^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right|. = (-1)^s |A|^{m-1} \cdot \left|A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}\right| \tag{6.7}$$

Para $m = 2$, (6.7) se transforma en

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i_1, j_1} & \alpha_{i_2, j_1} \\ \alpha_{i_1, j_2} & \alpha_{i_2, j_2} \end{vmatrix} = (-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2} |A| \cdot \left|A^{j_3, j_4, \ldots, j_n}_{i_3, i_4, \ldots, i_n}\right| \tag{6.8}$$

$$= |A|, \text{ complemento algebraico de } \left|A^{j_1, j_2}_{i_1, i_2}\right|$$

Para $m = n - 1$, (6.7) toma la forma

$$\left|M^{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}}_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}}\right| = (-1)^{i_n + j_n} |A|^{n-2} a_{i_n, j_n} \tag{6.9}$$

Para $m = n$, (6.7) toma la forma (6.4).

PROBLEMAS RESUELTOS

1. La matriz de los adjuntos de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

2. La matriz de los adjuntos de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Dada la matriz A de orden n y característica $n-1$, demostrar que la característica de la matriz de sus adjuntos, adj A, es la unidad.

Obsérvese, en primer lugar, que al ser la característica de A igual a $n-1$, existirá al menos un adjunto no nulo, con lo que la característica de la matriz adj A será por lo menos la unidad. Ahora bien, según el Teorema X del Capítulo 5, la característica de la matriz adj A es, como máximo, $n-(n-1)=1$. Por consiguiente, la característica es la unidad.

4. Demostrar que adj AB = adj $B \cdot$ adj A.

De (6.2), $\quad AB \operatorname{adj} AB = |AB| \cdot I \qquad (\operatorname{adj} AB)AB$

Como $\quad AB \cdot \operatorname{adj} B \cdot \operatorname{adj} A = A(B \cdot \operatorname{adj} B)\operatorname{adj} A = A(|B| \cdot I)\operatorname{adj} A = |B|(A \operatorname{adj} A) = |B| \cdot |A| \cdot I = |AB| \cdot I$

y $\quad (\operatorname{adj} B \cdot \operatorname{adj} A)AB = \operatorname{adj} B\{(\operatorname{adj} A)A\}B = \operatorname{adj} B \cdot |A| \cdot I \cdot B = |A|\{(\operatorname{adj} B)B\} = |AB| \cdot I$

se deduce $\quad \operatorname{adj} AB = \operatorname{adj} B \cdot \operatorname{adj} A$

5. Demostrar que adj (adj A) $= |A|^{n-2} \cdot A$, si $|A| \neq 0$.

De (6.2) y (6.4),

$$\begin{aligned} \operatorname{adj} A \cdot \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) &= \operatorname{diag}(|\operatorname{adj} A|, |\operatorname{adj} A|, \ldots, |\operatorname{adj} A|) \\ &= \operatorname{diag}(|A|^{n-1}, |A|^{n-1}, \ldots, |A|^{n-1}) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} A \cdot \operatorname{adj} A \cdot \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) &= |A|^{n-1} \cdot A \\ |A| \cdot \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) &= |A|^{n-1} \cdot A \end{aligned}$$

y

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = |A|^{n-2} \cdot A$$

6. Demostrar el teorema: Sean, $\left|A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right|$ en menor cuadrado de orden m de la matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ de orden n, $\left|A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}\right|$ su complemento en A, y $\left|M^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right|$ el menor cuadrado de orden m de adj A cuyos elementos ocupan la misma posición en adj A que los de $\left|A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right|$ en A. En estas condiciones,

$$|A| \cdot \left| M_{i_1, i_2, \ldots, i_m}^{j_1, j_2, \ldots, j_m} \right| \quad = \quad (-1)^s |A|^m \cdot \left| A_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n} \right|$$

siendo $s = i_1 + i_2 + \cdots + i_m + j_1 + j_2 + \cdots + j_m$.

De

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc}
a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_m} & a_{i_1,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_1,j_n} \\
a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_m} & a_{i_2,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_2,j_n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i_m,j_1} & a_{i_m,j_2} & \cdots & a_{i_m,j_m} & a_{i_m,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_m,j_n} \\
\hline
a_{i_{m+1},j_1} & a_{i_{m+1},j_2} & \cdots & a_{i_{m+1},j_m} & a_{i_{m+1},j_{m+1}} & \cdots & a_{i_{m+1},j_n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i_n,j_1} & a_{i_n,j_2} & \cdots & a_{i_n,j_m} & a_{i_n,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_n,j_n}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
\alpha_{i_1,j_1} & \alpha_{i_2,j_1} & \cdots & \alpha_{i_m,j_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\alpha_{i_1,j_2} & \alpha_{i_2,j_2} & \cdots & \alpha_{i_m,j_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\alpha_{i_1,j_m} & \alpha_{i_2,j_m} & \cdots & \alpha_{i_m,j_m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
\alpha_{i_1,j_{m+1}} & \alpha_{i_2,j_{m+1}} & \cdots & \alpha_{i_m,j_{m+1}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\alpha_{i_1,j_n} & \alpha_{i_2,j_n} & \cdots & \alpha_{i_m,j_n} & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|ccc}
|A| & 0 & \cdots & 0 & a_{i_1,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_1,j_n} \\
0 & |A| & \cdots & 0 & a_{i_2,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_2,j_n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & |A| & a_{i_m,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_m,j_n} \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i_{m+1},j_{m+1}} & \cdots & a_{i_{m+1},j_n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i_n,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_n,j_n}
\end{array}\right]$$

tomando determinantes en los dos miembros

$$(-1)^s |A| \cdot \left| M_{i_1, i_2, \ldots, i_m}^{j_1, j_2, \ldots, j_m} \right| \quad = \quad |A|^m \cdot \left| A_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n} \right|$$

siendo s el definido en el teorema. De esta relación se deduce de forma inmediata lo que se quería demostrar.

7. Demostrar que: Si A es una matriz hemisimétrica de orden $2n$, su determinante, $|A|$, es igual al cuadrado de un polinomio de elementos de A.

Por definición, $|A|$ es un polinomio de los elementos de la matriz A; solo tendremos que demostrar ahora que, en las condiciones dadas anteriormente, este polinomio es un cuadrado perfecto.

El teorema es cierto para $n = 1$, ya que si $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$, $|A| = a^2$.

Supongamos que es cierto para $n = k$ y consideremos la matriz hemisimétrica $A = [a_{ij}]$ de orden $2k + 2$. Descomponiendo en cajas la matriz dada podremos escribir $A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$ siendo $E = \begin{bmatrix} 0 & a_{2k+1,\,2k+2} \\ a_{2k+2,\,2k+1} & 0 \end{bmatrix}$.

Entonces, como B es una matriz hemisimétrica de orden $2k$, según la hipótesis, $|B| = f^2$, siendo f un polinomio de elementos de B.

Llamando α_{ij} al adjunto del elemento a_{ij} de A, según el Problema 6 del Capítulo 3 y el desarrollo (6.8)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{2k+1,\,2k+1} & \alpha_{2k+2,\,2k+1} \\ \alpha_{2k+1,\,2k+2} & \alpha_{2k+2,\,2k+2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{2k+2,\,2k+1} \\ \alpha_{2k+1,\,2k+2} & 0 \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

Por otra parte, $\alpha_{2k+2,\,2k+1} = -\alpha_{2k+1,\,2k+2}$; por tanto,

$$|A| \cdot f^2 = \alpha^2_{2k+1,\,2k+2} \qquad \text{de donde} \qquad |A| = \left\{\frac{\alpha_{2k+1,\,2k+2}}{f}\right\}^2$$

que es un cuadrado perfecto.

PROBLEMAS PROPUESTOS

8. Hallar la matriz de los adjuntos de las siguientes:

$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad (b)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad (c)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad (d)\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sol. $(a)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad (b)\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad (c)\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad (d)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ -2 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

9. Comprobar:
(*a*) La matriz de los adjuntos de una matriz escalar es otra matriz escalar.
(*b*) La matriz de los adjuntos de una matriz diagonal es otra matriz diagonal.
(*c*) La matriz de los adjuntos de una matriz triangular es otra matriz triangular.

10. Escribir una matriz $A \neq 0$ de orden 3 de forma que adj $A = 0$.

11. Si A es una matriz cuadrada de segundo orden, demostrar que adj (adj A) = A.

12. Demostrar que la matriz de los adjuntos de $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ es $3A'$, y que la correspondiente de $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ es la propia matriz A.

13. Demostrar que si A es una matriz cuadrada de orden n y característica menor que $n - 1$, adj $A = 0$.

14. Democtrar que si A es una matriz simétrica, también lo es adj A.

15. Demostrar que si A es una matriz hermítica, también lo es adj A.

16. Demostrar que si A es una matriz hemihermítica de orden n, adj A es una matriz simétrica o hemisimétrica según que n sea impar o par.

17. ¿Se puede enunciar un teorema análogo al del Problema 16 para las matrices hemihermíticas?

18. Demostrar que en las matrices elementales se verifica

(*a*) adj $H_{ij}^{-1} = -H_{ij}$

(*b*) adj $H_i^{-1}(k) = \text{diag}(1/k, 1/k, \ldots, 1/k, 1, 1/k, \ldots, 1/k)$, en la que el elemento 1 pertenece a la fila i

(*c*) adj $H_{ij}^{-1}(k) = H_{ij}(k)$, y lo mismo para las matrices K.

19. Demostrar que si A es una matriz cuadrada de orden n y característica n o $n-1$, y si $H_s \ldots H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 \ldots K_t = \lambda$, donde λ es I_n o $\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, se verifica:

$$\text{adj } A = \text{adj } K_1^{-1} \cdot \text{adj } K_2^{-1} \ldots \text{adj } K_t^{-1} \cdot \text{adj } \lambda \cdot \text{adj } H_s^{-1} \ldots \text{adj } H_2^{-1} \cdot \text{adj } H_1^{-1}$$

20. Aplicar el método del Problema 19 para hallar la matriz de los adjuntos de

(*a*) matriz A del Problema 7, Capítulo 5 (*b*) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

Sol. (*a*) $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (*b*) $\begin{bmatrix} -14 & 2 & -2 & 2 \\ 14 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

21. Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [k - a_{ij}]$ dos matrices cuadradas de tercer orden y $S(C)$ la suma de los elementos de la matriz C; en estas condiciones, demostrar:

$$S(\text{adj } A) = S(\text{adj } B) \quad \text{y} \quad |B| = k \cdot S(\text{adj } A) - |A|$$

22. Demostrar si A es una matriz cuadrada de orden n, $|\text{adj } (\text{adj } A)| = |A|^{(n-1)^2}$.

23. Sea $A_n = [a_{ij}]$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ una matriz triangular inferior cuyos elementos son los números del triángulo de Pascal; por ejemplo,

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Definir $b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$ y comprobar, para $n = 2, 3, 4$,

(i) $$\text{adj } A_n = [b_{ij}] = A_n^{-1}$$

24. Sea B la matriz obtenida suprimiendo en A las filas i y p y las columnas j y q; demostrar:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{ij} & \alpha_{pj} \\ \alpha_{iq} & \alpha_{pq} \end{vmatrix} = (-1)^{i+p+j+q} |B| \cdot |A|$$

siendo α_{ij} el adjunto del elemento a_{ij} en $|A|$.

Capítulo 7

Inversa de una matriz

MATRIZ INVERSA. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n de forma que $AB = BA = I$; en estas condiciones, B es la matriz inversa de A, $(B = A^{-1})$, y recíprocamente, A es la inversa de B, $(A = B^{-1})$.

En el Problema 1 se demuestra el teorema siguiente:

I. La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada A posea inversa es que sea regular.

La inversa de una matriz regular de orden n es única. (Véase Problema 7, Capítulo 2.)

II. Sea A una matriz singular; la igualdad $AB = AC$ implica que $B = C$.

LA INVERSA de una matriz diagonal regular, diag $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, es la matriz diagonal

$$\text{diag}\,(1/k_1,\ 1/k_2,\ \ldots,\ 1/k_n)$$

Si $A_1, A_2, \ldots, A_s$, son matrices regulares, la inversa de la matriz escalonada o suma directa de ellas, diag $(A_1, A_2, \ldots, A_s)$, es

$$\text{diag}\,(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \ldots, A_s^{-1})$$

Más adelante veremos los métodos para calcular la inversa de una matriz regular.

INVERSA DE LA MATRIZ DE LOS ADJUNTOS. De (6.2) se deduce, A adj $A = |A| \cdot I$. Si A es una matriz regular,

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}\,A}{|A|} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}/|A| & \alpha_{21}/|A| & \ldots & \alpha_{n1}/|A| \\ \alpha_{12}/|A| & \alpha_{22}/|A| & \ldots & \alpha_{n2}/|A| \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n}/|A| & \alpha_{2n}/|A| & \ldots & \alpha_{nn}/|A| \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

Ejemplo 1. Del Problema 2, Capítulo 6, la matriz de los adjuntos de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Ahora bien, $|A| = -2$, luego $A^{-1} = \dfrac{\text{adj}\,A}{|A|} = \begin{bmatrix} 7/2 & -3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Véase Problema 2.

INVERSA DE LAS MATRICES ELEMENTALES. Supongamos que se reduce la matriz cuadrada y regular A a la matriz I, mediante transformaciones elementales, de manera que

$$H_s \ldots H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 \ldots K_t = PAQ = I$$

Como $A = P^{-1} \cdot Q^{-1}$, según (5.5), y $(B^{-1})^{-1} = B$, resulta

$$(7.2) \qquad A^{-1} = (P^{-1} \cdot Q^{-1})^{-1} = Q \cdot P = K_1 \cdot K_2 \ldots K_t \cdot H_s \ldots H_2 \cdot H_1$$

Ejemplo 2. Del Problema 7, Capítulo 5,

$$H_2H_1AK_1K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\text{Por tanto,} \quad A^{-1} = K_1K_2H_2H_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En el Capítulo 5 se demostró que una matriz regular se podía reducir a forma normal aplicando, únicamente, transformaciones de fila. Haciendo $Q = I$ en (7.2) se deduce,

$$(7.3) \qquad A^{-1} = P = H_s \ldots H_2 \cdot H_1$$

Es decir:

III. Si la matriz A se reduce a la matriz I mediante una sucesión de transformaciones de fila, la matriz inversa, A^{-1}, es igual al producto en orden contrario de las correspondientes matrices elementales.

Ejemplo 3. Hallar la matriz inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ del Ejemplo 2, aplicando únicamente transformaciones de fila para reducir A a I.

Escribiendo la matriz $[A\ I_3]$ y efectuando las transformaciones de fila que reducen A a I_3 se tiene

$$[A\ I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= [I_3\ A^{-1}]$$

según (7.3). Por tanto, A se ha reducido a I_3, y la matriz I_3 se ha transformado en

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Véase Problema 3.

CALCULO DE LA MATRIZ INVERSA POR SUBDIVISION EN CAJAS. Dividamos la matriz $A = [a_{ij}]$ de orden n, y su inversa $B = [b_{ij}]$, en submatrices o cajas de los órdenes que se indican:

$$\left[\begin{array}{c|c} \underset{(p\times p)}{A_{11}} & \underset{(p\times q)}{A_{12}} \\ \hline \underset{(q\times p)}{A_{21}} & \underset{(q\times q)}{A_{22}} \end{array}\right] \quad \text{y} \quad \left[\begin{array}{c|c} \underset{(p\times p)}{B_{11}} & \underset{(p\times q)}{B_{12}} \\ \hline \underset{(q\times p)}{B_{21}} & \underset{(q\times q)}{B_{22}} \end{array}\right] \quad \text{siendo } p+q=n$$

Como $AB = BA = I_n$, se tiene

$$(7.4)\quad \begin{cases} \text{(i)}\ A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_p & \text{(iii)}\ B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0 \\ \text{(ii)}\ A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 & \text{(iv)}\ B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I_q \end{cases}$$

Entonces, siempre que A_{11} sea una matriz regular,

$$(7.5)\quad \begin{cases} B_{11} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) & B_{21} = -\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) \\ B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1} & B_{22} = \xi^{-1} \end{cases}$$

siendo $\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12})$.

Véase Problema 4.

En la práctica, se suele tomar A_{11} de orden $n-1$. Para hallar A_{11}^{-1} se sigue el procedimiento siguiente. Sean

$$G_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad G_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad G_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad \ldots$$

Después de hallar G_2^{-1}, se subdivide en cajas G_3 de forma que $A_{22} = [a_{33}]$ y se aplica (7.5) obteniéndose G_3^{-1}. Se repite el proceso con G_4 una vez subdividida en cajas de manera que $A_{22} = [a_{44}]$, y así sucesivamente.

Ejemplo 4. Hallar la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, por el método de la subdivisión en cajas.

Tomemos $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $A_{21} = [1\ 3]$, y $A_{22} = [4]$. En estas condiciones,

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_{21}A_{11}^{-1} = [1\ 3]\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [1\ 0],$$

$$\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12}) = [4] - [1\ 3]\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = [1], \quad \text{y} \quad \xi^{-1} = [1]$$

Por tanto,

$$B_{11} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}[1]\cdot[1\ 0]$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = -\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) = [-1\ 0]$$

$$B_{22} = \xi^{-1} = [1]$$

y

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Véanse Problemas 5-6.

INVERSA DE UNA MATRIZ SIMETRICA. En el caso de que la matriz A sea simétrica, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, con lo que para obtener A^{-1} a partir de adj A solamente se necesitan hallar $\frac{1}{2}n(n+1)$ adjuntos en lugar de los n^2 que se precisan en el caso general.

Si se obtiene alguna ventaja en calcular A^{-1} mediante un producto de matrices elementales, debe tenerse en cuenta que las transformaciones que se realicen han de conservar la simetría. Esto requiere que dichas transformaciones se efectúen por pares, es decir, una transformación de fila seguida inmediatamente por la misma transformación de columna. Por ejemplo,

$$H_{12}\begin{bmatrix} 0 & b & c & \dots \\ b & a & \dots\dots & \\ c & \dots\dots\dots & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \end{bmatrix} K_{12} \quad = \quad \begin{bmatrix} a & b & \dots\dots & \\ b & 0 & c & \dots \\ \cdot & c & \dots\dots & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \end{bmatrix}$$

$$H_{21}(-\tfrac{b}{a})\begin{bmatrix} a & b & c & \dots \\ b & & & \\ c & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \end{bmatrix} K_{21}(-\tfrac{b}{a}) \quad = \quad \begin{bmatrix} a & 0 & c & \dots \\ 0 & & & \\ c & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \end{bmatrix}$$

Sin embargo, cuando el elemento a de la diagonal principal se sustituye por un 1, el par de transformaciones son $H_1(1/\sqrt{a})$ y $K_1(1/\sqrt{a})$. En general, $\sqrt{a}$ será irracional o un número imaginario, por lo que este procedimiento es poco recomendable.

El mejor método es aplicar la subdivisión en cajas, ya que entonces las expresiones (7.5) se reducen a la forma (7.6).

$$\text{(7.6)} \qquad \begin{aligned} B_{11} &= A_{11}^{-1} = (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{11}^{-1}A_{12})', & B_{21} &= B'_{12} \\ B_{12} &= -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}, & B_{22} &= \xi^{-1} \end{aligned}$$

siendo $\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12})$.

Véase Problema 7.

Si la matriz A no fuera simétrica, se puede emplear el método anterior para determinar la inversa de $A'A$, que es una matriz simétrica y, a continuación, hallar la inversa de A teniendo en cuenta que

$$\text{(7.7)} \qquad A^{-1} = (A'A)^{-1}A'$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada A de orden n posea inversa es que sea regular.

Supongamos que A es una matriz regular. Según el Teorema IV del Capítulo 5, existen dos matrices regulares P y Q, de forma que $PAQ = I$. Por tanto, $A = P^{-1}\cdot Q^{-1}$, y de aquí la existencia de $A^{-1} = Q \cdot P$.

Supongamos que existe A^{-1}. La característica de $A \cdot A^{-1} = I$ es igual a n. Si A fuera singular, la característica de AA^{-1} sería menor que n y, en consecuencia, A sería regular.

2. (*a*) Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, entonces, $|A| = 5$, $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$.

(*b*) Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, entonces, $|A| = 18$, $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$, y $A^{-1} = \dfrac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Hallar la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix}$.

$$[A\ I_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 14 & 14 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 14 & 14 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & -3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 10 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & -3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 10 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 7/2 & 11 & 5/2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -5 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 18 & 13 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 18 & 13 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 3/5 & 1/5 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -23 & 29 & -64/5 & -18/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 10 & -12 & 26/5 & 7/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 6/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 3/5 & 1/5 \end{array}\right]$$

$$= [I_4\ A^{-1}]$$

La inversa es $A^{-1} = \begin{bmatrix} -23 & 29 & -64/5 & -18/5 \\ 10 & -12 & 26/5 & 7/5 \\ 1 & -2 & 6/5 & 2/5 \\ 2 & -2 & 3/5 & 1/5 \end{bmatrix}$.

4. Resolver el sistema $\begin{cases} \text{(i)}\quad A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I & \text{(iii)}\quad B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0 \\ \text{(ii)}\quad A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 & \text{(iv)}\quad B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I \end{cases}$ en las incógnitas B_{11}, B_{12}, B_{21} y B_{22}.

Sea $B_{22} = \xi^{-1}$. De (ii), $B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}$; de (iii), $B_{21} = -\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})$; y de (i), $B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}B_{21} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})$.

Finalmente, sustituyendo en (iv),

$$-\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})A_{12} + \xi^{-1}A_{22} = I \qquad \text{de donde} \qquad \xi = A_{22} - (A_{21}A_{11}^{-1})A_{12}$$

5. Hallar la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ por el método de la subdivisión en cajas.

(*a*) Tomemos $G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ y efectuemos la subdivisión de forma que

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = [2 \;\; 4], \quad \text{y} \quad A_{22} = [3]$$

Ahora bien, $A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\quad A_{21}A_{11}^{-1} = [2 \;\; 4]\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [2 \;\; 0]$.

$$\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12}) = [3] - [2 \;\; 4]\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = [-3], \quad \text{y} \quad \xi^{-1} = [-1/3]$$

Por tanto, $B_{11} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}\left[-\frac{1}{3}\right][2 \;\; 0] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = -\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) = \tfrac{1}{3}[2 \;\; 0], \quad B_{22} = \xi^{-1} = \left[-\frac{1}{3}\right]$$

y
$$G_3^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(*b*) Hagamos la subdivisión de A de forma que $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $A_{21} = [1 \;\; 1 \;\; 1]$, y $A_{22} = [1]$.

Ahora bien, $A_{11}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\quad A_{11}^{-1}A_{12} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\quad A_{21}A_{11}^{-1} = \tfrac{1}{3}[2 \;\; -3 \;\; 2]$.

$$\xi = [1] - [1 \;\; 1 \;\; 1](\tfrac{1}{3})\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \left[\tfrac{1}{3}\right], \quad \text{y} \quad \xi^{-1} = [3]$$

Por tanto, $B_{11} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}[3]\tfrac{1}{3}[2 \;\; -3 \;\; 2] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -9 & 6 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = [-2 \;\; 3 \;\; -2], \quad B_{22} = [3]$$

y
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Hallar la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ por el metodo de la subdivisión en cajas.

No se puede hacer $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ porque esta matriz es singular.

Del Ejemplo 3, la inversa de $H_{23}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = B$ es $B^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Por tanto,

$$A^{-1} = B^{-1}H_{23} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, pues, si el menor cuadrado A_{11} de orden $(n-1)$ de una matriz cuadrada A regular es singular, lo primero que hay que hacer es llevar una matriz cuadrada regular de orden $(n-1)$ al extremo superior izquierdo para obtener B y, después, hallar A^{-1} aplicando a B^{-1} una transformación adecuada.

7. Hallar la inversa de la matriz simétrica x $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Consideremos la submatriz $G_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ de forma que

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = [-1\ \ 2], \quad A_{22} = [1]$$

Ahora bien, $A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$, $A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12}) = [1] - [-1\ \ 2]\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [-2] \qquad \text{y} \qquad \xi^{-1} = [-\tfrac{1}{2}]$$

Por tanto, $B_{11} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}[-\tfrac{1}{2}][-1\ \ 1] = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$,

$$B_{12} = \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B_{21} = [-\tfrac{1}{2}\ \ \tfrac{1}{2}], \quad B_{22} = [-\tfrac{1}{2}]$$

y

$$G_3^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

Consideremos la matriz A de forma que

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = [2\ \ -3\ \ -1], \quad A_{22} = [4]$$

Ahora bien, $A_{11}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \end{bmatrix}$, $A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\xi = [18/5]$, $\xi^{-1} = [5/18]$.

Por tanto, $B_{11} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 5 & -1 & 5 \\ -7 & 5 & 11 \end{bmatrix}$, $B_{12} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}$, $B_{21} = \frac{1}{18}[1 \ -2 \ 10]$, $B_{22} = [5/18]$

y
$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 & 1 \\ 5 & -1 & 5 & -2 \\ -7 & 5 & 11 & 10 \\ 1 & -2 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

8. Hallar las matrices de los adjuntos e inversa de las siguientes:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (b)\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad (c)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad (d)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Sol. inversa $(a)\ \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $(b)\ \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -10 & 4 & 9 \\ 15 & -4 & -14 \\ -5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$, $(c)\ \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $(d)\ \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

9. Hallar la inversa de la matriz del Problema 8(*d*) como una suma directa.

10. Hallar las inversas de las matrices del Problema 8 aplicando el método del Problema 3.

11. Idem, para las matrices $(a)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 8 \end{bmatrix}$, $(b)\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $(c)\ \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 4 & 12 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $(d)\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Sol. $(a)\ \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 & 4 \\ 22 & 41 & -30 & -1 \\ -10 & -44 & 30 & -2 \\ 4 & -13 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad (c)\ \frac{1}{48}\begin{bmatrix} -144 & 36 & 60 & 21 \\ 48 & -20 & -12 & -5 \\ 48 & -4 & -12 & -13 \\ 0 & 12 & -12 & 3 \end{bmatrix}$

$(b)\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 11 & 7 & -26 \\ -1 & -7 & -3 & 16 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad (d)\ \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 30 & -20 & -15 & 25 & -5 \\ 30 & -11 & -18 & 7 & -8 \\ -30 & 12 & 21 & -9 & 6 \\ -15 & 12 & 6 & -9 & 6 \\ 15 & -7 & -6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

12. Aplicar el resultado del Ejemplo 4 para hallar la inversa de la matriz del Problema 11(*d*) por el método de la subdivisión en cajas.

13. Hallar, por el método de la subdivisión en cajas, las inversas de las matrices de los Problemas 8(*a*), 8(*b*), 11(*a*)-11(*c*).

14. Hallar, por el método de la subdivisión en cajas, las inversas de las matrices simétricas (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Sol. (a) $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

15. Si la matriz A es regular, demostrar que la igualdad $AB = AC$ implica que $B = C$.

16. Demostrar que si las dos matrices regulares A y B son permutables, también lo son las matrices (a) A^{-1} y B, (b) A y B^{-1}, (c) A^{-1} y B^{-1}. *Ind.* (a) $A^{-1}(AB)A^{-1} = A^{-1}(BA)A^{-1}$.

17. Demostrar que si la matriz regular A es simétrica, también lo es su inversa A^{-1}.

Ind. $A^{-1}A = I = (AA^{-1})' = (A^{-1})'A$.

18. Demostrar que si las matrices simétricas regulares A y B son permutables, las matrices (a) $A^{-1}B$, (b) AB^{-1} y (c) $A^{-1}B^{-1}$ son simétricas. *Ind.* (a) $(A^{-1}B)' = (BA^{-1})' = (A^{-1})'B' = A^{-1}B$.

19. Una matriz A de orden $m \times n$ posee *inversa por la derecha* B si $AB = I$, y posee *inversa por la izquierda* C si $CA = I$. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que A posea inversa por la derecha es que la característica de A sea igual a m. Respecto a la inversa por la izquierda, demostrar que la condición es que la característica de A sea igual a n.

20. Hallar una inversa por la derecha de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, si existe.

Ind. La característica de A es 3 y la submatriz $S = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ es regular, cuya inversa es S^{-1}. Una inversa por la derecha de A es la matriz de orden 4×3 $B = \begin{bmatrix} S^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 17 & -9 & -5 \\ -4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

21. Demostrar que la submatriz $T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ de A del Problema 20 es regular y que la matriz $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es otra inversa por la derecha de A.

22. Demostrar que $\begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 & a \\ -3 & 1 & 0 & b \\ -3 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$ es una inversa por la izquierda de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, siendo a, b y c arbitrarios.

23. Demostrar que $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ no tiene inversa por la derecha ni por la izquierda.

24. Demostrar que si $|A_{11}| \neq 0$, se verifica $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}| \cdot |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$.

25. Suponiendo que $|I + A| \neq 0$, demostrar que las matrices $(I + A)^{-1}$ e $(I - A)$ son permutables.

26. Demostrar el apartado (i) del Problema 23 del Capítulo 6.

Capítulo 8

Cuerpos

CUERPO DE NUMEROS. Un conjunto S de números reales o complejos formado por elementos no todos nulos forman un cuerpo de números siempre que al efectuar las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división (excepto por 0) con dos números cualesquiera del conjunto se obtiene otro número que también pertenece a S.

Ejemplos de cuerpos numéricos son los conjuntos:

(*a*) Números racionales.
(*b*) Números reales.
(*c*) Números de la forma $a + b\sqrt{3}$, siendo a y b racionales.
(*d*) Números complejos $a + bi$, siendo a y b reales.

El conjunto formado por todos los números enteros y el correspondiente a todos los números de la forma $b\sqrt{3}$, siendo b un número racional, *no* son cuerpos numéricos.

CUERPOS. Un conjunto S de dos o más elementos escalares $a, b, c, \ldots$, en el que se definen dos operaciones llamadas adición (+) y multiplicación (·), forman un cuerpo F cuando se verifican las propiedades. Respecto de la adición:

A_1. Uniforme: $a + b$ es un elemento de F único.
A_2. Conmutativa: $a + b = b + a$.
A_3. Asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$.
A_4. Existencia de elemento neutro: Para todo elemento a perteneciente a F existe un elemento neutro, cero, de forma que $a + 0 = 0 + a = a$.
A_5. Existencia de elemento simétrico opuesto: Para todo elemento a perteneciente a F existe un único elemento de F, llamado opuesto, de forma que $a + (-a) = 0$.

Respecto de la multiplicación:

M_1. Uniforme: $ab = a \cdot b$ es un elemento de F único.
M_2. Conmutativa: $ab = ba$.
M_3. Asociativa: $(ab)c = a(bc)$.
M_4. Existencia de elemento neutro: Para todo elemento a perteneciente a F existe un elemento neutro, unidad, $1 \neq 0$, de forma que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.
M_5. Existencia de elemento simétrico (inverso): Para todo elemento $a \neq 0$ perteneciente a F existe un elemento de F único, llamado inverso a^{-1}, de forma que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.
D. Distributiva respecto de la adición:
D_1. $a(b + c) = ab + ac$.
D_2. $(a + b)c = ac + bc$.

Además de los cuerpos numéricos reseñados anteriormente existen otros como, por ejemplo, los conjuntos siguientes:

(*e*) Cocientes $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ de polinomios de x con coeficientes reales.

(*f*) Matrices de orden 2×2 de la forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, siendo a y b números reales.

(*g*) Elementos tales que $a + a = 0$. Este cuerpo, denominado *de característica* 2, *no se considerará* como tal. En él, por ejemplo, no es válido el razonamiento de que un determinante con dos filas idénticas es nulo. Permutando las dos filas iguales se obtiene $D = -D$, o sea, $2D = 0$; sin embargo, D no es necesariamente 0.

SUBCUERPOS. Sean S y T dos conjuntos de elementos de forma que cada elemento de S pertenece a T; en estas condiciones, S es un *subconjunto* de T.

Si S y T son dos cuerpos y S es un subconjunto de T, entonces S es un subcuerpo de T. Por ejemplo, el cuerpo de los números reales es un subcuerpo del formado por los números complejos; el cuerpo de los números racionales es un subcuerpo del formado por los números reales y del que constituyen los números complejos.

MATRIZ DEFINIDA SOBRE CUERPO. Cuando todos los elementos de una matriz A pertenecen a un cuerpo F diremos que «A está definida sobre F». Por ejemplo,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/4 & 2/3 \end{bmatrix}$ está definida sobre el cuerpo de los números racionales y la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 2 & 1-3i \end{bmatrix}$ está definida sobre el de los complejos. En este caso, la matriz A también está definida sobre el cuerpo de los números reales, pero B no lo está; asimismo, la matriz A está definida también sobre el cuerpo de los números complejos.

Sean $A, B, C, \ldots$, matrices definidas sobre un mismo cuerpo F, y sea F el menor cuerpo que contiene a todos aquellos elementos; dicho de otra manera: si todos los elementos fueran números racionales, el cuerpo F sería el de los números racionales y no el de los números reales ni el de los números complejos. Examinando en los capítulos anteriores las distintas operaciones que se pueden efectuar con matrices, se deduce que después de realizadas éstas solo se obtienen elementos pertenecientes a F. Por ejemplo:

La suma, diferencia y producto de matrices son matrices definidas sobre F.

Si A es una matriz regular, su inversa está definida sobre F.

Si $A \sim I$, existen dos matrices P y Q definidas sobre F de forma que $PAQ = I$, y la matriz I está definida sobre F.

Si A está definida sobre el cuerpo de los números racionales y tiene de característica r, ésta no se modifica cuando se considera que aquélla está definida sobre el cuerpo de los números reales, o sobre el correspondiente de los números complejos.

Decir que A está definida sobre F presupone que F es el menor de los cuerpos que contiene a todos los elementos de la matriz dada.

En capítulos posteriores será necesario a veces restringir el cuerpo; por ejemplo, limitarlo al de los números reales. En otros casos, por el contrario, será necesario ampliarlo como, por ejemplo, del cuerpo de los números racionales al de los números reales. Mientras no se advierta otra cosa, decir que «A está definida sobre F» no implica restricción alguna sobre el cuerpo, *excepto el cuerpo de característica dos.*

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demostrar que el conjunto de los números complejos forman un cuerpo.

Comprobar que se cumplen las condiciones $A_1 - A_5$, $M_1 - M_5$ y $D_1 - D_2$. El elemento neutro (A_4) es 0 y el elemento unidad (M_4) es 1. Si $a + bi$ y $c + di$ son dos elementos del conjunto, el opuesto (A_5) de $a + bi$ es $-a - bi$, el producto (M_1) es $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$; el inverso ($M_5$) de $a + bi \neq 0$ es

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}$$

La comprobación del resto de las propiedades se deja como ejercicio para el alumno.

PROBLEMAS PROPUESTOS

2. Demostrar que: (*a*) El conjunto de los números reales de la forma $a + b\sqrt{5}$, siendo a y b racionales.
(*b*) El conjunto de los cocientes $\frac{P(x)}{Q(x)}$ de polinomios en x de coeficientes reales, constituyen cuerpos.

3. Demostrar que el cuerpo de los números complejos tiene como subcuerpos los conjuntos siguientes:
(*a*) Números racionales.
(*b*) Números de la forma $a + b\sqrt{3}$, siendo a y b racionales.
(*c*) Números de la forma $a + bi$, siendo a y b números racionales.

4. Demostrar que todas las matrices cuadradas de segundo orden de la forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, siendo a y b números racionales, constituyen un cuerpo. Demostrar que este cuerpo es un subcuerpo del constituido por todas las matrices cuadradas de segundo orden de la forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ siendo a, b números reales.

5. ¿Por qué no forman un cuerpo todas las matrices cuadradas de segundo orden de elementos reales?

6. Se denomina *anillo* a un conjunto R de elementos que satisfacen las condiciones (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5; M_1, M_3; D_1, D_2) del cuerpo. Cuando la multiplicación no es conmutativa, el anillo se denomina *no abeliano* (no conmutativo), siendo *abeliano* (conmutativo) cuando R satisface la propiedad M_2. Cuando R satisface a la propiedad M_4, el anillo posee *elemento unidad.*
Comprobar:
(*a*) El conjunto de todos los números enteros pares, $0, \pm 2, \pm 4, \ldots$, forman un anillo sin elemento unidad.
(*b*) El conjunto de todos los números enteros $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, forman un anillo abeliano con elemento unidad.
(*c*) El conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n definidas sobre un cuerpo F forman un anillo no abeliano con elemento unidad.
(*d*) El conjunto de todas las matrices cuadradas de segundo orden de la forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, siendo a y b números reales, forman un anillo abeliano con elemento unidad.

7. ¿Se puede convertir el cuerpo (*a*) del Problema 6 en un anillo abeliano añadiéndole, simplemente, los elementos ± 1 del conjunto?

8. Según el Problema 4, el conjunto (*d*) del Problema 6 forma un cuerpo. ¿Todo cuerpo es un anillo? ¿Todo anillo abeliano con elemento unidad es un cuerpo?

9. Describir el anillo formado por todas las matrices cuadradas de segundo orden de la forma $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$, siendo a y b elementos pertenecientes al cuerpo F. Llamando A una matriz cualquiera del anillo y $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, demostrar que $LA = A$. La matriz L recibe el nombre de *elemento unidad por la izquierda.* ¿Existe un elemento unidad por la derecha?

10. Sea C el cuerpo de los números complejos $p + qi$ y K el correspondiente de las matrices cuadradas de segundo orden de la forma $\begin{bmatrix} u & -v \\ v & u \end{bmatrix}$, siendo p, q, u y v números reales. Considérese al número complejo $a + bi$ y a la matriz $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ como elementos que se corresponden en ambos cuerpos; a cada uno de ellos se llama *imagen* del otro.
(*a*) Escribir la imagen de $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$; $3 + 2i$, 5.
(*b*) Demostrar que la imagen de la suma (producto) de dos elementos de K es la suma (producto) de sus imágenes.
(*c*) Demostrar que la imagen del elemento unidad de K es el elemento unidad de C.
(*d*) ¿Cuál es la imagen del complejo conjugado del $a + bi$?
(*e*) ¿Cuál es la imagen de la inversa de la matriz $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$?

Todo lo anterior constituye un ejemplo de *isomorfismo* entre dos cuerpos.

Capítulo 9

Dependencia lineal de vectores y formas

EL PAR ORDENADO de números reales (x_1, x_2) representa un punto X en el plano. Este mismo par de números, escritos en la forma $[x_1, x_2]$, representan un *vector bidimensional* o *vector de segundo orden OX* (véase Fig. 9-1).

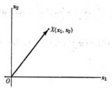

Fig. 9-1

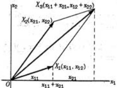

Fig. 9-2

Sean $X_1 = [x_{11}, x_{12}]$ y $X_2 = [x_{21}, x_{22}]$ dos vectores bidimensionales distintos; su suma obedece, por definición, a la regla del paralelogramo (véase Fig. 9-2), es decir,

$$X_3 \;=\; X_1 + X_2 \;=\; [x_{11} + x_{21},\ x_{12} + x_{22}]$$

Considerando a los vectores X_1 y X_2 como matrices de orden 1×2, la suma vectorial anterior equivale a la suma de ambas matrices según la regla dada en el Capítulo 1. Por otra parte, si k es un escalar cualquiera,

$$kX_1 \;=\; [kx_{11},\ kx_{12}]$$

que es, sencillamente, el producto de un vector por un número real que se estudia en física.

VECTORES. Se llama *vector n dimensional X*, o *vector de orden n* definido sobre F, a un conjunto ordenado de n elementos x_i de F, como, por ejemplo,

$$(9.1) \qquad X \;=\; [x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

Los elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se denominan primera, segunda, ..., enésima *componente* de X, respectivamente.

Más adelante veremos por qué es más conveniente escribir las componentes de un vector en columna, es decir, en la forma,

$$(9.1') \qquad X \;=\; [x_1, x_2, \ldots, x_n]' \;=\; \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

Aunque (9.1) y (9.1') representan al mismo vector, diremos que (9.1) es un *vector fila* y (9.1') un *vector columna*. En estas condiciones es factible considerar a una matriz A de orden $p \times q$ definiendo p vectores fila (siendo los elementos de una fila las componentes de un vector de orden q), o bien, definiendo q vectores columna.

Un vector cuyas componentes son todas nulas se llama *vector nulo* y se representa por 0.

La suma y diferencia de dos vectores fila (columna) y el producto de un escalar por un vector se hallan aplicando las reglas del álgebra de matrices.

Ejemplo 1. Consideremos los vectores de tercer orden

$$X_1 = [3,1,-4],\quad X_2 = [2,2,-3],\quad X_3 = [0,-4,1],\quad \text{y}\quad X_4 = [-4,-4,6]$$

(*a*) $2X_1 - 5X_2 = 2[3,1,-4] - 5[2,2,-3] = [6,2,-8] - [10,10,-15] = [-4,-8,7]$

(*b*) $2X_2 + X_4 = 2[2,2,-3] + [-4,-4,6] = [0,0,0] = 0$

(*c*) $2X_1 - 3X_2 - X_3 = 0$

(*d*) $2X_1 - X_2 - X_3 + X_4 = 0$

Los vectores de este ejemplo son vectores fila. Obsérvese que si se emplean vectores columna se llegaría a los mismos resultados.

DEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES. Un conjunto de m vectores de orden n definidos sobre un cuerpo F,

$$(9.2)\qquad \begin{array}{rcl} X_1 & = & [x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}] \\ X_2 & = & [x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}] \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ X_m & = & [x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}] \end{array}$$

son *linealmente dependientes* cuando existen m elementos de F, no todos nulos, $k_1, k_2, \ldots, k_m$, de forma que

$$(9.3)\qquad k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_mX_m = 0$$

En caso contrario, los vectores se llaman *linealmente independientes*.

Ejemplo 2. Consideremos los cuatro vectores del Ejemplo 1. Según (*b*), los vectores X_2 y X_4 son linealmente dependientes; pero también lo son, según (*c*), los vectores X_1, X_2 y X_3, y todo el conjunto, teniendo en cuenta (*d*).

Los vectores X_1 y X_2, sin embargo, son linealmente independientes. Para demostrarlo, hagamos la hipótesis contraria, es decir,

$$k_1X_1 + k_2X_2 = [3k_1 + 2k_2,\ k_1 + 2k_2,\ -4k_1 - 3k_2] = [0,0,0]$$

En estas condiciones, $3k_1 + 2k_2 = 0$, $k_1 + 2k_2 = 0$, $-4k_1 - 3k_2 = 0$. De las dos primeras se deduce $k_1 = 0$ y, por tanto, $k_2 = 0$.

Cualquier vector X de orden n y el vector nulo 0 de orden n son linealmente dependientes.

Un vector X_{m+1} es *combinación lineal* de otros, $X_1, X_2, \ldots, X_m$, si existen los elementos $k_1, k_2, \ldots, k_m$, pertenecientes a F, tales que

$$X_{m+1} = k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_mX_m$$

TEOREMAS FUNDAMENTALES. Si en (9.3) $k_i \neq 0$, podemos despejar

$$X_i = -\frac{1}{k_i}\{k_1X_1 + \cdots + k_{i-1}X_{i-1} + k_{i+1}X_{i+1} + \cdots + k_mX_m\} \quad \text{o bien}$$

$$(9.4)\qquad X_i = s_1X_1 + \cdots + s_{i-1}X_{i-1} + s_{i+1}X_{i+1} + \cdots + s_mX_m$$

Por consiguiente:

I. Si m vectores son linealmente dependientes, cualquiera de ellos se puede expresar como combinación lineal de los otros.

II. Si m vectores $X_1, X_2, \ldots, X_m$ son linealmente independientes, mientras que el conjunto obtenido al añadir otro vector X_{m+1} es linealmente dependiente, el vector X_{m+1} se puede expresar como combinación lineal de los independientes $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

Ejemplo 3. En el Ejemplo 2 los vectores X_1 y X_2 son linealmente independientes, mientras que X_1, X_2 y X_3 son linealmente dependientes, satisfaciendo la relación $2X_1 - 3X_2 - X_3 = 0$. Es evidente que $X_3 = 2X_1 - 3X_2$.

III. Si entre los m vectores $X_1, X_2, \ldots, X_m$ existen $r < m$ vectores linealmente dependientes, los vectores del conjunto total son linealmente dependientes.

Ejemplo 4. De (*b*), Ejemplo 1, se deduce que los vectores X_2 y X_4 son linealmente dependientes; de (*d*) se deduce que los cuatro vectores son linealmente dependientes. Véase Problema 1.

IV. Si la característica de la matriz

$$(9.5) \qquad A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}, \qquad m \leq n,$$

asociada a los m vectores (9.2) es $r < m$, existen en el conjunto r vectores que son linealmiente independientes, y cada uno de los $m - r$ restantes se puede expresar como combinación lineal de estos r vectores.

Véanse Problemas 2-3.

V. La condición necesaria y suficiente para que los vectores (9.2) sean linealmente dependientes es que la característica de la matriz (9.5) de los vectores sea $r < m$. Si la característica es m, los vectores son linealmente independientes.

El conjunto de vectores (9.2) es linealmente independiente si $m > n$.

Si el conjunto de vectores (9.2) es linealmente independiente, también lo es cualquier subconjunto del mismo.

FORMA LINEAL de n variables, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, definida sobre un cuerpo F es un polinomio del tipo

$$(9.6) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

en el cual los coeficientes son elementos de F.

Consideremos un sistema de m formas lineales en n variables

$$(9.7) \qquad \begin{cases} f_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ f_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

y su matriz asociada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Si existen elementos de F, $k_1, k_2, \ldots, k_m$, no todos nulos, de manera que

$$k_1f_1 + k_2f_2 + \ldots + k_m f_m = 0$$

las formas (9.7) se llaman *linealmente dependientes*; en caso contrario, las formas son *linealmente independientes*. Por tanto, la dependencia o independencia lineal de las formas (9.7) equivale a la dependencia o independencia lineal de los vectores fila de A.

Ejemplo 5. Las formas $f_1 = 2x_1 - x_2 + 3x_3$, $f_2 = x_1 + 2x_2 + 4x_3$, $f_3 = 4x_1 - 7x_2 + x_3$ son linealmente dependientes, ya que la característica de $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & -7 & 1 \end{bmatrix}$ es igual a 2. En este caso concreto, $3f_1 - 2f_2 - f_3 = 0$.

El sistema (9.7) es necesariamente dependiente (indeterminado) si $m > n$. ¿Por qué?

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demostrar que si entre los m vectores $X_1, X_2, \ldots, X_m$, existe un subconjunto, por ejemplo $X_1, X_2, \ldots, X_r$, siendo $r < m$, que son linealmente dependientes, también lo son los m vectores dados.

Por hipótesis, $k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_rX_r = 0$, no siendo nulos todos los números k; entonces,

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_rX_r + 0 \cdot X_{r+1} + \cdots + 0 \cdot X_m = 0$$

y como no son nulos todos los escalares k, el conjunto total de vectores es linealmente dependiente.

2. Demostrar que si la característica de la matriz asociada a un conjunto de m vectores de orden n es $r < m$ hay, exactamente, r vectores que son linealmente independientes y que cada uno de los $m - r$ vectores restantes se puede expresar como combinación lineal de dichos r vectores.

Sea (9.5) la matriz y supongamos, en primer lugar, que $m \leq n$. Si el menor de orden r situado en el extremo superior izquierdo es igual a cero, permutando filas y columnas cuantas veces fuera necesario, se puede conseguir que un menor no nulo de orden r ocupe esta posición y, entonces, volver a numerar filas y columnas en orden natural. En estas condiciones,

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1r} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \cdots & x_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Consideremos ahora un menor de orden $(r+1)$

$$\nabla = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1r} & x_{1q} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2r} & x_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{r1} & x_{r2} & \cdots & x_{rr} & x_{rq} \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pr} & x_{pq} \end{vmatrix} = 0$$

en donde los elementos x_{pj} y x_{iq} pertenecen, respectivamente, a una fila y una columna cualesquiera no incluidas en Δ. Sean $k_1, k_2, \ldots, k_{r+1} = \Delta$ los respectivos adjuntos de los elementos $x_{1q}, x_{2q}, \ldots, q_{rq}, x_{pq}$ de la última columna de ∇. Entonces, según (3.10),

$$k_1x_{1i} + k_2x_{2i} + \cdots + k_rx_{ri} + k_{r+1}x_{pi} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

y por hipótesis $\qquad k_1x_{1q} + k_2x_{2q} + \cdots + k_rx_{rq} + k_{r+1}x_{pq} = V = 0$

Sustituyendo ahora la última columna de V por otra cualquiera de las restantes, por ejemplo, la que ocupe el lugar u que no pertenece a Δ. Los adjuntos de los elementos de esta columna son, precisamente, los obtenidos anteriormente de manera que

$$k_1x_{1u} + k_2x_{2u} + \cdots + k_rx_{ru} + k_{r+1}x_{pu} = 0$$

Por consiguiente,

$$k_1x_{1t} + k_2x_{2t} + \cdots + k_rx_{rt} + k_{r+1}x_{pt} = 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots, n)$$

y sumando para todos los valores de t,

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_rX_r + k_{r+1}X_p = 0$$

Como $k_{r+1} = \Delta \neq 0$, X_p es una combinación lineal de los r vectores linealmente independientes $X_1, X_2, \ldots, X_r$. Por consiguiente, X_p es uno cualquiera de los vectores $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots, X_m$, de orden $m - r$ y, por tanto, cada uno de ellos se puede expresar mediante una combinación lineal de $X_1, X_2, \ldots, X_r$.

En el caso de que $m > n$, consideremos la matriz que se obtiene añadiendo a los m vectores dados las $m - n$ componentes nulas. La matriz es $[A \mid 0]$. Es evidente que con ello no se modifican ni la dependencia o independencia lineal de los vectores ni su característica.

En ambos casos, pues, los vectores $X_{r+1}, \ldots, X_m$ son combinación lineal de los vectores linealmente independientes $X_1, X_2, \ldots, X_r$, como queríamos demostrar.

3. Demostrar, mediante el cálculo matricial, que cada uno de los sistemas de vectores

$$(a)\quad \begin{aligned} X_1 &= [1, 2, -3, 4] \\ X_2 &= [3, -1, 2, 1] \\ X_3 &= [1, -5, 8, -7] \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad (b)\quad \begin{aligned} X_1 &= [2, 3, 1, -1] \\ X_2 &= [2, 3, 1, -2] \\ X_3 &= [4, 6, 2, -3] \end{aligned}$$

es linealmente independiente. En ambos casos, determinar el máximo subconjunto de vectores linealmente independientes y expresar los otros como combinación lineal de éstos.

(*a*) La característica de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 8 & -7 \end{bmatrix}$ es 2; por tanto, hay dos vectores linealmente independientes, X_1 y X_2. El menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Consideremos, entonces, el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix}$. Los adjuntos de los elementos de la tercera columna son, respectivamente, -14, 7 y -7. Luego $-14X_1 + 7X_2 - 7X_3 = 0$, de donde $X_3 = -2X_1 + X_2$.

(*b*) La característica de la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ es 2; por tanto, hay dos vectores linealmente independientes, X_1 y X_2. Ahora bien, el menor $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$; permutando las columnas segunda y cuarta se obtiene $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ en la cual $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$. Los adjuntos de los elementos de la última columna de $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ son 2, 2, -2, respectivamente. Por tanto,

$$2X_1 + 2X_2 - 2X_3 = 0 \quad \text{y} \quad X_3 = X_1 + X_2$$

4. Sean $P_1(1,1,1)$, $P_2(1,2,3)$, $P_3(3,1,2)$ y $P_4(2,3,4)$ cuatro puntos del espacio. Los puntos P_1, P_2 y el origen de coordenadas determinan un plano π cuya ecuación es

$$\text{(i)} \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - 2y + z = 0$$

Sustituyendo las coordenadas de P_4 en el primer miembro de (i) se tiene

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, P_4 está situado en π. Obsérvese que la característica de $[P_4, P_1, P_2]' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ es igual a 2.

Hemos llegado a la conclusión, pues, de que tres puntos cualesquiera del espacio están contenidos en un plano que pasa por el origen siempre que la característica de la matriz de sus coordenadas sea igual a 2.

Demostrar que P_3 no está contenido en π.

PROBLEMAS PROPUESTOS

5. Demostrar que si m vectores $X_1, X_2, \ldots, X_m$ son linealmente independientes, el conjunto obtenido al añadir otro vector, X_{m+1}, es linealmente dependiente y que, entonces, el vector X_{m+1} se puede expresar como combinación lineal de los $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

6. Demostrar que la expresión del vector X_{m+1} del Problema 5 es única.

Ind. Suponer que $X_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} k_i X_i = \sum_{i=1}^{m} s_i X_i$ y considerar $\sum_{i=1}^{m} (k_i - s_i) X_i$.

7. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que los vectores (9.2) sean linealmente dependientes es que la característica de la matriz (9.5) de los vectores sea $r < m$.

Ind. Suponer que los m vectores son linealmente dependientes de forma que se verifique (9.4). En (9.5) restar de la fila i el producto de la primera fila por s_1, el de la segunda por $s_2, \ldots,$ como se indica en (9.4). Para el recíproco, véase el Problema 2.

8. Determinar si cada uno de los siguientes conjuntos de vectores definidos sobre el cuerpo de los números reales son linealmente dependientes o independientes. En el caso de dependencia, hallar un subconjunto máximo linealmente independiente y expresar los restantes vectores como combinación lineal de éstos.

(a) $X_1 = [2, -1, 3, 2]$, $X_2 = [1, 3, 4, 2]$, $X_3 = [3, -5, 2, 2]$

(b) $X_1 = [1, 2, 1]$, $X_2 = [2, 1, 4]$, $X_3 = [4, 5, 6]$, $X_4 = [1, 8, -3]$

(c) $X_1 = [2, 1, 3, 2, -1]$, $X_2 = [4, 2, 1, -2, 3]$, $X_3 = [0, 0, 5, 6, -5]$, $X_4 = [6, 3, -1, -6, 7]$

Sol. (a) $X_3 = 2X_1 - X_2$ (b) $X_3 = 2X_1 + X_2$, $X_4 = 5X_1 - 2X_2$ (c) $X_3 = 2X_1 - X_2$, $X_4 = 2X_2 - X_1$

9. ¿Por qué no pueden existir más de n vectores de orden n definidos sobre un cuerpo F que sean linealmente independientes?

10. Demostrar que si en (9.2) $X_i = X_j$, o bien $X_i = aX_j$, siendo a un elemento de F, el conjunto de vectores es linealmente dependiente. ¿Es cierto el recíproco?

11. Demostrar que un vector cualquiera X de orden n y el vector nulo de orden n son linealmente dependientes; en este sentido, los vectores X y 0 se consideran proporcionales.
Ind. Considerar $k_1X + k_2 \cdot 0 = 0$, siendo $k_1 = 0$ y $k_2 \neq 0$.

12. (*a*) Demostrar que los vectores $X_1 = [1, 1+i, i]$, $X_2 = [i, -i, 1-i]$ y $X_3 = [1+2i, 1-i, 2-i]$ son linealmente dependientes si están definidos sobre el cuerpo de los números racionales y, por consiguiente, sobre el cuerpo complejo.

(*b*) Demostrar que los vectores $X_1 = [1, 1+i, i]$, $X_2 = [i, -i, 1-i]$ y $X_3 = [0, 1-2i, 2-i]$ son linealmente independientes si están definidos sobre el cuerpo de los números reales, pero son linealmente dependientes sobre el cuerpo complejo.

13. Estudiar la dependencia o independencia lineal de las formas lineales:

$$(a)\quad \begin{aligned} f_1 &= 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \\ f_2 &= 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \\ f_3 &= 5x_1 - 9x_2 + 8x_3 - x_4 \end{aligned} \qquad (b)\quad \begin{aligned} f_1 &= 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 \\ f_2 &= 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 \\ f_3 &= 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \end{aligned}$$

Sol. (*a*) $3f_1 - 2f_2 - f_3 = 0$

14. Considérese la dependencia o independencia lineal del sistema de polinomios

$$P_i = a_{i0}x^n + a_{i1}x^{n-1} + \cdots + a_{i,n-1}x + a_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

y demostrar que dicho sistema es linealmente dependiente o independiente según que los vectores fila de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

sean linealmente dependientes o independientes, es decir, según que la característica r de A sea menor o igual que m.

15. Si los polinomios de cada uno de los sistemas que se indican son linealmente dependientes, hallar una combinación lineal que sea idénticamente nula.

$$(a)\quad \begin{aligned} P_1 &= x^3 - 3x^2 + 4x - 2 \\ P_2 &= 2x^2 - 6x + 4 \\ P_3 &= x^3 - 2x^2 + x \end{aligned} \qquad (b)\quad \begin{aligned} P_1 &= 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 3 \\ P_2 &= x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \\ P_3 &= x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

Sol. (*a*) $2P_1 + P_2 - 2P_3 = 0$ (*b*) $P_1 + P_2 - 2P_3 = 0$

16. Estudiar la dependencia o independencia lineal del conjunto de matrices cuadradas de segundo orden $M_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix} p & q \\ s & t \end{bmatrix}$, definidas sobre el cuerpo F.

Demostrar que $k_1M_1 + k_2M_2 + k_3M_3 = 0$, no siendo nulos todos los números k, pertenecientes a F, implica que la característica de la matriz $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ p & q & s & t \end{bmatrix}$ sea menor que 3. (Obsérvese que las matrices M_1, M_2, M_3 se consideran definidas como vectores de cuatro componentes.)

Generalizar el resultado a un conjunto de matrices de orden $m \times n$.

17. Demostrar que $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, y $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ son linealmente dependientes.

18. Demostrar que toda matriz cuadrada de segundo orden se puede expresar como combinación lineal de las matrices $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, y $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Generalizar al caso de matrices de orden $n \times n$.

19. Sabiendo que los vectores $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de orden n son linealmente independientes, demostrar que la condición necesaria y suficiente para que los vectores $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, siendo $Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j$, sean linealmente independientes es que $A = [a_{ij}]$ sea una matriz regular.

20. Sabiendo que la característica de A es r, indicar cómo se puede formar una matriz regular B de manera que $AB = [C_1, C_2, \ldots, C_r, 0, \ldots, 0]$, siendo $C_1, C_2, \ldots, C_r$ un conjunto dado de columnas linealmente independientes de A.

21. Dados los puntos $P_1(1, 1, 1, 1)$, $P_2(1, 2, 3, 4)$, $P_3(2, 2, 2, 2)$ y $P_4(3, 4, 5, 6)$ de un espacio de cuatro dimensiones:
(*a*) Demostrar que la característica de la matriz $[P_1, P_3]'$ es 1 y, por tanto, que los puntos están situados sobre una recta que pasa por el origen.
(*b*) Demostrar que la característica de la matriz $[P_1, P_2, P_3, P_4]'$ es 2 y, por tanto, que estos puntos están situados en un plano que pasa por el origen.
(*c*) ¿Está situado el punto $P_5(2, 3, 2, 5)$ en el plano de (*b*)?

22. Demostrar que toda matriz cuadrada A de orden n definida sobre un cuerpo F satisface a una ecuación de la forma

$$A^p + k_1A^{p-1} + k_2A^{p-2} + \cdots + k_{p-1}A + k_pI = 0$$

en donde k_i son elementos de F.

Ind. Considerar las matrices $I, A, A^2, A^3, \ldots, A^{n^2}$ y véase el Problema 16.

23. Hallar la ecuación de mínimo grado (véase Problema 22) que es satisfecha por

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (c)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sol. (*a*) $A^2 - 2A = 0$, (*b*) $A^2 - 2A + 2I = 0$, (*c*) $A^2 - 2A + I = 0$

24. En los apartados (*b*) y (*c*) del Problema 23, multiplicar cada ecuación por A^{-1} para obtener (*b*) $A^{-1} = I - \frac{1}{2}A$, (*c*) $A^{-1} = 2I - A$ y, entonces, comprobar que: Si la matriz A definida sobre un cuerpo F es regular, la matriz A^{-1} se puede expresar como un polinomio en A cuyos coeficientes sean escalares pertenecientes al cuerpo F.

Capítulo 10

Sistemas de ecuaciones lineales

DEFINICIONES. Consideremos un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$(10.1)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = h_m \end{cases}$$

en el cual todos los coeficientes de las incógnitas (a_{ij}) y los términos independientes (h_i) pertenecen a un cuerpo F.

Se llama solución del sistema en F, todo conjunto de valores de las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pertenecientes a F, que satisfagan simultáneamente las m ecuaciones dadas. Si el sistema tiene solución se denomina *compatible*; en caso contrario es *incompatible*. Un sistema compatible puede tener una o infinitas soluciones.

Dos sistemas de ecuaciones lineales, sobre un mismo cuerpo F, de igual número de incógnitas se llaman *equivalentes* cuando toda solución de uno de ellos lo es también del otro. Para obtener un sistema equivalente al (10.1) se pueden efectuar una o más de las transformaciones siguientes: (*a*) permutar dos ecuaciones, (*b*) multiplicar una ecuación por una constante distinta de cero, (*c*) sumar una ecuación a otra multiplicada por una constante. Resolver un sistema de ecuaciones compatible consiste en sustituir el sistema dado por otro equivalente.

SOLUCION MEDIANTE LA NOTACION MATRICIAL. Utilizando esta notación, el sistema de ecuaciones lineales (10.1) se puede escribir en la forma

$$(10.2)\qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdot \\ h_m \end{bmatrix}$$

o bien de manera más compacta,

$$(10.3)\qquad AX = H$$

siendo $A = [a_{ij}]$ la matriz de los coeficientes, $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$, y $H = [h_1, h_2, \ldots, h_m]'$.

Consideremos ahora la *matriz ampliada* con los términos independientes del sistema (10.1),

$$(10.4)\qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & h_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & h_m \end{bmatrix} = [A\ \ H]$$

(Cada una de las filas de (10.4) es una representación abreviada de las correspondientes ecuaciones de (10.1); para leer la ecuación de una fila basta con añadir apropiadamente las incógnitas y los signos + e =.)

Para resolver el sistema (10.1) por medio de (10.4) se sustituye A por la matriz canónica equivalente de fila C del Capítulo 5, aplicando transformaciones elementales de fila. Para ello se opera sobre todas las filas de (10.4).

Ejemplo 1. Resolver el sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

La matriz ampliada $[A \;\; H] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente, la solución es el sistema equivalente de ecuaciones: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Con la notación vectorial se escribe en la forma $X = [1, 0, 1]'$.

TEOREMAS FUNDAMENTALES. Cuando la matriz A de los coeficientes del sistema (10.1) se reduce a la forma canónica equivalente de fila C, lo que ocurre es que la matriz $[A\ H]$ se reduce a la matriz $[C\ K]$, siendo $K = [k_1, k_2, \ldots, k_m]'$. Si la característica de A es r, las primeras r filas de C contienen uno o más elementos distintos de cero. El primero de tales elementos no nulos de cada fila es la unidad y la columna a la que pertenece tiene todos los demás elementos iguales a cero. Las filas restantes están formadas por ceros. De las r primeras filas de la matriz $[C\ K]$ se pueden obtener cada una de las variables $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ esta notación corresponde a la del Capítulo 5) en función de las variables restantes, $x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}, \ldots, x_{j_n}$ y de uno de los valores $k_1, k_2, \ldots, k_r$.

Si $k_{r+1} = k_{r+2} = \ldots = k_m = 0$, el sistema (10.1) es compatible y su solución está formada por un conjunto arbitrario de valores de $x_{j_{r+1}}, x_{j_{r+2}}, \ldots, x_{j_n}$, con los valores que resulten de $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$. Por otra parte, si uno al menos de los números $k_{r+1}, k_{r+2}, \ldots, k_m$ es distinto de cero, por ejemplo, $k_t \neq 0$, la ecuación correspondiente es

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = k_t \neq 0$$

y el sistema (10.1) es incompatible.

En el caso de ser compatible, las matrices A y $[A\ H]$ tienen la misma característica; si es incompatible, dichas características son distintas. Por tanto,

I. La condición necesaria y suficiente para que un sistema, $AX = H$, de m ecuaciones lineales con n incógnitas sea compatible, es que la matriz de los coeficientes y la ampliada con los términos independientes tengan la misma característica.

II. En un sistema compatible (10.1) en el que $r < n$ se pueden elegir $n - r$ incógnitas, de forma que la característica de la matriz de los coeficientes de las r incógnitas restantes sea r. Al asignar valores arbitrarios a estas $n - r$ incógnitas, las otras r quedan perfectamente determinadas.

Ejemplo 2. En el sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 10 \end{cases}$

$$[A \ \ H] \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & -5 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 & -8 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [C \ \ K]$$

Como las matrices A y $[A\ H]$ tienen la misma característica, $r = 3$, el sistema dado es compatible; la solución general contiene $n - r = 4 - 3 = 1$ constante arbitraria. De la última fila de $[C\ K]$, $x_4 = 0$. Haciendo $x_3 = a$, siendo a un número cualquiera, $x_1 = 10 + 11a$ y $x_2 = -2 - 4a$. La solución del sistema viene dada, entonces, por $x_1 = 10 + 11a$, $x_2 = -2 - 4a$, $x_3 = a$, $x_4 = 0$, o bien $X = [10 + 11a, -2 - 4a, a, 0]'$.

Si un sistema de ecuaciones compatible definido sobre un cuerpo F tiene solución única (Ejemplo 1), ésta pertenece a F. Si el sistema tiene infinitas soluciones (Ejemplo 2) y los valores arbitrarios asignados pertenecen a F, también pertenecen a él aquellas infinitas soluciones del sistema. Sin embargo, el sistema tiene infinitas soluciones sobre un cuerpo $\mathfrak{F}$, del cual F es un subcuerpo. Por ejemplo, el sistema del Ejemplo 2 tiene infinitas soluciones pertenecientes a F (cuerpo de los números racionales) si se impone la condición de que a sea un número racional; tiene infinitas soluciones reales si a es un número real, e infinitas soluciones complejas si a es un número complejo.

Véanse Problemas 1-2.

SISTEMA NO HOMOGENEO DE ECUACIONES. Una ecuación lineal

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = h$$

en la que $h \neq 0$ se llama *no homogénea*. Un sistema $AX = H$ se llama *sistema no homogéneo* de ecuaciones siempre que H no sea un vector nulo. Los sistemas de los Ejemplos 1 y 2 son de este tipo.

En el Problema 3 se demuestra el teorema siguiente:

III. Un sistema no homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas tiene solución única cuando la característica de la matriz A de los coeficientes es igual a n, es decir, siempre que $|A| \neq 0$ (matriz regular).

Además del método anterior veremos otros dos procedimientos de resolver un sistema no homogéneo compatible de n ecuaciones con n incógnitas, $AX = H$. El primero de ellos es el conocido método de los determinantes.

(*a*) Solución por la regla de Cramer. Sea A_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, la matriz obtenida a partir de A sustituyendo la columna i por la de términos independientes. Entonces, si $|A| \neq 0$, el sistema $AX = H$ tiene solución única dada por

$$(10.5) \qquad x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

Véase Problema 4.

Ejemplo 3. Resolver el sistema $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$ aplicando la regla de Cramer

Se tiene

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = -120, \qquad |A_1| = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \\ 8 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = -240$$

$$|A_2| = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -4 \\ 3 & 8 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = -24, \qquad |A_3| = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = 0$$

y
$$|A_4| = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = -96$$

Por tanto, $x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{-240}{-120} = 2,\quad x_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|} = \dfrac{-24}{-120} = \dfrac{1}{5},\quad x_3 = \dfrac{|A_3|}{|A|} = \dfrac{0}{-120} = 0,$ y

$$x_4 = \frac{|A_4|}{|A|} = \frac{-96}{-120} = \frac{4}{5}.$$

(*b*) Solución utilizando la matriz inversa A^{-1}. Si $|A| \neq 0$, existe la matriz inversa A^{-1}, y la solución del sistema $AX = H$ viene dada por

(10.6) $$A^{-1} \cdot AX = A^{-1}H \quad \text{o bien} \quad X = A^{-1}H$$

Ejemplo 4. La matriz de los coeficientes del sistema $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$ es $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Del Problema 2(*b*), Capítulo 7, $A^{-1} = \dfrac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$. Por tanto,

$$A^{-1} \cdot AX = X = A^{-1}H = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 35 \\ 29 \\ 5 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema es $x_1 = 35/18$, $x_2 = 29/18$, $x_3 = 5/18$.

Véase Problema 5.

SISTEMA DE ECUACIONES HOMOGENEAS. Una ecuación lineal de la forma

(10.7) $$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$$

se llama *homogénea*. Un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas.

(10.8) $$AX = 0$$

se denomina *sistema homogéneo de ecuaciones*. En el sistema (10.8), la matriz de los coeficientes A y la ampliada $[A\ 0]$, tienen la misma característica; por tanto, el sistema es siempre compatible. Obsérvese que $X = 0$, es decir, $x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0$ es solución en cualquier caso y por ello recibe el nombre de *solución trivial*.

Si la característica de la matriz A es n, entonces n de las Ecs. (10.8) se pueden resolver mediante la regla de Cramer, obteniéndose la única solución $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, es decir, la solución trivial. Si la característica de A es $r < n$, el Teorema II asegura la existencia de soluciones distintas de la trivial. Por tanto,

IV. La condición necesaria y suficiente para que (10.8) tenga solución distinta de la trivial es que la característica de A sea $r < n$.

V. La condición necesaria y suficiente para que un sistema homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas tenga solución distinta de la trivial es que $|A| = 0$.

VI. Si la característica de (10.8) es $r < n$, el sistema tiene, exactamente, $n - r$ soluciones linealmente independientes de forma que cada solución es continuación lineal de estas $n - r$, y cada una de estas combinaciones lineales es una solución.

Véase Problema 6.

SEAN X_1 y X_2 dos soluciones distintas del sistema $AX = H$. Entonces, $AX_1 = H$, $AX_2 = H$ y $A(X_1 - X_2) = AY = 0$. Por tanto, $Y = X_1 - X_2$ es una solución, distinta de la trivial, de $AX = 0$.

Recíprocamente, si Z es una solución cualquiera, distinta de la trivial, del sistema $AX = 0$ y X_p es una solución cualquiera del sistema $AX = H$, entonces $X = X_p + Z$ es también una solución de $AX = H$. Si Z representa la solución completa de $AX = 0$, $X_p + Z$ será la solución completa de $AX = H$. Por tanto,

VII. Si el sistema no homogéneo de ecuaciones $AX = H$ es compatible, la solución completa de este sistema está formada por la solución completa del sistema homogéneo $AX = 0$ más una solución particular del sistema $AX = H$.

Ejemplo 5. Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$. Hagamos $x_1 = 0$; entonces $x_3 = 2$ y $x_2 = 1$. Una solución particular es $X_p = [0, 1, 2]'$ la solución completa del sistema homogéneo $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ es $[-7a, a, 3a]'$, siendo a arbitrario. Luego la solución completa del sistema dado es

$$X = [-7a, a, 3a]' + [0, 1, 2]' = [-7a,\ 1+a,\ 2+3a]'$$

Nota. El método anterior se puede aplicar a sistemas más complicados. Sin embargo, es necesario demostrar, en primer lugar, que el sistema es compatible. Esto se realiza por el método de la matriz ampliada que hemos visto dado anteriormente.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Resolver $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases}$.

Solución:

La matriz ampliada es

$$[A\ H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, $x_1 = 1$, $x_2 - 2x_3 = 0$ y $x_4 + 3x_5 = 0$. Haciendo $x_3 = a$ y $x_5 = b$, siendo a y b arbitrarios, la solución completa es $x_1 = 1$, $x_2 = 2a$, $x_3 = a$, $x_4 = -3b$, $x_5 = b$ o bien $X = [1, 2a, a, -3b, b]'$.

2. Resolver $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \phantom{{}- 2x_4} = 7 \end{cases}$.

Solución:

$$[A\ H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

La última fila corresponde a la ecuación $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -5$; por tanto, el sistema es incompatible y carece de solución.

3. Demostrar que un sistema no homogéneo $AX = H$ de n ecuaciones con n incógnitas tiene solución única siempre que $|A| \neq 0$.

Si A es una matriz regular es equivalente a la matriz I. Al pasar de A a I, aplicando únicamente transformaciones de fila, supongamos que $[A\ H]$ se reduce a $[I\ K]$. Entonces, $X = K$ es una solución del sistema.

Supongamos ahora que $X = L$ es una segunda solución del sistema; en estas condiciones, $AK = H$, $AL = H$ y $AK = AL$. Como A es una matriz regular, $K = L$ y, por tanto, la solución es única.

4. Deducir la regla de Cramer.

Sea el sistema no homogéneo de ecuaciones

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = h_n \end{cases}$$

Llamemos A a la matriz de los coeficientes $[a_{ij}]$ y α_{ij} al adjunto del elemento a_{ij} en A. Multiplicando la primera ecuación de (1) por α_{11}, la segunda por $\alpha_{21}, \dots$, la última por α_{n1} y sumando miembro a miembro, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\alpha_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}\alpha_{i1}x_2 + \dots + \sum_{i=1}^{n} a_{in}\alpha_{i1}x_n = \sum_{i=1}^{n} h_i\alpha_i$$

que, según los Teoremas X y XI y el Problema 10, se reduce a

$$|A|\cdot x_1 = \begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ h_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A_1|, \text{ de donde } x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$$

Multiplicando ahora las ecuaciones de (1) por $\alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{n2}$, respectivamente, y sumando,

$$|A|\cdot x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & h_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & h_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & h_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A_2|, \text{ de donde } x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$$

Finalmente, multiplicando las ecuaciones de (1) por $\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \dots, \alpha_{nn}$, y sumando miembro a miembro,

$$|A|\cdot x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & h_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & h_n \end{vmatrix} = |A_n|, \text{ de donde } x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

5. Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$ hallando la inversa de la matriz de los coeficientes.

Solución:

La inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ es $\dfrac{1}{120}\begin{bmatrix} 120 & 120 & 0 & -120 \\ -69 & -73 & 17 & 80 \\ -15 & -35 & -5 & 40 \\ 24 & 8 & 8 & -40 \end{bmatrix}$. Por tanto,

$$X = \frac{1}{120}\begin{bmatrix} 120 & 120 & 0 & -120 \\ -69 & -73 & 17 & 80 \\ -15 & -35 & -5 & 40 \\ 24 & 8 & 8 & -40 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

Véase Ejemplo 3.

6. Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 \qquad + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

Solución:

$$[A \quad H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La solución completa del sistema es $x_1 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, $x_2 = -\frac{1}{2}a - \frac{3}{2}b$, $x_3 = a$, $x_4 = b$. Como la característica de la matriz A es 2 se pueden obtener, exactamente, $n - r = 4 - 2 = 2$ soluciones linealmente independientes. Tomando $a = 1$, $b = 1$ y $a = 3$, $b = 1$ se obtiene

$$x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1 \quad \text{y} \quad x_1 = -1,\ x_2 = -3,\ x_3 = 3,\ x_4 = 1$$

¿Qué se puede decir acerca del par de soluciones obtenidas si se hace $a = b = 1$ y $a = b = 3$?

7. Demostrar que en una matriz cuadrada A de orden n y de característica $n - 1$, los adjuntos de los elementos de dos líneas (filas o columnas) cualesquiera son proporcionales.

Como $|A| = 0$, los adjuntos de los elementos de una línea cualquiera de A son una solución X_1 del sistema $AX = 0$ ($A'X = 0$).

Ahora bien, el sistema tiene una solución linealmente independiente, ya que la característica de A (A') es $n - 1$. Por tanto, para los adjuntos de otra línea de A (otra solución X_2 del sistema) se tendrá, igualmente, $X_2 = kX_1$.

8. Sabiendo que $f_1, f_2, \ldots, f_m$ son formas linealmente independientes definidas sobre un cuerpo F, de n variables con $m < n$, demostrar que la condición necesaria y suficiente para que las p formas lineales

$$g_j = \sum_{i=1}^{m} s_{ij} f_i, \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

sean linealmente dependientes es que la característica de la matriz $[s_{ij}]$ de orden $m \times p$ sea igual a $r < p$.

Las formas g son linealmente dependientes si, y solo si, existen los escalares $a_1, a_2, \ldots, a_p$, pertenecientes a F y no todos nulos, de manera que

$$\begin{aligned} a_1 g_1 + a_2 g_2 + \ldots + a_p g_p &= a_1 \sum_{i=1}^{m} s_{i1} f_i + a_2 \sum_{i=1}^{m} s_{i2} f_i + \ldots + a_p \sum_{i=1}^{m} s_{ip} f_i \\ &= \Big(\sum_{j=1}^{p} a_j s_{1j}\Big) f_1 + \Big(\sum_{j=1}^{p} a_j s_{2j}\Big) f_2 + \ldots + \Big(\sum_{j=1}^{p} a_j s_{mj}\Big) f_m \\ &= \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{p} a_j s_{ij}\Big) f_i = 0 \end{aligned}$$

Como las formas f son linealmente independientes se tiene

$$\sum_{j=1}^{p} a_j s_{ij} = a_1 s_{i1} + a_2 s_{i2} + \dots + a_p s_{ip} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

Ahora bien, según el Teorema IV, el sistema homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas $\sum_{j=1}^{p} s_{ij} x_j = 0$ tiene una solución no trivial $X = [a_1, a_2, \dots, a_p]'$ si, y solo si, la característica de $[s_{ij}]$ es $r < p$.

9. Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz singular de orden n. Demostrar que siempre existe una matriz $B = [b_{ij}] \neq 0$ de orden n de forma que $AB = 0$.

Llamemos $B_1, B_2, \dots, B_n$ los vectores columna de B. Por hipótesis, $AB_1 = AB_2 = \dots = AB_n = 0$. Consideremos una cualquiera de éstas, por ejemplo, $AB_t = 0$, o bien

$$\begin{cases} a_{11}b_{1t} + a_{12}b_{2t} + \dots + a_{1n}b_{nt} = 0 \\ a_{21}b_{1t} + a_{22}b_{2t} + \dots + a_{2n}b_{nt} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}b_{1t} + a_{n2}b_{2t} + \dots + a_{nn}b_{nt} = 0 \end{cases}$$

Como la matriz de los coeficientes A es singular, el sistema de incógnitas $b_{1t}, b_{2t}, \dots, b_{nt}$ tiene soluciones distintas de la trivial. Análogamente, $AB_1 = 0$, $AB_2 = 0, \dots$, que constituyen las distintas columnas de B, tienen también soluciones.

PROBLEMAS PROPUESTOS

10. Hallar todas las soluciones de los sistemas:

(a) $x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 1$

(b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 7x_2 - 7x_3 = 5 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

Sol. (a) $x_1 = 1 + 2a - b + 3c,\ x_2 = a,\ x_3 = b,\ x_4 = c$
(b) $x_1 = -7a/3 + 17/3,\ x_2 = 4a/3 - 5/3,\ x_3 = a$
(d) $x_1 = -x_2 = 1,\ x_3 = -x_4 = 2$

11. Hallar todas las soluciones no triviales de los sistemas:

(a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 7x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - 11x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$

Sol. (a) $x_1 = -3a,\ x_2 = 0,\ x_3 = a$
(b) $x_1 = -x_2 = -x_3 = a$
(d) $x_1 = -\frac{5}{8}a + \frac{3}{8}b,\ x_2 = a,\ x_3 = \frac{7}{4}a - \frac{5}{4}b,\ x_4 = b$

12. Poner de acuerdo la solución de 10(*d*) con otra dada por $x_1 = c$, $x_2 = d$, $x_3 = -\frac{10}{3}c - \frac{d}{3}$, $x_4 = \frac{8}{3}c + \frac{5}{3}d$.

13. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, hallar una matriz B de característica 2 de forma que $AB = 0$. *Ind.* Tomar las columnas de B de las soluciones de $AX = 0$.

14. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada sea singular es que sus líneas sean linealmente dependientes.

15. Sea $AX = 0$ un sistema homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas y supongamos que la característica de A sea $r = n - 1$. Demostrar que un vector no nulo cuyas componentes sean los adjuntos $[\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}]'$ de una fila de A es solución de $AX = 0$.

16. Resolver (teniendo en cuenta el Problema 15) los sistemas de ecuaciones:

$$(a)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}, \qquad (b)\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}; \qquad (c)\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Ind. Añadir a las ecuaciones de (*a*) la ecuación $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$, y hallar los adjuntos de los elementos de la tercera fila de $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Sol. (*a*) $x_1 = -27a$, $x_2 = 0$, $x_3 = 9a$ o $[3a, 0, -a]'$, (*b*) $[2a, -7a, -17a]'$, (*c*) $[11a, -2a, -4a]'$

17. Supongamos que la matriz de los coeficientes y la ampliada del sistema $AX = H$, de 3 ecuaciones con 5 incógnitas, tengan de característica 2, y que la forma canónica de la matriz ampliada sea

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b_{13} & b_{14} & b_{15} & c_1 \\ 0 & 1 & b_{23} & b_{24} & b_{25} & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en donde c_1 y c_2 son distintos de 0. Haciendo $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, se obtiene $X_1 = [c_1, c_2, 0, 0, 0]'$ como solución de $AX = H$. Haciendo $x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = 0$ y $x_3 = x_5 = 0$, $x_4 = 1$ y $x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 1$, se obtienen otras soluciones X_2, X_3 y X_4. Demostrar que estas $5 - 2 + 1 = 4$ soluciones son linealmente independientes.

18. Sea $Y = s_1X_1 + s_2X_2 + s_3X_3 + s_4X_4$ una combinación lineal de las soluciones del Problema 17. Demostrar que Y es una solución del sistema $AX = H$ si, y solo si, (*i*) $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 1$ y, por consiguiente, siendo s_1, s_2, s_3, s_4 arbitrarios, pero con la condición (*i*), Y es una solución completa del sistema $AX = H$.

19. Demostrar el Teorema VI. *Ind.* Razonar como en el Problema 17 con $c_1 = c_2 = 0$.

20. Demostrar que si A es una matriz de orden $m \times p$ y característica r_1, y B otra matriz de orden $p \times n$ y característica r_2 de manera que $AB = 0$, se verifica que $r_1 + r_2 \leqq p$. *Ind.* Aplicar el Teorema VI.

21. Mediante una matriz $A = [a_{ij}]$ de orden 4×5 y característica 2, comprobar que en una matriz A de orden $m \times n$ y característica r los determinantes de orden r formados con las columnas de una submatriz obtenida con r filas cualesquiera de A son proporcionales a los determinantes de orden r formados con otra submatriz cualquiera obtenida con r filas de A.
Ind. Suponer que las dos primeras filas son linealmente independientes de forma que $a_{3j} = p_{31}a_{1j} + p_{32}a_{2j}$, $a_{4j} = p_{41}a_{1j} + p_{42}a_{2j}$, $(j = 1, 2, \ldots, 5)$. Hallar los determinantes de segundo orden

$$\begin{vmatrix} a_{1q} & a_{1s} \\ a_{2q} & a_{2s} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{1q} & a_{1s} \\ a_{3q} & a_{3s} \end{vmatrix}, \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} a_{3q} & a_{3s} \\ a_{4q} & a_{4s} \end{vmatrix}$$

22. Escribir un ejemplo del teorema del Problema 21.

23. Teniendo en cuenta el Problema 7, demostrar que si la característica de la matriz cuadrada A de orden n es $n - 1$, entre sus adjuntos se verifican las relaciones siguientes:

$$(a)\quad \alpha_{ij}\,\alpha_{hk} = \alpha_{ik}\,\alpha_{hj}, \qquad (b)\quad \alpha_{ii}\,\alpha_{jj} = \alpha_{ij}\,\alpha_{ji}$$

siendo $(h, i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$.

24. Demostrar que $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ es equivalente de fila a $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Deducir, de $B = [A\ H]$, que el sistema de 6 ecuaciones lineales con 4 incógnitas tiene 5 ecuaciones linealmente independientes. Demostrar que un sistema de $m > n$ ecuaciones lineales con n incógnitas puede tener, como máximo, $n + 1$ ecuaciones linealmente independientes. Demostrar que cuando son $n + 1$, el sistema es incompatible.

25. Si el sistema $AX = H$ es compatible y de característica r, ¿para qué valores de r se puede resolver?

26. Generalizar los resultados de los Problemas 17 y 18 a un sistema no homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas cuyas matrices, de los coeficientes y ampliada, tienen la misma característica r para demostrar que si las matrices, de los coeficientes y ampliada, del sistema no homogéneo $AX = H$ de m ecuaciones con n incógnitas tienen la misma característica r y si $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r+1}$ son soluciones linealmente independientes del sistema, se verifica

$$X = s_1X_1 + s_1X_2 + \ldots + s_{n-r+1}X_{n-r+1}$$

siendo $\sum_{i=1}^{n-r+1} s_i = 1$, una solución completa.

27. En un cuadripolo eléctrico, entre la tensión E_1 y la intensidad I_1 de entrada y las correspondientes funciones de salida, E_2 e I_2, existe la relación

$$\begin{aligned} E_1 &= aE_2 + bI_2 \\ I_1 &= cE_2 + dI_2 \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{bmatrix} E_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} E_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Demostrar que $\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{c}\begin{bmatrix} a & -|A| \\ 1 & -d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} E_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{d}\begin{bmatrix} b & |A| \\ 1 & -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$

Despejar, asimismo, los valores E_2 e I_2, I_1 e I_2, I_1 y E_2.

28. Sabiendo que el sistema $AX = H$ con $H \neq 0$, de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene solución única, demostrar que el sistema $AX = K$ también tiene solución única cualquiera que sea el vector $K \neq 0$, de orden n.

29. Resolver el sistema de formas lineales $AX = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ poniendo las x_i en función de las y.

Escribir la solución del sistema $A'X = Y$.

30. Sea A una matriz cuadrada y regular de orden n y S_i la solución del sistema $AX = E_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, siendo E_i el vector de orden m cuya componente i es la unidad y las restantes son cero. Identificar la matriz $[S_1, S_2, \ldots, S_n]$.

31. Sea A una matriz de orden $m \times n$, con $m < n$, y S_i una solución del sistema $AX = E_i$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, siendo E_i el vector de orden m cuya componente i es la unidad y las restantes son cero. Llamando $K = [k_1, k_2, \ldots, k_m]'$, demostrar que

$$k_1S_1 + k_2S_2 + \cdots + k_mS_m$$

es una solución del sistema $AX = K$.

Capítulo 11

Espacios vectoriales

SISTEMAS CERRADOS RESPECTO DE UNA OPERACION. Mientras no se advierta lo contrario, siempre que hablemos de un vector nos referiremos a un vector columna. Para especificar sus componentes, escribiremos $[x_1, x_2, \ldots, x_n]'$. El símbolo (') indica que los elementos se disponen en columna (traspuesto del vector fila).

Un conjunto de vectores de orden n definidos sobre un cuerpo F es *cerrado respecto de la suma* cuando al aplicar esta operación a dos cualesquiera de ellos resulta otro vector que también pertenece al conjunto. Análogamente, un conjunto es *cerrado respecto de la multiplicación por un escalar*, cuando al aplicar esta operación a un vector cualquiera se obtiene otro vector perteneciente al conjunto.

Ejemplo 1. (*a*) El conjunto formado por todos los vectores $[x_1, x_2, x_3]'$ del espacio ordinario que tienen iguales sus componentes ($x_1 = x_2 = x_3$) es cerrado respecto de la suma y de la multiplicación por un escalar, ya que al sumar dos vectores cualesquiera de ellos y al multiplicar uno de ellos por un escalar k (real) se obtiene otro vector cuyas componentes son iguales (pertenece al conjunto).

(*b*) El conjunto formado por *todos* los vectores $[x_1, x_2, x_3]'$ del espacio ordinario es cerrado con respecto a la suma y a la multiplicación por un escalar.

ESPACIOS VECTORIALES. Un conjunto de vectores de orden n definidos sobre un cuerpo F que es cerrado respecto de la suma y de la multiplicación por un escalar se llama *espacio vectorial.* Por ejemplo, si $X_1, X_2, \ldots, X_m$ son vectores de orden n definidos sobre un cuerpo F, el conjunto formado por todas las combinaciones lineales

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_mX_m \qquad (k_i \text{ pertenece a } F) \tag{11.1}$$

es un espacio vectorial sobre F. Los dos conjuntos de vectores (*a*) y (*b*) del Ejemplo 1 son espacios vectoriales. Todo espacio vectorial (11.1) contiene al vector nulo de orden n; el vector nulo de orden n constituye de por sí un espacio vectorial. (El espacio (11.1) se llama también *espacio vectorial lineal.*)

El conjunto de *todos* los vectores $V_n(F)$ de orden n definidos sobre un cuerpo F se denomina *espacio vectorial de n dimensiones* sobre F.

SUBESPACIOS. Un conjunto V de vectores de $V_n(F)$ se llama *subespacio* de $V_n(F)$ si V es cerrado respecto de las operaciones suma y multiplicación por un escalar. Así, pues, el vector nulo de orden n es un subespacio de $V_n(F)$; el conjunto $V_n(F)$ es un subespacio de sí mismo. El conjunto (*a*) del Ejemplo 1 es un subespacio (recta) del espacio ordinario. En general, si los vectores $X_1, X_2, \ldots, X_m$ pertenecen al conjunto $V_n(F)$, el espacio formado por todas las combinaciones lineales (11.1) es un subespacio de $V_n(F)$.

Un espacio vectorial V está *generado* por los vectores $X_1, X_2, \ldots, X_m$ de orden n, cuando (*a*) todo X_i pertenece a V y (*b*) todo vector de V es una combinación lineal de la forma (11.1). Obsérvese que no se exige que los vectores $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sean linealmente independientes.

Ejemplo 2. Sea F el cuerpo R de los números reales y $X_1 = [1, 1, 1]'$, $X_2 = [1, 2, 3]'$, $X_3 = [1, 3, 2]'$ y $X_4 = [3, 2, 1]'$ vectores de tercer orden del espacio ordinario $S = V_3(R)$. Un vector cualquiera $[a, b, c]'$ de S se puede expresar por

$$y_1X_1 + y_2X_2 + y_3X_3 + y_4X_4 = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 2y_4 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 \end{bmatrix}$$

ya que el sistema de ecuaciones que resulta

$$\text{(i)} \qquad \begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 &= a \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 2y_4 &= b \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 &= c \end{aligned}$$

es compatible. Así, pues, los vectores X_1, X_2, X_3, X_4 generan el espacio S.

Los vectores X_1 y X_2 son linealmente independientes y generan un subespacio (el plano π) de S que contiene a todos los vectores $hX_1 + kX_2$, siendo h y k números reales.

El vector X_4 genera un subespacio (recta L) de S que contiene a todos los vectores hX_4, siendo h un número real.

Véase Problema 1.

BASE Y DIMENSION. Se llama dimensión de un espacio vectorial V al máximo número de vectores linealmente independientes, o lo que es igual, al mínimo número de vectores linealmente independientes necesarios para generar V. En geometría elemental se considera el espacio ordinario como un espacio tridimensional de puntos (a, b, c). Aquí lo trataremos como un espacio de vectores $[a, b, c]'$ de tercer orden. El plano π del Ejemplo 2 es bidimensional y la recta L unidimensional.

Un espacio vectorial de dimensión r formado por vectores de orden n definidos sobre un cuerpo F se representa por $V_n^r(F)$. Cuando $r = n$, en lugar de $V_n^n(F)$ escribiremos simplemente, $V_n(F)$.

Se denomina *base* de un espacio vectorial $V_n^r(F)$ todo conjunto de r vectores linealmente independientes. Cada vector del espacio se puede expresar mediante una combinación lineal *única* de los vectores de esta base. Todas las bases de $V_n^r(F)$ tienen, exactamente, el mismo número de vectores, pero cada una de ellas puede estar formada por r vectores cualesquiera siempre que sean linealmente independientes.

Ejemplo 3. El espacio S del Ejemplo 2 está generado por los vectores X_1, X_2, X_3, ya que un vector cualquiera $[a, b, c]'$ de S se puede expresar por

$$y_1X_1 + y_2X_2 + y_3X_3 = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + y_3 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones que resulta $\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = a \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 = b \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 = c \end{cases}$ a diferencia del sistema (i), tiene solución única. Los vectores X_1, X_2, X_3 forman la base de S. Los vectores X_1, X_2, X_4 no forman la base de S. (Demostrarlo) y generan el subespacio π del Ejemplo 2, cuya base es el conjunto X_1, X_2.

Los Teoremas I-V del Capítulo 9 también tienen aplicación aquí. En particular, el Teorema IV se puede establecer en los términos siguientes:

I. Si $X_1, X_2, \ldots, X_m$ son un conjunto de vectores definidos sobre un cuerpo F, y r es la característica de la matriz de sus componentes, de orden $n{\times}m$, se pueden elegir del conjunto r vectores linealmente independientes. Estos r vectores generan un espacio $V_n^r(F)$ al cual pertenecen los $m - r$ vectores restantes.

Véanse Problemas 2-3.

De gran aplicación son los teoremas siguientes:

II. Si $X_1, X_2, \ldots, X_m$ son $m < n$ vectores linealmente independientes de orden n del espacio $V_n(F)$, y $X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_n$ son $n - m$ vectores cualesquiera de $V_n(F)$ que con $X_1, X_2, \ldots, X_m$ forman un conjunto linealmente independiente, el constituido por los vectores $X_1, X_2, \ldots, X_n$ forman una base de $V_n(F)$.

Véase Problema 4.

III. Si $X_1, X_2, \ldots, X_m$ son $m < n$ vectores de orden n linealmente independientes definidos sobre un cuerpo F, los p vectores

$$Y_j = \sum_{i=1}^{m} s_{ij} X_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

son linealmente independientes si $p > m$ o bien si $p \leq m$, cuando la característica de $[s_{ij}]$ es $r < p$.

IV. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son vectores de orden n linealmente independientes definidos sobre un cuerpo F, la condición necesaria y suficiente para que los vectores,

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sean linealmente independientes es que la matriz $[a_{ij}]$ sea regular.

SUBESPACIOS IDENTICOS. La condición necesaria y suficiente para que dos subespacios, ${}_1V_n^r(F)$ y ${}_2V_n^r(F)$, de $V_n(F)$ sean idénticos es que cada vector de ${}_1V_n^r(F)$ pertenezca a ${}_2V_n^r(F)$, y recíprocamente, es decir, cuando cada uno de ellos es un subespacio del otro.

Véase Problema 5.

UNION E INTERSECCION DE DOS ESPACIOS. Sean $V_n^h(F)$ y $V_n^k(F)$ dos espacios vectoriales. Se denomina *unión* o *reunión* de ambos el conjunto total de vectores $X + Y$, siendo X un vector de $V_n^h(F)$ e Y uno de $V_n^k(F)$. Es evidente que, de esta forma, se obtiene un nuevo espacio vectorial que se llama *espacio unión* o *suma*, que se representa por $V_n^s(F)$. La dimensión s del espacio unión de dos espacios vectoriales no puede ser mayor que la suma de sus dimensiones.

Se llama *intersección* de dos espacios vectoriales el conjunto total de vectores comunes a ambos. Ahora bien, si X es un vector común a los dos espacios, también lo es el vector aX; igualmente, si X e Y son vectores comunes a ambos espacios, también lo es el vector $aX + bY$. Por tanto, la intersección de dos espacios vectoriales es un nuevo espacio vectorial que se llama *espacio intersección* y que se representa por $V_n^t(F)$. La dimensión del espacio intersección de dos espacios vectoriales no puede ser mayor que la menor de las dimensiones de cada uno de ellos.

V. Si $V_n^s(F)$ y $V_n^t(F)$ son los espacios unión e intersección de los espacios $V_n^h(F)$ y $V_n^k(F)$ se verifica, $h + k = s + t$.

Ejemplo 4. Consideremos los subespacios π_1 generado por X_1 y X_2 del Ejemplo 2, y π_2 generado por X_3 y X_4. Puesto que π_1 y π_2 no son idénticos (demostrarlo), y dado que los cuatro vectores generan el espacio S, el espacio unión de π_1 y π_2 es S.

Ahora bien, $4X_1 - X_2 = X_4$; por tanto, X_4 pertenece a π_1 y π_2. El subespacio (recta L) generado por X_4 es, pues, el espacio intersección de π_1 y π_2. Obsérvese que la dimensión, tanto de π_1 como de π_2 es igual a 2, la de S es 3 y la de L es 1, tal como indica el Teorema V.

Véanse Problemas 6-8.

NULIDAD DE UNA MATRIZ. Dado un sistema homogéneo de ecuaciones, $AX = 0$, los vectores solución X forman un espacio vectorial denominado *espacio nulo* de A. La dimensión de este espacio, que se representa por N_A, se llama *nulidad* de A.

Teniendo en cuenta el Teorema VI del Capítulo 10:

VI. Si N_A es la nulidad de A, el sistema homogéneo $AX = 0$ posee N_A soluciones, X_1,

$X_2, \ldots, X_{N_A}$, linealmente independiente de manera que toda solución de $AX = 0$ es combinación lineal de ellas, y toda combinación lineal de ellas es una solución.

Una base del espacio nulo de A es un conjunto cualquiera de N_A soluciones linealmente independientes del sistema $AX = 0$.

Véase Problema 9.

VII. Dada una matriz A de orden mxn, de característica r_A y nulidad N_A, se verifica:

$$r_A + N_A = n \tag{11.2}$$

LEYES DE LA NULIDAD DE SYLVESTER. Sean A y B dos matrices de orden n y características r_A y r_B, respectivamente; entonces, la característica y nulidad de su producto AB satisfacen las desigualdades

$$\begin{gathered} r_{AB} \geq r_A + r_B - n \\ N_{AB} > N_A, \quad N_{AB} > N_B \\ N_{AB} \leq N_A + N_B \end{gathered} \tag{11.3}$$

Véase Problema 10.

BASES Y COORDENADAS. Los vectores de orden n definidos sobre un cuerpo F,

$$E_1 = [1, 0, 0, \ldots, 0]' \quad E_2 = [0, 1, 0, \ldots, 0]', \quad \ldots, \quad E_n = [0, 0, 0, \ldots, 1]'$$

se llaman *elementales* o *unitarios*. El vector elemental E_j, cuya componente j es 1, es el vector unitario j-ésimo. Los vectores unitarios, $E_1, E_2, \ldots, E_n$, forman la base fundamental de $V_n(F)$.

Todo vector $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ de $V_n(F)$ se puede expresar de forma única mediante la combinación lineal

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \cdots + x_n E_n$$

de vectores unitarios. Las componentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de X se llaman *coordenadas* de X respecto de la base E. Mientras no se advierta lo contrario, supondremos que todo vector X está definido con respecto a esta base.

Llamando $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ otra base de $V_n(F)$, existen los escalares únicos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, pertenecientes a F, tales que

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i Z_i = a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + \cdots + a_n Z_n$$

Estos escalares son las coordenadas de X respecto de la base Z. Si $X_Z = [a_1, a_2, \ldots, a_n]'$ se tiene

$$X = [Z_1, Z_2, \ldots, Z_n]X_Z = Z \cdot X_Z \tag{11.4}$$

en la que Z es la matriz cuyas columnas son los vectores de la base $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$.

Ejemplo 5. Si $Z_1 = [2, -1, 3]'$, $Z_2 = [1, 2, -1]'$, $Z_3 = [1, -1, -1]'$ es una base de $V_3(F)$ y $X_Z = [1, 2, 3]'$ es un vector de $V_3(F)$ referido a esta base,

$$X = [Z_1, Z_2, Z_3]X_Z = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = [7, 0, -2]'$$

referido a la base E.

Véase Problema 11.

Sean $W_1, W_2, \ldots, W_n$ otra base de $V_n(F)$. Supongamos que $X_W = [b_1, b_2, \ldots, b_n]'$ de manera que

(11.5) $$X = [W_1, W_2, \ldots, W_n]X_W = W \cdot X_W$$

De (11.4) y (11.5), $X = Z \cdot X_Z = W \cdot X_W$, con lo que

(11.6) $$X_W = W^{-1} \cdot Z \cdot X_Z = PX_Z$$

siendo $P = W^{-1}Z$.

Por tanto,

VIII. Si las coordenadas de un mismo vector de $V_n(F)$ son X_Z y X_W con respecto a dos bases de $V_n(F)$, existe una matriz regular P, determinada exclusivamente por dichas bases y dada por (11.6), de forma que $X_W = PX_Z$.

Véase Problema 12.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. El conjunto de todos los vectores $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]'$, siendo $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, es un subespacio V de $V_4(F)$, ya que la suma de dos vectores cualesquiera del conjunto y el producto de un vector por un escalar arbitrario es igual a otro vector cuyas componentes suman cero y, por tanto, pertenece también al conjunto.

2. Como la característica de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ es igual a 2, los vectores $X_1 = [1, 2, 2, 1]'$, $X_2 = [3, 4, 4, 3]'$ y $X_3 = [1, 0, 0, 1]'$ son linealmente independientes y generan un espacio vectorial $V_4^2(F)$.

Dos vectores cualesquiera de los dados son linealmente independientes; en consecuencia, podemos tomar X_1 y X_2, X_1 y X_3 o X_2 y X_3 como base del espacio $V_4^2(F)$.

3. Como la característica de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ es igual a 2, los vectores $X_1 = [1, 1, 1, 0]'$, $X_2 = [4, 3, 2, -1]'$, $X_3 = [2, 1, 0, -1]'$ y $X_4 = [4, 2, 0, -2]'$ son linealmente independientes y generan un espacio $V_4^2(F)$.

La base puede estar formada por dos vectores cualesquiera de los dados, excepto por el par X_3, X_4.

4. Los vectores X_1, X_2, X_3 del Problema 2 pertenecen a un espacio $V_4^2(F)$. Hallar una base de dicho espacio.

La base de este espacio puede estar formada por $X_1, X_2, X_4 = [1, 0, 0, 0]'$ y $X_5 = [0, 1, 0, 0]'$ o bien $X_1, X_2, X_6 = [1, 2, 3, 4]'$ y $X_7 = [1, 3, 6, 8]', \ldots$, ya que la característica de las matrices $[X_1, X_2, X_4, X_5]$ y $[X_1, X_2, X_6, X_7]$ es igual a 4.

5. Sean $X_1 = [1, 2, 1]'$, $X_2 = [1, 2, 3]'$, $X_3 = [3, 6, 5]'$, $Y_1 = [0, 0, 1]'$, $Y_2 = [1, 2, 5]'$ vectores de $V_3(F)$. Demostrar que el espacio generado por X_1, X_2, X_3 y el generado por Y_1, Y_2 son idénticos.

Obsérvese, en primer lugar, que X_1 y X_2 son linealmente independientes, mientras que $X_3 = 2X_1 + X_2$. Por tanto, los vectores X_i generan un espacio de dos dimensiones. Sea éste ${}_1V_3^2(F)$. También los vectores Y_i generan un espacio de dos dimensiones, por ejemplo, ${}_2V_3^2(F)$.

Por otra parte, $Y_1 = \frac{1}{2}X_2 - \frac{1}{2}X_1$, $Y_2 = 2X_2 - X_1$; $X_1 = Y_2 - 4Y_1$; $X_2 = Y_2 - 2Y_1$. Luego todo vector $aY_1 + bY_2$ de ${}_2V_3^2(F)$ es un vector $(\frac{1}{2}a + 2b)X_2 - (\frac{1}{2}a + b)X_1$ de ${}_1V_3^2(F)$, y todo vector $cX_1 + dX_2$ de ${}_1V_3^2(F)$ es un vector $(c + d)Y_2 - (4c + 2d)Y_1$ de ${}_2V_3^2(F)$. En consecuencia, los dos espacios son idénticos.

6. (*a*) Si el vector $X = [x_1, x_2, x_3]'$ pertenece al espacio $V_3^2(F)$ generado por $X_1 = [1, -1, 1]'$ y $X_2 = [3, 4, -2]'$, se verifica:

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 3 \\ x_2 & -1 & 4 \\ x_3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0.$$

(*b*) Si $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]'$ pertenece al espacio $V_4^2(F)$ generado por $X_1 = [1, 1, 2, 3]'$ y $X_2 = [1, 0, -2, 1]'$, la característica de la matriz

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 2 & -2 \\ x_4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$ es igual a 2. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, se precisa que $\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$ y

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = x_1 + 2x_2 - x_4 = 0.$$

Estos problemas prueban que todo espacio $V_n^k(F)$ se puede determinar por el total de las soluciones, definidas sobre un cuerpo F, de un sistema homogéneo de $n - k$ ecuaciones lineales con n incógnitas linealmente independientes y definidas sobre dicho F.

7. Demostrar que si $V_n^s(F)$ y $V_n^t(F)$ son los espacios unión e intersección de los espacios vectoriales $V_n^h(F)$ y $V_n^k(F)$, se verifica: $h + k = s + t$.

Supongamos que $t = h$; entonces $V_n^h(F)$ es un subespacio de $V_n^k(F)$ y el espacio unión es el propio V_n^k. Por consiguiente, $s = k$, $t = h$ y $s + t = h + k$. Se deja para el alumno la demostración correspondiente al caso de $t = k$.

Supongamos ahora que $t < h$, $t < k$ y que $X_1, X_2, \ldots, X_t$ generan el espacio $V_n^t(F)$. Según el Teorema II, existen los vectores $Y_{t+1}, Y_{t+2}, \ldots, Y_h$ de forma que $X_1, X_2, \ldots, X_t, Y_{t+1}, \ldots, Y_h$ genera el espacio $V_n^h(F)$, y los vectores $Z_{t+1}, Z_{t+2}, \ldots, Z_k$ son tales que $X_1, X_2, \ldots, X_t, Z_{t+1}, \ldots, Z_k$ generan el espacio $V_n^k(F)$.

Supongamos ahora que existen dos escalares a y b de forma que

$$(11.4) \qquad \sum_{i=1}^{t} a_i X_i + \sum_{i=t+1}^{h} a_i Y_i + \sum_{i=t+1}^{k} b_i Z_i = 0 \qquad \text{o bien}$$

$$\sum_{i=1}^{t} a_i X_i + \sum_{i=t+1}^{h} a_i Y_i = \sum_{i=t+1}^{k} -b_i Z_i$$

El vector del primer miembro pertenece a $V_n^h(F)$ y el del segundo pertenece a $V_n^k(F)$, con lo que pertenecea a $V_n^t(F)$. Ahora bien, $X_1, X_2, \ldots, X_t$ generan $V_n^t(F)$; luego $a_{t+1} = a_{t+2} = \cdots = a_h = 0$.

$$\text{De (11.4)} \qquad \sum_{i=1}^{t} a_i X_i + \sum_{i=t+1}^{k} b_i Z_i = 0$$

Pero los vectores X y los vectores Z son linealmente independientes, con lo que $a_1 = a_2 = \cdots = a_t = b_{t+1} = b_{t+2} = \cdots = b_k = 0$; por consiguiente, los vectores X, los vectores Y y los vectores Z, constituyen un conjunto linealmente independiente y generan el espacio $V_n^s(F)$. En estas condiciones, $s = h + k - t$, como queríamos demostrar.

8. Consideremos el espacio ${}_1V_3^2(F)$ que tiene una base formada por los vectores $X_1 = [1, 2, 3]'$ y $X_2 = [1, 1, 1]'$ y el espacio ${}_2V_3^2(F)$ que tiene una base formada por $Y_1 = [3, 1, 2]'$ e $Y_2 = [1, 0, 1]'$.

Como la característica de la matriz de componentes $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ es igual a 3, el espacio unión es $V_3(F)$. En la base, se pueden tomar los vectores X_1, X_2 e Y_1.

Como $h + k = s + t$, el espacio intersección es $V_3^1(F)$. Para hallar una base no hay más que igualar las combinaciones lineales de los vectores en las bases de ${}_1V_3^2(F)$ y ${}_2V_3^2(F)$.

$$aX_1 + bX_2 = cY_1 + dY_2$$

Tomando $d = 1$ para mayor sencillez, y resolviendo $\begin{cases} a + b - 3c = 1 \\ 2a + b - c = 0 \\ 3a + b - 2c = 1 \end{cases}$ se obtiene $a = 1/3$, $b = -4/3$, $c = -2/3$.

Por tanto, $aX_1 + bX_2 = [-1, -2/3, -1/3]'$ es una base del espacio intersección. El vector $[3, 2, 1]'$ es también una base.

9. Hallar una base del espacio nulo de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

Consideremos el sistema de ecuaciones $AX = 0$ que se reduce a $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

Una base del espacio nulo de A es el par de soluciones linealmente independiente $[1, 2, 0, -1]'$ y $[2, 1, -1, 0]'$ de estas ecuaciones.

10. Demostrar que: $r_{AB} \geq r_A + r_B - n$.

Supongamos que A es de la forma $\begin{bmatrix} I_{r_A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Las r_A primeras filas de AB son las r_A primeras filas de B, mientras que las restantes filas están formadas por ceros. Según el Problema 10 del Capítulo 5, la característica de AB es $r_{AB} \geq r_A + r_B - n$.

Supongamos ahora que A no es de la forma anterior. Entonces, existen las matrices regulares P y Q de manera que PAQ si tiene dicha forma, mientras que la característica de $PAQB$ es, exactamente, igual a la de AB. (¿Por qué?)

El alumno puede considerar el caso particular cuando $B = \begin{bmatrix} I_{r_B} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

11. Sea $X = [1, 2, 1]'$ un vector en la base E. Hallar sus coordenadas respecto de otra base $Z_1 = [1, 1, 0]'$, $Z_2 = [1, 0, 1]'$ y $Z_3 = [1, 1, 1]'$.

Solución: (*a*). Escribimos

(i) $X = aZ_1 + bZ_2 + cZ_3$, de forma que $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Por tanto, $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a \quad + c = 2 \\ \quad b + c = 1 \end{cases}$, de donde $a = 0$, $b = -1$, $c = 2$. Así pues, respecto de la base Z se tiene $X_Z = [0, -1, 2]'$.

Solución: (*b*). Expresando (i) por $X = [Z_1, Z_2, Z_3]X_Z = ZX_Z$, se tiene:

$$X_Z = Z^{-1}X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [0, -1, 2]'$$

12. Sean X_Z y X_W las coordenadas de un mismo vector X respecto de las dos bases $Z_1 = [1, 1, 0]'$, $Z_2 = [1, 0, 1]'$, $Z_3 = [1, 1, 1]'$ y $W_1 = [1, 1, 2]'$, $W_2 = [2, 2, 1]'$, $W_3 = [1, 2, 2]'$. Hallar la matriz P de forma que $X_W = PX_Z$.

Se tiene $Z = [Z_1, Z_2, Z_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $W = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, y $W^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Por tanto, $P = W^{-1}Z = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, según (11.6).

PROBLEMAS PROPUESTOS

13. Sea $[x_1, x_2, x_3, x_4]'$ un vector cualquiera de $V_4(R)$, en donde R es el cuerpo de los números reales. ¿Cuáles de los ~~conjuntos siguientes son subespacios de~~ $V_4(R)$?

(*a*) Todos los vectores con $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.
(*b*) Todos los vectores con $x_1 = x_2$, $x_3 = 2x_4$.
(*c*) Todos los vectores con $x_4 = 0$.
(*d*) Todos los vectores con $x_1 = 1$.
(*e*) Todos los vectores con x_1, x_2, x_3, x_4 enteros.

Sol. Todos, excepto (*d*) y (*e*).

14. Demostrar que $[1, 1, 1, 1]'$ y $[2, 3, 3, 2]'$ forman una base del espacio $V_4^2(F)$ del Problema 2.

15. Hallar la dimensión del espacio vectorial generado por cada uno de los siguientes conjuntos de vectores. Elegir una base en cada uno de ellos.

(*a*) $[1, 2, 3, 4, 5]'$, $[5, 4, 3, 2, 1]'$, $[1, 1, 1, 1, 1]'$

(*b*) $[1, 1, 0, -1]'$, $[1, 2, 3, 4]'$, $[2, 3, 3, 3]'$

(*c*) $[1, 1, 1, 1]'$, $[3, 4, 5, 6]'$, $[1, 2, 3, 4]'$, $[1, 0, -1, -2]'$

Sol. (*a*), (*b*), (*c*), $r = 2$

16. (*a*) Demostrar que los vectores $X_1 = [1, -1, 1]'$ y $X_2 = [3, 4, -2]'$ generan el mismo espacio que $Y_1 = [9, 5, -1]'$ e $Y_2 = [-17, -11, 3]'$.
(*b*) Demostrar que los vectores $X_1 = [1, -1, 1]'$ y $X_2 = [3, 4, -2]'$ no generan el mismo espacio que $Y_1 = [-2, 2, -2]'$ e $Y_2 = [4, 3, 1]'$.

17. Demostrar que si el conjunto de vectores $X_1, X_2, \ldots, X_k$ es una base del espacio $V_n^k(F)$, cualquier vector Y del espacio se puede expresar como combinación lineal *única* de $X_1, X_2, \ldots, X_k$.

Ind. Suponer $Y = \sum_{i=1}^{k} a_i X_i = \sum_{i=1}^{k} b_i X_i$

18. Consideremos la matriz cuadrada de cuarto orden cuyas columnas son los vectores de una base del espacio $V_4^2(R)$ del Problema 2 y los de una base de $V_4^2(R)$ del Problema 3. Demostrar que la característica de la matriz es 4: por consiguiente, $V_4(R)$ es el espacio unión y $V_4^0(R)$, espacio nulo, corresponde a la intersección de los dos espacios dados.

19. Apoyándose en la demostración dada en el Problema 8 del Capítulo 10, demostrar el Teorema III.

20. Demostrar que el espacio generado por $[1, 0, 0, 0, 0]'$, $[0, 0, 0, 0, 1]'$, $[1, 0, 1, 0, 0]'$, $[0, 0, 1, 0, 0]'$, $[1, 0, 0, 1, 1]'$ y el generado por $[1, 0, 0, 0, 1]'$, $[0, 1, 0, 1, 0]'$, $[0, 1, -2, 1, 0]'$, $[1, 0, -1, 0, 1]'$, $[0, 1, 1, 1, 0]'$ son de dimensiones 4 y 3, respectivamente. Demostrar que $[1, 0, 1, 0, 1]'$ y $[1, 0, 2, 0, 1]'$ son una base del espacio intersección.

21. Hallar, con respecto a la base $Z_1 = [1, 1, 2]'$, $Z_2 = [2, 2, 1]'$, $Z_3 = [1, 2, 2]'$, las coordenadas de los vectores (*a*) $[1, 1, 0]'$, (*b*) $[1, 0, 1]'$, (*c*) $[1, 1, 1]'$.
Sol. (*a*) $[-1/3, 2/3, 0]'$, (*b*) $[4/3, 1/3, -1]'$, (*c*) $[1/3, 1/3, 0]'$.

22. Hallar, con respecto a la base $Z_1 = [0, 1, 0]'$, $Z_2 = [1, 1, 1]'$, $Z_3 = [3, 2, 1]'$, las coordenadas de los vectores (*a*) $[2, -1, 0]'$, (*b*) $[1, -3, 5]'$, (*c*) $[0, 0, 1]'$.
Sol. (*a*) $[-2, -1, 1]'$, (*b*) $[-6, 7, -2]'$, (*c*) $[-1/2, 3/2, -1/2]'$.

23. Sean X_Z y X_W las coordenadas de un vector X respecto de las bases que se indican. Hallar una matriz P de forma que $X_W = PX_Z$.

(*a*) $Z_1 = [1, 0, 0]'$, $Z_2 = [1, 0, 1]'$, $Z_3 = [1, 1, 1]'$; $W_1 = [0, 1, 0]'$, $W_2 = [1, 2, 3]'$, $W_3 = [1, -1, 1]'$

(*b*) $Z_1 = [0, 1, 0]'$, $Z_2 = [1, 1, 0]'$, $Z_3 = [1, 2, 3]'$; $W_1 = [1, 1, 0]'$, $W_2 = [1, 1, 1]'$, $W_3 = [1, 2, 1]'$

Sol. (*a*) $P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. (*b*) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

24. Demostrar que si P_j es una solución de $AX = E_j$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, $\sum_{i=1}^{n} h_j P_j$ es una solución de $AX = H$, siendo $H = [h_1, h_2, \ldots, h_n]'$.
Ind. $H = h_1E_1 + h_2E_2 + \cdots + h_nE_n$.

25. El espacio vectorial definido por todas las combinaciones lineales de las columnas de una matriz A se llama *espacio columna* de A, y el definido por todas las combinaciones lineales de las filas de A, *espacio fila* de A. Demostrar que las columnas de AB pertenecen al espacio columna de A y que las filas de AB pertenecen al espacio fila de B.

26. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que un sistema no homogéneo $AX = H$ de m ecuaciones con n incógnitas sea compatible es que el vector H pertenezca al espacio columna de A.

27. Hallar una base del espacio nulo de (*a*) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (*b*) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Sol. (*a*) $[1, -1, -1]'$, (*b*) $[1, 1, -1, -1]'$, $[1, 2, -1, -2]'$.

28. Demostrar: (*a*) $N_{AB} \geq N_A$, $N_{AB} \geq N_B$. (*b*) $N_{AB} \leq N_A + N_B$.
Ind. (*a*) $N_{AB} = n - r_{AB}$; $r_{AB} \leq r_A$ y r_B.
(*b*) Considerar $n - r_{AB}$ y aplicar el teorema del Problema 10.

29. Resolver el Problema 16 aplicando únicamente transformaciones de columna a la matriz $A = [X_1, X_2, Y_1, Y_2]$. A continuación resolver el Problema 5.

Capítulo 12

Transformaciones lineales

DEFINICION. Sean $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ e $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]'$ dos vectores cuyas componentes están referidas a la *misma* base del espacio. Supongamos que las coordenadas de X e Y vienen dadas por

$$(12.1)\qquad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

o más brevemente, $\qquad Y = AX$

siendo $A = [a_{ij}]$ una matriz definida sobre un cuerpo F. Entonces, las relaciones (12.1) son las de una transformación T, que aplicada a un vector X del espacio $V_n(F)$ lo convierte en otro Y del mismo espacio y que se llama *imagen* del primero.

Si (12.1) transforma X_1 en Y_1 y X_2 en Y_2,

(*a*) transforma kX_1 en kY_1, siendo k un escalar cualquiera, y

(*b*) transforma $aX_1 + bX_2$ en $aY_1 + bY_2$, siendo a y b dos escalares arbitrarios. Por esta razón, la transformación se llama *lineal*.

Ejemplo 1. Consideremos la transformación lineal $Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} X$ en el espacio ordinario $V_3(R)$.

(*a*) La imagen de $X = [2,0,5]'$ es $Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 27 \\ 17 \end{bmatrix} = [12, 27, 17]'$.

(*b*) El vector X cuya imagen es $Y = [2, 0, 5]'$ se obtiene resolviendo el sistema $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Puesto que $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 13/5 \\ 0 & 1 & 0 & 11/5 \\ 0 & 0 & 1 & -7/5 \end{bmatrix}$, $\quad X = [13/5, 11/5, -7/5]'$.

TEOREMAS FUNDAMENTALES. Si en (12.1) $X = [1, 0, \ldots, 0]' = E_1$, se tiene $Y = [a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}]'$ y, en general, si $X = E_j$, $Y = [a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}]'$. Por tanto,

I. Una transformación lineal (12.1) está determinada únicamente cuando se conocen las imágenes Y de los vectores de la base, siendo las columnas de A las coordenadas de las imágenes de dichos vectores. Véase Problema 1.

Una transformación lineal (12.1) se llama *regular* si las imágenes de diferentes vectores X_i son vectores distintos Y_i. En caso contrario, la transformación se denomina *singular*.

II. La condición necesaria y suficiente para que una transformación lineal (12.1) sea regular es que la matriz A de la transformación sea regular. Véase Problema 2.

III. Una transformación lineal regular transforma vectores linealmente independientes (dependientes) en vectores linealmente independientes (dependientes). Véase Problema 3.

Del Teorema III se deduce:

IV. La imagen de un espacio vectorial $V_n^k(F)$, respecto de una transformación regular (12.1), es un espacio vectorial $V_n^k(F)$, es decir, la dimensión del espacio vectorial es un invariante. En particular, la transformación es una aplicación de $V_n(F)$ en sí mismo.

Si la matriz A es regular, la inversa de (12.1),

$$X = A^{-1}Y$$

transforma el conjunto de vectores $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, cuyas componentes son las columnas de A, en los vectores en la base del espacio. Se trata, también, de una transformación lineal.

V. Los vectores unitarios E_i de $V_n(F)$ se pueden transformar en un conjunto de n vectores linealmente independientes de orden n mediante una transformación lineal regular, y recíprocamente.

VI. Si $Y = AX$ transforma un vector X en otro Y, $Z = BY$ transforma Y en Z y $W = CZ$ transforma Z en W, entonces $Z = BY = (BA)X$ transforman X en Z y $W = (CBA)X$ transforma X en W.

VII. Dados dos conjuntos cualesquiera de n vectores de orden n linealmente independientes existe una transformación lineal regular que transforma los vectores de un conjunto en los del otro.

CAMBIO DE BASE. Respecto de la base Z, sea $Y_Z = AX_Z$ una transformación lineal de $V_n(F)$. Supongamos que se cambia de base y llamemos X_W e Y_W las coordenadas de X_Z e Y_Z, respectivamente, en la nueva base. Por el Teorema VIII, Capítulo 11, existe una matriz P regular de forma que $X_W = PX_Z$ e $Y_W = PY_Z$ o bien haciendo $P^{-1} = Q$,

$$X_Z = QX_W \quad \text{y} \quad Y_Z = QY_W$$

Por tanto,

$$Y_W = Q^{-1}Y_Z = Q^{-1}AX_Z = Q^{-1}AQX_W = BX_W$$

en donde

$$B = Q^{-1}AQ \tag{12.2}$$

Si existe una matriz Q para la cual $B = Q^{-1}AQ$, las matrices A y B se llaman *semejantes*. Hemos demostrado, pues, que:

VIII. Si $Y_Z = AX_Z$, respecto de una base dada Z, es una transformación lineal de $V_n(F)$, e $Y_W = BX_W$ es la misma transformación lineal, pero referida a otra base W, las matrices A y B son semejantes.

Nota. Puesto que $Q = P^{-1}$, (12.2) se puede escribir en la forma $B = PAP^{-1}$. Más adelante se estudiarán las matrices semejantes. Allí escribiremos $B = R^{-1}AR$ en lugar de $B = SAS^{-1}$.

Ejemplo 2. Sea $Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} X$ una transformación lineal referida a la base E, y $W_1 = [1, 2, 1]'$, $W_2 = [1, -1, 2]'$, $W_3 = [1, -1, -1]'$ una nueva base. (*a*) Hallar las coordenadas de la imagen del vector $X = [3, 0, 2]'$ respecto de la base W. (*b*) Hallar la transformación lineal $Y_W = BX_W$ correspondiente a $Y = AX$. (*c*) Teniendo en cuenta el resultado del apartado (*b*), hallar la imagen Y_W de $X_W = [1, 3, 3]'$.

Se tiene $W = [W_1, W_2, W_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; de donde $W^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$.

(*a*) las coordenadas del vector $X = [3, 0, 2]'$ respecto de la base W son $X_W = W^{-1}X = [1, 1, 1]'$. La imagen de X es $Y = AX = [9, 5, 7]'$ que, referida a la base W, es $Y_W = W^{1}Y = [14/3, 20/9, 19/9]'$.

(*b*) $Y_W = W^{-1}Y = W^{-1}AX = (W^{-1}AW)X_W = BX_W = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 36 & 21 & -15 \\ 21 & 10 & -11 \\ -3 & 23 & -1 \end{bmatrix} X_W$

(*c*) $Y_W = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 36 & 21 & -15 \\ 21 & 10 & -11 \\ -3 & 23 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = [6.2.7]'$.

Véase Problema 5.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. (*a*) Hallar la transformación lineal $Y = AX$ que transforme E_1 en $Y_1 = [1, 2, 3]'$, E_2 en $Y_2 = [3, 1, 2]'$ y E_3 en $Y_3 = [2, 1, 3]'$.
(*b*) Hallar las imágenes de $X_1 = [1, 1, 1]'$, $X_2 = [3, -1, 4]'$ y $X_3 = [4, 0, 5]'$.
(*c*) Demostrar que X_1 y X_2, así como sus imágenes, son linealmente independientes.
(*d*) Demostrar que X_1, X_2 y X_3, así como sus imágenes, son linealmente independientes.

(*a*) Según el Teorema 1, $A = [Y_1, Y_2, Y_3]$; la ecuación de la transformación lineal es $Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} X$.

(*b*) La imagen de $X_1 = [1.1.1]'$ es $Y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [6.4.8]'$. La imagen de X_2 es $Y_2 = [8, 9, 19]'$, y la imagen de X_3 es $Y_3 = [14, 13, 27]'$.

(*c*) La característica de $[X_1, X_2] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ es 2, así como la de $[Y_1, Y_2] = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 9 \\ 8 & 19 \end{bmatrix}$. Por tanto, X_1 y X_2 y también sus imágenes, son linealmente independientes.

(*d*) Podemos comparar las características de $[X_1, X_2, X_3]$ e $[Y_1, Y_2, Y_3]$; sin embargo, como $X_3 = X_1 + X_2$ e $Y_3 = Y_1 + Y_2$, resulta que ambos conjuntos son linealmente dependientes.

2. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que una transformación lineal (12.1) sea regular es que la matriz A sea regular.

Supongamos que A es una matriz regular y que los transformados de $X_1 \neq X_2$ son $Y = AX_1 = AX_2$. En estas condiciones, $A(X_1 - X_2) = 0$, luego el sistema homogéneo de ecuaciones lineales $AX = 0$ tiene la solución no trivial $X = X_1 - X_2$. Esto es posible si, y solo si, $|A| = 0$, en contra de la hipótesis de que A es una matriz regular.

3. Demostrar que una transformación lineal regular transforma vectores linealmente independientes en vectores linealmente independientes.

Supongamos que las imágenes $Y_i = AX_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ de los vectores linealmente independientes $X_1, X_2, \ldots, X_p$, son linealmente dependientes. En estas condiciones, existirán unos escalares $s_1, s_2, \ldots, s_p$, no todos nulos, de forma que

$$\sum_{i=1}^{p} s_i Y_i = s_1Y_1 + s_2Y_2 + \cdots + s_pY_p = 0$$

o bien
$$\sum_{i=1}^{p} s_i(AX_i) = A(s_1X_1 + s_2X_2 + \cdots + s_pX_p) = 0$$

Como A es una matriz regular, $s_1X_1 + s_2X_2 + \cdots + s_pX_p = 0$. Pero esto es contrario a la hipótesis de que los vectores X_i son linealmente independientes. Por tanto, los vectores Y_i son linealmente independientes.

4. Cierta transformación lineal, $Y = AX$, transforma $X_1 = [1, 0, 1]'$ en $[2, 3, -1]'$, $X_2 = [1, -1, 1]'$ en $[3, 0, -2]'$ y $X_3 = [1, 2, -1]'$ en $[-2, 7, -1]'$. Hallar las imágenes de E_1, E_2, E_3 y escribir la ecuación de la transformación.

Sea $aX_1 + bX_2 + cX_3 = E_1$, se tiene $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ \quad -b + 2c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases}$, de donde $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = \frac{1}{2}$. Por tanto, $E_1 =$

$-\frac{1}{2}X_1 + X_2 + \frac{1}{2}X_3$ y su imagen es $Y_1 = -\frac{1}{2}[2, 3, -1]' + [3, 0, -2]' + \frac{1}{2}[-2, 7, -1]' = [1, 2, -2]'$. Análogamente, la imagen de E_2 es $Y_2 = [-1, 3, 1]'$ y la imagen de E_3 es $Y_3 = [1, 1, 1]'$. La ecuación de la transformación es

$$Y = [Y_1, Y_2, Y_3]X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} X$$

5. Sabiendo que $Y_Z = AX_Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} X_Z$ es una transformación lineal referida a la base Z del Problema 12, Capítulo 11, hallar la misma transformación $Y_W = BX_W$ referida a la base W de dicho problema.

Del Problema 12, Capítulo 11, $X_W = PX_Z = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} X_Z$. Por tanto,

$$X_Z = P^{-1}X_W = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} X_W = QX_W$$

e
$$Y_W = PY_Z = Q^{-1}AX_Z = Q^{-1}AQX_W = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 14 & -6 \\ 7 & 14 & 9 \\ 0 & -9 & 3 \end{bmatrix} X_W$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

6. En el Problema 1 demostrar que (*a*) la transformación es regular, (*b*) $X = A^{-1}Y$ transforma los vectores columna de A en vectores unitarios.

7. Aplicando la transformación del Problema 1, hallar (*a*) la imagen del vector $X = [1, 1, 2]'$, (*b*) el vector X cuya imagen es $[-2, -5, -5]'$.
Sol. (*a*) $[8, 5, 11]'$, (*b*) $[-3, -1, 2]'$.

8. Estudiar el efecto de las transformaciones $Y = IX$ e $Y = kIX$.

9. Establecer la transformación que convierte E_1 en $[1, 2, 3]'$, E_2 en $[3, 1, 2]'$ y E_3 en $[2, -1, -1]'$. Demostrar que la transformación es singular y que transforma los vectores linealmente independientes $[1, 1, 1]'$ y $[2, 0, 2]'$ en el mismo vector imagen.

10. Suponiendo que (12.1) es regular, demostrar que si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son linealmente dependientes, también lo son sus imágenes $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.

11. Aplicando el Teorema III, demostrar que la dimensión de un espacio vectorial es invariante respecto de una transformación regular.
Ind. Considerar las imágenes de una base de $V_n^h(F)$.

12. Dada la transformación lineal $Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} X$, demostrar que (*a*) es singular, (*b*) las imágenes de los vectores linealmente independientes $X_1 = [1, 1, 1]'$, $X_2 = [2, 1, 2]'$ y $X_3 = [1, 2, 3]'$ son linealmente dependientes, (*c*) la imagen de $V_3(R)$ es $V_3^2(R)$.

13. Dada la transformación lineal $Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} X$, demostrar que (*a*) es singular, (*b*) la imagen de todo vector del espacio $V_3^2(R)$ generado por $[1, 1, 1]'$ y $[3, 2, 0]'$ está situada en $V_3^1(R)$ generado por $[5, 7, 5]'$.

14. Demostrar el Teorema VII.
Ind. Sean X_i e Y_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ los conjuntos de vectores dados. La transformación $Z = AX$ transforma el conjunto X_i en E_i e $Y = BZ$ transforma E_i en Y_i.

15. Demostrar que los determinantes de dos matrices semejantes son iguales.

16. Sea $Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X$ una transformación lineal referida a la base E, y $Z_1 = [1, 1, 0]'$, $Z_2 = [1, 0, 1]'$, $Z_3 = [1, 1, 1]'$ una nueva base. Sabiendo que $X = [1, 2, 3]'$, respecto de la base E, demostrar:
(*a*) $Y = [14, 10, 6]'$ es la imagen de X respecto de la transformación.
(*b*) Las coordenadas de X respecto de la nueva base son $X_Z = [-2, -1, 4]'$ y las correspondientes de Y son $Y_Z = [8, 4, 2]'$.
(*c*) $X_Z = PX$ e $Y_Z = PY$, siendo $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [Z_1, Z_2, Z_3]^{-1}$.
(*d*) $Y_Z = Q^{-1}AQX_Z$, siendo $Q = P^{-1}$.

17. Dada la transformación lineal $Y_W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} X_W$, respecto a la base W: $W_1 = [0, -1, 2]'$, $W_2 = [4, 1, 0]'$,

$W_3 = [-2, 0, -4]'$. Hallar su representación respecto de la base Z; $Z_1 = [1, -1, 1]'$, $Z_2 = [1, 0, -1]'$, $Z_3 = [1, 2, 1]'$.

Sol. $Y_Z = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} X_Z$.

18. Si en la transformación lineal $Y = AX$, A es una matriz singular, el espacio nulo de A es el espacio vectorial cuyos vectores se transforman en el vector nulo. Hallar el espacio nulo de la transformación:

(*a*) del Problema 12, (*b*) del Problema 13, (*c*) $Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} X$.

Sol. (*a*) $V_3^1(R)$ generado por $[1, -1, 1]'$
(*b*) $V_3^1(R)$ generado por $[2, 1, -1]'$
(*c*) $V_3^2(R)$ generado por $[2, -1, 0]'$ y $[3, 0, -1]'$

19. Si $Y = AX$ transforma todo vector de un espacio vectorial V_n^h en un vector del mismo espacio, V_n^h se denomina *espacio invariante de la transformación*. Demostrar que en el espacio real $V_3(R)$ son invariantes los espacios vectoriales que se indican respecto de las transformaciones siguientes:

(*a*) $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} X$, V_3^1 generado por $[1, -1, 0]'$, V_3^1 generado por $[2, -1, -2]'$ y V_3^1 generado por $[1, -1, -2]'$.

(*b*) $Y = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} X$, V_3^1 generado por $[1, 1, 1]'$ y V_3^2 generado por $[1, 0, -1]'$ y $[2, -1, 0]'$. (Obsérvese que todo vector del espacio V_3^2 se transforma en sí mismo.)

(*c*) $Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{bmatrix} X$, V_4^1 generado por $[1, 1, 1, 1]'$.

20. Se considera la transformación lineal $Y = PX$: $y_i = x_{j_i}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, en la cual $j_1, j_2, \ldots, j_n$ es una permutación de los números $1, 2, \ldots, n$.

(*a*) Describir la *matriz de permutación* P.
(*b*) Demostrar que hay n matrices de permutación de orden n.
(*c*) Demostrar que si P_1 y P_2 son matrices de permutación, también lo son $P_3 = P_1P_2$ y $P_4 = P_2P_1$.
(*d*) Demostrar que si P es una matriz de permutación, también lo son P' y $PP' = I$.
(*e*) Demostrar que cada matriz de permutación P se puede expresar como producto de un número de matrices elementales columna $K_{12}, K_{23}, \ldots, K_{n-1,n}$.
(*f*) Sea $P = [E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_n}]$ en donde $i_1, i_2, \ldots, i_n$ es una permutación de los números $1, 2, \ldots, n$, y E_{i_j} los vectores unitarios de orden n. Deducir una regla (distinta de $P^{-1} = P'$) para escribir P^{-1}. Por ejemplo, para $n = 4$ y $P = [E_3, E_1, E_4, E_2]$, $P^{-1} = [E_2, E_4, E_1, E_3]$; para $P = [E_4, E_2, E_1, E_3]$, $P^{-1} = [E_3, E_2, E_4, E_1]$.

Capítulo 13

Vectores definidos sobre el cuerpo de los números reales

PRODUCTO INTERNO DE DOS VECTORES. En este capítulo, todos los vectores que se consideran están definidos sobre el cuerpo de los números reales, y $V_n(R)$ es el espacio de todos los vectores reales de orden n. Sean $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ e $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]'$ dos vectores pertenecientes a $V_n(R)$; su *producto interno* es, por definición,

$$(13.1) \qquad X \cdot Y \;=\; x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

Ejemplo 1. Dados los vectores $X_1 = [1,1,1]'$, $X_2 = [2,1,2]'$, $X_3 = [1,-2,1]'$:

(*a*) $X_1 \cdot X_2 \;=\; 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 \;=\; 5$

(*b*) $X_1 \cdot X_3 \;=\; 1\cdot 1 + 1(-2) + 1\cdot 1 \;=\; 0$

(*c*) $X_1 \cdot X_1 \;=\; 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \;=\; 3$

(*d*) $X_1 \cdot 2X_2 \;=\; 1\cdot 4 + 1\cdot 2 + 1\cdot 4 \;=\; 10 \;=\; 2(X_1 \cdot X_2)$

Nota. El producto interno también se define con frecuencia por

$$(13.1') \qquad X \cdot Y \;=\; X'Y \;=\; Y'X$$

La notación más práctica es $X'Y$ e $Y'X$; ahora bien, $X'Y$ e $Y'X$ son matrices de orden 1×1 (un número), mientras que $X \cdot Y$ es el elemento de la matriz. Con este convenio utilizaremos aquí la expresión (13.1'). Algunos autores representan $X \cdot Y$ por $X|Y$. En análisis vectorial de la física, el producto interno se llama *producto escalar*.

El producto interno o escalar, así definido, goza de las propiedades siguientes:

$$(13.2) \qquad \begin{array}{ll} (a) & X_1 \cdot X_2 = X_2 \cdot X_1, \qquad X_1 \cdot kX_2 = k(X_1 \cdot X_2) \\ (b) & X_1 \cdot (X_2 + X_3) \;=\; (X_2 + X_3) \cdot X_1 \;=\; X_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot X_3 \\ (c) & (X_1 + X_2) \cdot (X_3 + X_4) \;=\; X_1 \cdot X_3 + X_1 \cdot X_4 + X_2 \cdot X_3 + X_2 \cdot X_4 \end{array}$$

VECTORES ORTOGONALES. Dos vectores X e Y pertenecientes a $V_n(R)$ se llaman *ortogonales* cuando su producto interno es nulo. Los vectores X_1 y X_3 del Ejemplo 1 son ortogonales.

MODULO DE UN VECTOR. El módulo de un vector X perteneciente a $V_n(R)$ se representa por $\|X\|$ y es, por definición, la raíz cuadrada del producto interno del vector X por sí mismo; así, pues,

$$(13.3) \qquad \|X\| \;=\; \sqrt{X \cdot X} \;=\; \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Ejemplo 2. Del Ejemplo 1(*c*), $\|X_1\| = \sqrt{3}$.

Véanse Problemas 1-2.

Teniendo en cuenta (13.1) y (13.3) se puede demostrar que

(13.4) $$X \cdot Y = \tfrac{1}{4}\{\|X + Y\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|^2\}$$

Un vector X cuyo módulo sea la unidad, $\|X\| = 1$, se llama vector *unitario*. Por ello, a los vectores elementales E_i les hemos llamado vectores unitarios.

DESIGUALDAD DE SCHWARZ. Sean X e Y dos vectores pertenecientes a $V_n(R)$; entonces,

(13.5) $$|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$

es decir, el módulo del producto interno de dos vectores reales es igual, como máximo, al producto de sus módulos.

Véase Problema 3.

DESIGUALDAD DE MINKOMSKI. Sean X e Y dos vectores pertenecientes a $V_n(R)$; entonces

(13.6) $$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

ORTOGONALIDAD DE VECTORES Y ESPACIOS. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vectores no nulos de orden n, con $m \leq n$, y mutuamente perpendiculares, y $c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_mX_m = 0$; en estas condiciones, para $i = 1, 2, \ldots, m$, $(c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_mX_m) \cdot X_i = 0$. Esta condición implica que $c_i = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, m$; por tanto,

I. Todo conjunto de $m \leq n$ vectores no nulos de orden n mutuamente ortogonales es linealmente independiente y genera un espacio vectorial $V_n^m(R)$.

Un vector Y es ortogonal a un espacio vectorial $V_n^m(R)$ si es ortogonal a todo vector de dicho espacio.

II. Si un vector Y es ortogonal a cada uno de los vectores de orden n, $X_1, X_2, \ldots, X_m$ es ortogonal al espacio generado por ellos.

Véase Problema 4.

III. Si $V_n^h(R)$ es un subespacio de $V_n^k(R)$, siendo $k > h$, existe al menos un vector X de $V_n^k(R)$ que es ortogonal al espacio $V_n^h(R)$.

Véase Problema 5.

Como los vectores mutuamente ortogonales son linealmente independientes, un espacio vectorial $V_n^m(R)$, con $m > 0$, no puede contener más de m vectores mutuamente ortogonales. Supongamos que hemos encontrado $r < m$ vectores mutuamente ortogonales de un espacio $V_n^m(R)$, los cuales generan un espacio $V_n^r(R)$, que es un subespacio de $V_n^m(R)$. Según el Teorema III, existe al menos un vector de $V_n^m(R)$ que es ortogonal al espacio $V_n^r(R)$. Tenemos ya $r + 1$ vectores de $V_n^m(R)$ mutuamente ortogonales y, repitiendo el razonamiento, se llegaría a la conclusión siguiente:

IV. Todo espacio vectorial $V_n^m(R)$, con $m > 0$, contiene m, y solo m, vectores mutuamente ortogonales.

Dos espacios vectoriales son ortogonales si todo vector de uno de ellos es ortogonal a todos los del otro, y recíprocamente. Por ejemplo, el espacio generado por los vectores $X_1 = [1, 0, 0, 1]'$ y $X_2 = [0, 1, 1, 0]'$ es ortogonal al espacio generado por los vectores $X_3 = [1, 0, 0, -1]'$ y $X_4 = [0, 1, -1, 0]'$, ya que $(aX_1 + bX_2) \cdot (cX_3 + dX_4) = 0$, cualesquiera que sean los valores de a, b, c, d.

V. El conjunto de todos los vectores ortogonales a los de un espacio vectorial dado $V_n^k(R)$ constituye un espacio vectorial $V_n^{n-k}(R)$ único.

Véase Problema 6.

A todo vector $X \neq 0$ se le puede asociar un vector unitario U sin más que dividir las componentes de X por su módulo $\|X\|$. Esta operación se llama *normalización*. Por ejemplo, para normalizar el vector $X = [2, 4, 4]'$, se dividen cada una de sus componentes por su módulo $\|X\| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$, con lo que resulta el vector unitario $[1/3, 2/3, 2/3]'$.

Una base de un espacio $V_n^m(R)$ formada por dos vectores mutuamente ortogonales se llama *base ortogonal*; si estos vectores de la base son unitarios, la base se denomina *ortonormal*. Los vectores elementales o unitarios forman una base ortonormal del espacio $V_n(R)$.

Véase Problema 7.

METODO DE ORTOGONALIZACION DE GRAM-SCHMIDT. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_m$ los vectores de una base del espacio $V_n^m(R)$. Definiendo

$$Y_1 = X_1$$

$$Y_2 = X_2 - \frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$$

$$Y_3 = X_3 - \frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_m = X_m - \frac{Y_{m-1} \cdot X_m}{Y_{m-1} \cdot Y_{m-1}} Y_{m-1} - \cdots - \frac{Y_1 \cdot X_m}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$$

Los vectores unitarios $G_i = \dfrac{Y_i}{\|Y_i\|}$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ son mutuamente ortogonales y forman una base ortonormal de $V_n^m(R)$.

Ejemplo 3. Aplicando el método de Gram-Schmidt, hallar una base ortogonal del espacio $V_3(R)$, siendo una base del mismo la constituida por los vectores

$$X_1 = [1,1,1]', \quad X_2 = [1,-2,1]', \quad X_3 = [1,2,3]'$$

(i) $Y_1 = X_1 = [1,1,1]'$

(ii) $Y_2 = X_2 - \dfrac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 = [1,-2,1]' - \dfrac{0}{3} Y_1 = [1,-2,1]'$

(iii) $Y_3 = X_3 - \dfrac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \dfrac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 = [1,2,3]' - \dfrac{0}{6} Y_2 - \dfrac{6}{3} [1,1,1]' = [-1,0,1]'$

Los vectores $\quad G_1 = \dfrac{Y_1}{\|Y_1\|} = [1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]'$,

$$G_2 = \frac{Y_2}{\|Y_2\|} = [1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}]' \quad \text{y} \quad G_3 = \frac{Y_3}{\|Y_3\|} = [-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}]'$$

forman una base ortonormal de $V_3(R)$. Cada vector G_i es unitario, y cada uno de los productos $G_i \cdot G_j = 0$. Obsérvese que $Y_2 = X_2$, ya que X_1 y X_2 son vectores ortogonales.

Véase Problemas 8-9.

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_m$ una base de un espacio $V_n^m(R)$ y supongamos que $X_1, X_2, \ldots, X_s$, $(1 \leq s < m)$ son mutuamente ortogonales. Aplicando el método de Gram-Schmidt se puede hallar una base ortogonal, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, de dicho espacio en donde $Y_i = X_i$, $(i = 1, 2, \ldots, s)$, como fácilmente se puede demostrar. Por consiguiente,

VI. Si $X_1, X_2, \ldots, X_s$, $(1 \leq s < m)$ son vectores unitarios mutuamente ortogonales de un espacio $V_n^m(R)$, existen los vectores unitarios $X_{s+1}, X_{s+2}, \ldots, X_m$, en dicho espacio, de forma que el conjunto $X_1, X_2, \ldots, X_m$ constituye una base ortonormal.

MATRIZ DE GRAM. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_p$ un conjunto de vectores reales de orden n; la matriz de Gram correspondiente es, por definición,

$$(13.8)\qquad G = \begin{bmatrix} X_1 \cdot X_1 & X_1 \cdot X_2 & \ldots & X_1 \cdot X_p \\ X_2 \cdot X_1 & X_2 \cdot X_2 & \ldots & X_2 \cdot X_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_p \cdot X_1 & X_p \cdot X_2 & \ldots & X_p \cdot X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 & \ldots & X_1'X_p \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 & \ldots & X_2'X_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_p'X_1 & X_p'X_2 & \ldots & X_p'X_p \end{bmatrix}$$

Es evidente que la condición necesaria y suficiente para que los vectores dados sean mutuamente ortogonales es que G sea una matriz diagonal.

En el Problema 14, Capítulo 17, se demuestra el teorema siguiente:

VII. Para un conjunto de vectores reales de orden n, $X_1, X_2, \ldots, X_p$, $|G| \geq 0$. La desigualdad se cumple si, y solo si, los vectores son linealmente dependientes.

MATRICES ORTOGONALES. Una matriz cuadrada A se llama *ortogonal* si

$$(13.9)\qquad AA' = A'A = I$$

es decir, si

$$(13.9')\qquad A' = A^{-1}$$

De (13.9) se deduce que los vectores columna (fila) de una matriz ortogonal A son vectores unitarios mutuamente ortogonales.

Ejemplo 4. Del Ejemplo 3, $A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ es ortogonal.

Son fáciles de demostrar los teoremas siguientes:

VIII. Si la matriz cuadrada A de orden n es ortogonal, sus vectores columna (fila) forman una base ortonormal del espacio $V_n(R)$, y recíprocamente.

IX. La inversa y la traspuesta de una matriz ortogonal son matrices ortogonales.

X. El producto de dos o más matrices ortogonales es otra matriz ortogonal.

XI. El determinante de una matriz ortogonal vale ± 1.

TRANSFORMACIONES ORTOGONALES. Sea

$$(13.10)\qquad Y = AX$$

una transformación lineal en $V_n(R)$, y el par Y_1 e Y_2 las imágenes respectivas de X_1 y X_2. De (13.4) se deduce,

$$X_1 \cdot X_2 = \tfrac{1}{2}\{\|X_1 + X_2\|^2 - \|X_1\|^2 - \|X_2\|^2\}$$

y

$$Y_1 \cdot Y_2 = \tfrac{1}{2}\{\|Y_1 + Y_2\|^2 - \|Y_1\|^2 - \|Y_2\|^2\}$$

Comparando los primeros y segundos miembros se deduce que si la transformación (13.10) conserva los módulos, también conserva los productos internos, y recíprocamente. Por tanto,

XII. Una transformación lineal conserva los módulos si, y solo si, conserva los productos internos.

Una transformación lineal $Y = AX$ se llama *ortogonal* si su matriz A es ortogonal. En el Problema 10 se demuestra el teorema siguiente:

XIII. La condición necesaria y suficiente para que una transformación lineal conserve los módulos es que su matriz sea ortogonal.

Ejemplo 5. La transformación lineal $Y = AX = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} X$ es ortogonal. La imagen de

$X = [a, b, c]'$ es

$$Y = \left[\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{6}} - \frac{c}{\sqrt{2}},\ \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{2b}{\sqrt{6}},\ \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{6}} + \frac{c}{\sqrt{2}}\right]$$

y el módulo de ambos vectores es $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

XIV. Si la transformación (13.10) es una transformación de coordenadas de la base E a la base Z, esta última es ortonormal si, y solo si, A es una matriz ortogonal.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dados los vectores $X_1 = [1, 2, 3]'$ y $X_2 = [2, -3, 4]'$, hallar:
   (*a*) su producto interno, (*b*) el módulo de cada uno de ellos.

(*a*) $X_1 \cdot X_2 = X_1'X_2 = [1.2.3]\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1(2) + 2(-3) + 3(4) = 8$

(*b*) $\|X_1\|^2 = X_1 \cdot X_1 = X_1'X_1 = [1.2.3]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 14$, luego $\|X_1\| = \sqrt{14}$

$\|X_2\|^2 = 2(2) + (-3)(-3) + 4(4) = 29$, luego $\|X_2\| = \sqrt{29}$

2. (*a*) Demostrar que $X = [1/3, -2/3, -2/3]'$ e $Y = [2/3, -1/3, 2/3]'$ son ortogonales.
(*b*) Hallar un vector Z ortogonal a X e Y.

(*a*) $X \cdot Y = X'Y = [1/3, -2/3, -2/3]\begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = 0$, luego los vectores son ortogonales.

(*b*) Se escribe $[X, Y, 0] = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 0 \\ -2/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$ y se hallan los adjuntos $-2/3, -2/3, 1/3$ de los elementos de la columna de ceros. De (13.11) se deduce que $Z = [-2/3, -2/3, 1/3]'$ es ortogonal tanto a X como a Y.

3. Demostrar la desigualdad de Schwarz: Si X e Y son vectores del espacio $V_n(R)$ se verifica: $|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$.

Evidentemente, el teorema se cumple cuando o X o Y es un vector nulo. Supongamos, pues, que ninguno de ellos es cero. Entonces, si a es un número real,

$$\begin{aligned}
\|aX+Y\|^2 &= (aX+Y)\cdot(aX+Y) \\
&= [ax_1+y_1, ax_2+y_2, \ldots, ax_n+y_n]\cdot[ax_1+y_1, ax_2+y_2, \ldots, ax_n+y_n]' \\
&= (a^2x_1^2 + 2ax_1y_1 + y_1^2) + (a^2x_2^2 + 2ax_2y_2 + y_2^2) + \cdots + (a^2x_n^2 + 2ax_ny_n + y_n^2) \\
&= a^2\|X\|^2 + 2aX\cdot Y + \|Y\|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Ahora bien, la condición necesaria y suficiente para que un polinomio de segundo grado en a sea mayor o igual a cero para *todos* los valores reales de a es que su discriminante sea menor o igual a cero. Por consiguiente,

$$4(X\cdot Y)^2 - 4\|X\|^2\cdot\|Y\|^2 \leq 0$$

con lo que $$|X\cdot Y| \leq \|X\|\cdot\|Y\|$$

4. Demostrar que si un vector Y es ortogonal a cada uno de los vectores de orden n, $X_1, X_2, \ldots, X_m$ es ortogonal al espacio generado por ellos.

Todo vector generado por los vectores X se puede expresar por $a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_mX_m$. Por tanto,

$$(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_mX_m)\cdot Y = a_1X_1\cdot Y + a_2X_2\cdot Y + \cdots + a_mX_m\cdot Y = 0$$

ya que $X_i \cdot Y = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Así, pues, Y es ortogonal a todo vector del espacio y, por definición, lo es también a dicho espacio. En particular, si Y es ortogonal a todo vector de una base de un espacio vectorial, también lo es a dicho espacio.

5. Demostrar que si $V_n^h(R)$ es un subespacio de $V_n^k(R)$, con $k > h$, existe al menos un vector X de $V_n^k(R)$ que es ortogonal al espacio $V_n^h(R)$.

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_h$ una base del espacio $V_n^h(R)$, y X_{h+1} un vector de $V_n^k(R)$ que no pertenezca a $V_n^h(R)$. Consideremos el vector

(i) $$X = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_hX_h + a_{h+1}X_{h+1}$$

La condición para que X sea ortogonal a cada uno de los vectores $X_1, X_2, \ldots, X_h$ se expresa por un sistema homogéneo de h ecuaciones lineales

$$\begin{array}{lcl} a_1X_1\cdot X_1 + a_2X_2\cdot X_1 + \cdots + a_hX_h\cdot X_1 + a_{h+1}X_{h+1}\cdot X_1 & = & 0 \\ a_1X_1\cdot X_2 + a_2X_2\cdot X_2 + \cdots + a_hX_h\cdot X_2 + a_{h+1}X_{h+1}\cdot X_2 & = & 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_1X_1\cdot X_h + a_2X_2\cdot X_h + \cdots + a_hX_h\cdot X_h + a_{h+1}X_{h+1}\cdot X_h & = & 0 \end{array}$$

con $h+1$ incógnitas, $a_1, a_2, \ldots, a_{h+1}$. Según el Teorema IV, Capítulo 10, este sistema admite solución distinta de la trivial. Al sustituir estos valores en (i), se obtiene un vector no nulo X que es ortogonal a los vectores en la base del espacio $V_n^h(R)$ y, por tanto, a dicho espacio. (¿Por qué?)

6. Demostrar que el conjunto de todos los vectores ortogonales a los de un espacio $V_n^k(R)$ dado forman un espacio $V_n^{n-k}(R)$ único.

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_k$ una base del espacio $V_n^k(R)$. Los vectores X de orden n ortogonales a cada uno de los vectores X_i satisfacen al sistema homogéneo de ecuaciones

(i) $$X_1\cdot X = 0,\ X_2\cdot X = 0, \ldots, X_k\cdot X = 0$$

Como los vectores X_i son linealmente independientes, la característica de la matriz de los coeficientes del sistema (i) es igual a k; por tanto, hay $n-k$ soluciones (vectores) linealmente independientes que generan un espacio $V_n^{n-k}(R)$. (Véase Teorema VI, Capítulo 10.)

La unicidad se deduce del hecho de que el espacio intersección de los espacios $V_n^k(R)$ y $V_n^{n-k}(R)$ es el espacio nulo, con lo que el espacio unión es $V_n(R)$.

7. Hallar una base ortonormal del espacio $V_3(R)$, siendo $X = [1/\sqrt{6},\ 2/\sqrt{6},\ 1/\sqrt{6}]'$.

Obsérvese que X es un vector unitario. Tomemos otro vector unitario, $Y = [1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}]'$, de forma que $X\cdot Y = 0$. Como en el Problema 2(*a*), se deduce el tercer vector de la base $Z = [1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]'$.

8. Deducir las ecuaciones (13.7) de Gram-Schmidt.

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_m$ una base del espacio $V_n^m(R)$ y representemos por $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ el conjunto de vectores, mutuamente ortogonales, que se trata de hallar.

(*a*) Hacemos $Y_1 = X_1$

(*b*) Hacemos $Y_2 = X_2 + aY_1$ Puesto que Y_1 e Y_2 deben ser mutuamente ortogonales,

$$Y_1\cdot Y_2 = Y_1\cdot X_2 + Y_1\cdot aY_1 = Y_1\cdot X_2 + aY_1\cdot Y_1 = 0$$

de donde $a = -\dfrac{Y_1\cdot X_2}{Y_1\cdot Y_1}$ Luego $Y_2 = X_2 - \dfrac{Y_1\cdot X_2}{Y_1\cdot Y_1}Y_1$.

(*c*) Hacemos $Y_3 = X_3 + aY_2 + bY_1$. Puesto que Y_1, Y_2, Y_3 deben ser mutuamente ortogonales,

$$Y_1\cdot Y_3 = Y_1\cdot X_3 + aY_1\cdot Y_2 + bY_1\cdot Y_1 = Y_1\cdot X_3 + bY_1\cdot Y_1 = 0$$

e

$$Y_2\cdot Y_3 = Y_2\cdot X_3 + aY_2\cdot Y_2 + bY_2\cdot Y_1 = Y_2\cdot X_3 + aY_2\cdot Y_2 = 0$$

Por tanto, $a = -\dfrac{Y_2\cdot X_3}{Y_2\cdot Y_2}$, $b = -\dfrac{Y_1\cdot X_3}{Y_1\cdot Y_1}$, e $Y_3 = X_3 - \dfrac{Y_2\cdot X_3}{Y_2\cdot Y_2}Y_2 - \dfrac{Y_1\cdot X_3}{Y_1\cdot Y_1}Y_1$.

(*d*) Se continúa de esta forma hasta obtener Y_m.

9. Hallar una base ortonormal del espacio V_3 siendo una base del mismo la formada por los vectores $X_1 = [2, 1, 3]'$, $X_2 = [1, 2, 3]'$ y $X_3 = [1, 1, 1]'$.

Tomemos $Y_1 = X_1 = [2,1,3]'$. Entonces,

$$Y_2 = X_2 - \frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 = [1,2,3]' - \frac{13}{14}[2,1,3]' = [-6/7, 15/14, 3/14]'$$

$$Y_3 = X_3 - \frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$$

$$= [1,1,1]' - \frac{2}{9}\left[-\frac{6}{7}, \frac{15}{14}, \frac{3}{14}\right]' - \frac{3}{7}[2,1,3]' = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right]'$$

Normalizando los vectores Y se obtienen

$$[2/\sqrt{14}, 1/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14}]', \ [-4/\sqrt{42}, 5/\sqrt{42}, 1/\sqrt{42}]', \ [1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]'$$

que forman la base ortonormal pedida.

10. Demostrar que en una transformación lineal la condición necesaria y suficiente para que se conserven los módulos es que su matriz sea ortogonal.

Llamemos Y_1, Y_2 las imágenes de X_1, X_2 respecto de la transformación lineal $Y = AX$.

Supongamos que A es una matriz ortogonal de forma que $A'A = I$. Entonces,

(i) $$Y_1 \cdot Y_2 = Y_1' Y_2 = (X_1' A')(AX_2) = X_1' X_2 = X_1 \cdot X_2$$

y, según el Teorema XII, se conservan los módulos.

Recíprocamente, supongamos que se conservan los módulos (y también los productos internos). Entonces,

$$Y_1 \cdot Y_2 = X_1'(A'A)X_2 = X_1' X_2, \quad A'A = I$$

lo cual quiere decir que A es una matriz ortogonal.

PROBLEMAS PROPUESTOS

11. Dados los vectores $X_1 = [1, 2, 1]'$, $X_2 = [2, 1, 2]'$, $X_3 = [2, 1, -4]'$, hallar:

(*a*) El producto escalar de cada par.

(*b*) El módulo de cada vector.

(*c*) Un vector ortogonal a los vectores X_1, X_2; X_1, X_3.

Sol. (*a*) 6, 0, −3 (*b*) $\sqrt{6}, 3, \sqrt{21}$ (*c*) $[1, 0, -1]'$, $[3, -2, 1]'$

12. Comprobar (13.2) utilizando vectores cualesquiera de $V_3(R)$.

13. Demostrar (13.4).

14. Sea $X = [1, 2, 3, 4]'$ e $Y = [2, 1, -1, 1]'$ una base de un espacio $V_4^2(R)$, y $Z = [4, 2, 3, 1]'$ un vector de un espacio $V_4^3(R)$ al cual pertenecen los vectores X e Y.

(*a*) Demostrar que Z no pertenece al espacio $V_4^2(R)$.

(*b*) Suponiendo que $W = aX + bY + cZ$, hallar un vector W del espacio $V_4^3(R)$ ortogonal a los vectores X e Y.

15. (*a*) Demostrar que un vector de $V_n(R)$ es ortogonal a sí mismo si, y sólo si, se trata de un vector nulo.

(*b*) Demostrar que si X_1, X_2, X_3 constituyen un conjunto de vectores de orden n no nulos y linealmente dependientes, y se verifica que $X_1 \cdot X_2 = X_1 \cdot X_3 = 0$, los vectores X_2 y X_3 son linealmente dependientes.

16. Demostrar que un vector X es ortogonal a todo vector de un espacio $V_n^h(R)$ si, y solo si, es ortogonal a los vectores de una base del espacio.

17. Demostrar que si dos espacios $V_n^h(R)$ y $V_n^k(R)$ son ortogonales su intersección es el espacio $V_n^0(R)$.

18. Demostrar la desigualdad de Minkowski.
Ind. Demostrar que $\|X + Y\|^2 \leq (\|X\| + \|Y\|)^2$ aplicando la desigualdad de Schwarz.

19. Demostrar que $\|X + Y\| = \|X\| + \|Y\|$ si, y solo si, X e Y son linealmente dependientes.

20. Normalizar los vectores del Problema 11.
Sol. $[1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}]'$, $[2/3, 1/3, 2/3]'$, $[2/\sqrt{21}, 1/\sqrt{21}, -4/\sqrt{21}]'$

21. Demostrar que los vectores X, Y, Z del Problema 2 forman una base ortonormal del espacio $V_3(R)$.

22. (*a*) Demostrar que si $X_1, X_2, \ldots, X_m$ son linealmente independientes, también lo son los vectores unitarios obtenidos al normalizar aquéllos.
(*b*) Demostrar que si los vectores de (*a*) son vectores no nulos mutuamente ortogonales, también lo son los vectores unitarios obtenidos al normalizarlos.

23. Demostrar: (*a*) Si A es una matriz ortogonal y $|A| = 1$, cada uno de los elementos de A coincide con su adjunto en $|A|$.
(*b*) Si A es una matriz ortogonal y $|A| = -1$, cada uno de los elementos de A es igual al opuesto de su adjunto en $|A|$.

24. Demostrar los Teoremas VIII, IX, X, XI.

25. Demostrar que si A y B son dos matrices permutables y C es ortogonal, las matrices $C'AC$ y $C'BC$ conmutan.

26. Siendo A una matriz cuadrada de orden n, demostrar que AA' (o $A'A$) es una matriz diagonal si, y solo si, las líneas (filas o columnas) de A son ortogonales.

27. Demostrar que si X e Y son dos vectores de orden n, la matriz $XY' + YX'$ es simétrica.

28. Demostrar que si X e Y son dos vectores de orden n, y A es una matriz cuadrada de orden n, se verifica: $X \cdot (AY) = (A'X) \cdot Y$.

29. Demostrar que si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ forman una base ortonormal, y $X = \sum^n c_i X_i$, se verifica: (*a*) $X \cdot X_i = c_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$; (*b*) $X \cdot X = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2$.

30. Hallar una base ortonormal del espacio $V_3(R)$, siendo (*a*) $X_1 = [3/\sqrt{17}, -2/\sqrt{17}, 2/\sqrt{17}]'$; (*b*) $[3,0,2]'$
Sol. (*a*) X_1, $[0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]'$, $[-4/\sqrt{34}, -3/\sqrt{34}, 3/\sqrt{34}]'$
(*b*) $[3/\sqrt{13}, 0, 2/\sqrt{13}]'$, $[2/\sqrt{13}, 0, -3/\sqrt{13}]'$, $[0,1,0]'$

31. Hallar una base ortonormal del espacio $V_3(R)$ aplicando el método de Gram-Schmidt, tomando los vectores dados en orden:
(*a*) $[1,-1,0]'$, $[2,-1,-2]'$, $[1,-1,-2]'$
(*b*) $[1,0,1]'$, $[1,3,1]'$, $[3,2,1]'$
(*c*) $[2,-1,0]'$, $[4,-1,0]'$, $[4,0,-1]'$
Sol. (*a*) $[\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0]'$, $[\sqrt{2}/6, \sqrt{2}/6, -2\sqrt{2}/3]'$, $[-2/3, -2/3, -1/3]'$
(*b*) $[\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}]'$, $[0,1,0]'$, $[\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}]'$
(*c*) $[2\sqrt{5}/5, -\sqrt{5}/5, 0]'$, $[\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5, 0]'$, $[0,0,-1]'$

32. Hallar una base ortonormal del espacio $V_3(R)$, siendo $X_1 = [1, 1, -1]'$ y $X_2 = [2, 1, 0,]'$.
Ind. Tomar $Y_1 = X_1$ y hallar Y_2 por el método de Gram-Schmidt, e Y_3 por el método del Problema 2(*b*).
Sol. $[\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3]'$, $[\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}]'$, $[\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/3, -\sqrt{6}/6]'$

33. Hallar una base ortonormal del espacio $V_3(R)$, siendo $X_1 = [7, -1, -1]'$.

34. Demostrar por dos procedimientos que los vectores $[1, 2, 3, 4]'$, $[1, -1, -2, -3]'$ y $[5, 4, 5, 6]'$ son linealmente dependientes.

35. Demostrar que si A es una matriz hemisimétrica e $I + A$ es regular, la matriz $B = (I - A)(I + A)^{-1}$ es ortogonal.

36. Aplicar el Problema 35 para hallar la matriz ortogonal B, siendo

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \qquad (b)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Sol. $(a)\ \dfrac{1}{13}\begin{bmatrix} -12 & -5 \\ 5 & -12 \end{bmatrix}$ $\qquad (b)\ \dfrac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & -14 & 2 \\ -10 & -5 & -10 \\ 10 & 2 & -11 \end{bmatrix}$

37. Demostrar que si A es una matriz ortogonal y $B = AP$, siendo P una matriz regular, la matriz PB^{-1} es ortogonal.

38. En una transformación de coordenadas de la base E en la base ortonormal Z de matriz P, $Y = AX$ se transforma en $Y_1 = P^{-1}APX_1$, o sea, $Y_1 = BX_1$ (véase Capítulo 12). Demostrar que si A es ortogonal también lo es B, y recíprocamente. (Demostración del Teorema XIV.)

39. Demostrar que si A es una matriz ortogonal e $I + A$ es regular, la matriz $B = (I - A)(I + A)^{-1}$ es hemisimétrica.

40. El *producto vectorial* $X \times Y$ de dos vectores $X = [x_1, x_2, x_3]'$ e $Y = [y_1, y_2, y_3]'$ del espacio $V_3(R)$ es, por definición, el vector $Z = X \times Y = [z_1, z_2, z_3]'$, siendo $z_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$, $z_2 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$, $z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$. Identificar los componentes z_i con los adjuntos de los elementos de la tercera columna de $[X_1, Y_1, 0]$, y demostrar:

(*a*) El producto vectorial de dos vectores linealmente dependientes es el vector nulo.
(*b*) El producto vectorial de dos vectores linealmente dependientes es ortogonal a ambos vectores.
(*c*) $X \times Y = -(Y \times X)$.
(*d*) $(kX) \times Y = k(X \times Y) = X \times (kY)$, siendo k un escalar cualquiera.

41. Dados los cuatro vectores W, X, Y, Z del espacio $V_3(R)$, demostrar:

(*a*) $X \times (Y + Z) = X \times Y + X \times Z$

(*b*) $X \cdot (Y \times Z) = Y \cdot (Z \times X) = Z \cdot (X \times Y) = |XYZ|$

(*c*) $(W \times X) \cdot (Y \times Z) = \begin{vmatrix} W \cdot Y & W \cdot Z \\ X \cdot Y & X \cdot Z \end{vmatrix}$

(*d*) $(X \times Y) \cdot (X \times Y) = \begin{vmatrix} X \cdot X & X \cdot Y \\ Y \cdot X & Y \cdot Y \end{vmatrix}$

Capítulo 14

Vectores definidos sobre el cuerpo de los números complejos

NUMEROS COMPLEJOS. Sean x e y dos números reales e i la unidad definida por $i^2 = -1$. Todo número de la forma $z = x + iy$ se llama *número complejo*. El número real x es la *componente real* (o parte real), y el número real y, la *componente imaginaria* (o parte imaginaria) del complejo $x + iy$.

La condición necesaria y suficiente para que dos números complejos sean *iguales* es que tengan las mismas componentes real e imaginaria.

La condición necesaria y suficiente para que un número complejo sea nulo, $x + iy = 0$, es que $x = y = 0$.

El *conjugado* de un número complejo $z = x + iy$ es otro complejo $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$. La suma (producto) de un número complejo y su conjugado es un número real.

El *valor absoluto* $|z|$ del número complejo $z = x + iy$ es $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Se deduce de forma inmediata que para todo número complejo, $z = x + iy$, se verifica:

$$|z| \geq |x| \quad \text{y} \quad |z| \geq |y| \tag{14.1}$$

VECTORES. Sea X un vector de orden n definido sobre el cuerpo de los números complejos C. Todos los vectores así establecidos forman el espacio vectorial $V_n(C)$. Puesto que $V_n(R)$ es un subcuerpo, cada uno de los teoremas relativos al cuerpo de vectores $V_n(C)$ se podrá reducir de los correspondientes del Capítulo 13 para vectores sobre un cuerpo real.

Sean $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ e $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]'$ dos vectores de $V_n(C)$; el producto interno (o escalar) es, por definición,

$$X \cdot Y = \bar{X}'Y = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \cdots + \bar{x}_n y_n \tag{14.2}$$

El producto interno así definido goza de las siguientes propiedades:

(14.3)

(a) $X \cdot Y = \overline{Y \cdot X}$

(b) $(cX) \cdot Y = \bar{c}(X \cdot Y)$

(c) $X \cdot (cY) = c(X \cdot Y)$

(d) $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$

(e) $(Y + Z) \cdot X = Y \cdot X + Z \cdot X$

(f) $X \cdot Y + Y \cdot X = 2R(X \cdot Y)$ siendo $R(X \cdot Y)$ la componente real de $X \cdot Y$.

(g) $X \cdot Y - Y \cdot X = 2C(X \cdot Y)$ siendo $C(X \cdot Y)$ la componente imaginaria de $X \cdot Y$.

Véase Problema 1.

El *módulo* de un vector X viene dado por $\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_n\bar{x}_n}$. Dos vectores X e Y son *ortogonales* si $X \cdot Y = Y \cdot X = 0$.

Los vectores de $V_n(C)$ también cumplen la desigualdad de Minkowski,

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\| \tag{14.4}$$

así como la desigualdad de Schwarz (véase Problema 2),

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\| \tag{14.5}$$

Además (véanse Teoremas I-IV del Capítulo 13), se cumple:

I. Todo conjunto de m vectores no nulos de orden n definidos sobre el cuerpo C es linealmente independiente y, por tanto, genera un espacio vectorial $V_n^m(C)$.

II. Si un vector Y es ortogonal a cada uno de los vectores de orden n, $X_1, X_2, \ldots, X_m$, es ortogonal al espacio generado por dichos vectores.

III. Si $V_n^h(C)$ es un subespacio de $V_n^k(C)$, con $k > h$, existe al menos un vector X en $V_n^k(C)$ que es ortogonal al espacio $V_n^h(C)$.

IV. Todo espacio vectorial $V_n^m(C)$, $m > 0$ contiene m, y solo m, vectores mutuamente ortogonales.

Una base de $V_n^m(C)$ formada por vectores mutuamente ortogonales se llama *base ortogonal*. Si los vectores mutuamente ortogonales son unitarios, la base se denomina *ortonormal*.

METODO DE GRAM-SCHMIDT. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_m$ una base del espacio $V_n^m(C)$. Definimos

$$Y_1 = X_1$$

$$Y_2 = X_2 - \frac{\bar{Y}_1 \cdot X_2}{\bar{Y}_1 \cdot Y_1} Y_1$$

(14.6) $$Y_3 = X_3 - \frac{\bar{Y}_2 \cdot X_3}{\bar{Y}_2 \cdot Y_2} Y_2 - \frac{\bar{Y}_1 \cdot X_3}{\bar{Y}_1 \cdot Y_1} Y_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_m = X_m - \frac{\bar{Y}_{m-1} \cdot X_m}{\bar{Y}_{m-1} \cdot Y_{m-1}} Y_{m-1} - \cdots - \frac{\bar{Y}_1 \cdot X_m}{\bar{Y}_1 \cdot Y_1} Y_1$$

En estas condiciones, los vectores unitarios $G_i = \dfrac{Y_i}{\|Y_i\|}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, constituyen una base ortonormal de $V_n^m(C)$.

V. Dados los vectores unitarios $X_1, X_2, \ldots, X_s$, $(1 \leq s < m)$ mutuamente ortogonales del espacio $V_n^m(C)$, existen en él los vectores unitarios $X_{s+1}, X_{s+2}, \ldots, X_m$ (obtenidos por el método de Gram-Schmidt) de forma que $X_1, X_2, \ldots, X_m$ forman una base ortonormal.

MATRIZ DE GRAM. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_p$, un conjunto de vectores de orden n con elementos complejos. La matriz de *Gram* es, por definición,

(14.7) $$G = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \cdot X_1 & \bar{X}_1 \cdot X_2 & \cdots & \bar{X}_1 \cdot X_p \\ \bar{X}_2 \cdot X_1 & \bar{X}_2 \cdot X_2 & \cdots & \bar{X}_2 \cdot X_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{X}_p \cdot X_1 & \bar{X}_p \cdot X_2 & \cdots & \bar{X}_p \cdot X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1' X_1 & \bar{X}_1' X_2 & \cdots & \bar{X}_1' X_p \\ \bar{X}_2' X_1 & \bar{X}_2' X_2 & \cdots & \bar{X}_2' X_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{X}_p' X_1 & \bar{X}_p' X_2 & \cdots & \bar{X}_p' X_p \end{bmatrix}$$

Se deduce de forma inmediata que la condición necesaria y suficiente para que los vectores sean mutuamente ortogonales es que la matriz G sea diagonal.

En el Problema 14, Capítulo 17, se demuestra el teorema siguiente:

VI. Dado un conjunto de vectores de orden n con elementos complejos $X_1, X_2, \ldots, X_p$, el determinante $|G| \geq 0$. La igualdad se cumple si, y solo si, los vectores son linealmente dependientes.

MATRICES UNITARIAS. Una matriz cuadrada A de orden n se llama *unitaria* si $(\bar{A})'A = A(\bar{A})' = I$, es decir, si $(\bar{A})' = A^{-1}$. Los vectores columna (fila) de una matriz unitaria son vectores unitarios mutuamente ortogonales.

Paralelamente a los teoremas sobre matrices ortogonales, Capítulo 13, se tienen los siguientes:

VII. Los vectores columna (fila) de una matriz cuadrada unitaria de orden n forman una base ortonormal del espacio $V_n(C)$, y recíprocamente.

VIII. La inversa y la traspuesta de una matriz unitaria es otra matriz unitaria.

IX. El producto de dos o más matrices unitarias es otra matriz unitaria.

X. El valor absoluto del determinante de una matriz unitaria es la unidad.

TRANSFORMACIONES UNITARIAS. La transformación lineal

$$Y = AX \tag{14.8}$$

siendo A una matriz unitaria, se llama *transformación unitaria*.

XI. La condición necesaria y suficiente para que una transformación lineal conserve los módulos (y, por tanto, los productos internos) es que su matriz correspondiente sea unitaria.

XII. Sea $Y = AX$ una transformación de coordenadas de la base E en otra Z; la condición necesaria y suficiente para que la base Z sea ortonormal es que A sea una matriz unitaria.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Siendo $X = [1+i, -i, 1]'$ e $Y = [2+3i, 1-2i, i]'$,

(*a*) hallar $X \cdot Y$ y $Y \cdot X$ (*c*) comprobar que $X \cdot Y + Y \cdot X = 2R(X \cdot Y)$

(*b*) comprobar que $X \cdot Y = \overline{Y \cdot X}$ (*d*) comprobar que $X \cdot Y - Y \cdot X = 2C(X \cdot Y)$

(*a*) $X \cdot Y = \bar{X}'Y = [1-i, i, 1]\begin{bmatrix} 2+3i \\ 1-2i \\ i \end{bmatrix} = (1-i)(2+3i) + i(1-2i) + 1(i) = 7+3i$

$Y \cdot X = \bar{Y}'X = [2-3i, 1+2i, -i]\begin{bmatrix} 1+i \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} = 7-3i$

(*b*) De (*a*): $\overline{Y \cdot X}$, conjugado de $Y \cdot X$, es $7+3i = X \cdot Y$

(*c*) $X \cdot Y + Y \cdot X = (7+3i) + (7-3i) = 14 = 2(7) = 2R(X \cdot Y)$

(*d*) $X \cdot Y - Y \cdot X = (7+3i) - (7-3i) = 6i = 2(3i) = 2C(X \cdot Y)$

2. Demostrar la desigualdad de Schwarz: $|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$.

Como en el caso de vectores reales, la desigualdad se verifica si $X = 0$ o bien $Y = 0$. Sean X e Y dos vectores no nulos y a un número real; entonces,

$$\|aX+Y\|^2 = (aX+Y)\cdot(aX+Y) = a^2 X\cdot X + a(X\cdot Y + Y\cdot X) + Y\cdot Y = a^2\|X\|^2 + 2aR(X\cdot Y) + \|Y\|^2 \geq 0.$$

Ahora bien, la condición necesaria y suficiente para que una función de segundo grado en a sea positiva es que su discriminante sea negativo,

$$R(X \cdot Y)^2 - \|X\|^2\|Y\|^2 \leq 0, \quad \text{con lo que} \quad R(X \cdot Y) \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$

Si $X \cdot Y = 0$, se tiene $|X \cdot Y| = R(X \cdot Y) \leq \|X\| \cdot \|Y\|$. Si $X \cdot Y \neq 0$, definimos $c = \dfrac{X \cdot Y}{|X \cdot Y|}$.

Entonces, $R(cX \cdot Y) \leq \|cX\| \cdot \|Y\| = |c| \, \|X\| \cdot \|Y\| = \|X\| \cdot \|Y\|$, y según [14.3(b)], $R(cX \cdot Y) = R[\bar{c}(X \cdot Y)] = |X \cdot Y|$. Por tanto, $|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$ para todo X e Y.

3. Demostrar que $B = (\bar{A})'A$ es una matriz hermítica cualquiera que sea la matriz cuadrada A.

$(\bar{B})' = \{\overline{(\bar{A})'A}\}' = (\overline{A'\bar{A}}) = (\bar{A})'A = B$ con lo que B es hermítica.

4. Siendo $A = B + iC$ una matriz hermítica, demostrar que la condición necesaria y suficiente para que la matriz $(\bar{A})'A$ sea real es que B y C no conmuten.

Como $B + iC$ es hermítica $(\overline{B + iC})' = B + iC$; por tanto,

$$(\bar{A})'A = (\overline{B + iC})'(B + iC) = (B + iC)(B + iC) = B^2 + i(BC + CB) - C^2$$

Esta matriz es real si, y solo si, $BC + CB = 0$ o bien $BC = -CB$; en consecuencia, la condición es necesaria y suficiente si B y C son anticonmutativas.

5. Demostrar que si A es una matriz hemihermítica, $\pm iA$ es hermítica.

Consideremos $B = -iA$. Como A es hemihermítica, $(\bar{A})' = -A$. Por tanto,

$$(\bar{B})' = (\overline{-iA})' = i(\bar{A})' = i(-A) = -iA = B$$

con lo que B es una matriz hermítica. Se deja para el alumno el estudio del caso $B = iA$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

6. Dados los vectores $X_1 = [i, 2i, 1]'$, $X_2 = [1, 1+i, 0]'$ y $X_3 = [i, 1-i, 2]'$,
(a) hallar $X_1 \cdot X_2$ y $X_2 \cdot X_3$,
(b) hallar el módulo de cada vector X_i,
(c) demostrar que el vector $[1, -i, -1, 1-i]'$ es ortogonal a los vectores X_1 y X_2,
(d) hallar un vector ortogonal a X_1 y X_3.
Sol. (a) $2 - 3i, -i$ (b) $\sqrt{6}, \sqrt{3}, \sqrt{7}$ (d) $[-1 - 5i, i, 3 - i]$

7. Demostrar que $[1 + i, i, 1]'$, $[i, 1 - i, 0]'$ y $[1 - i, 1, 3i]'$ son linealmente independientes y mutuamente ortogonales.

8. Demostrar las relaciones (14.3).

9. Demostrar la desigualdad de Minkowski.

10. Demostrar los Teoremas I-IV.

11. Deducir las relaciones (14.6).

12. Teniendo en cuenta las relaciones (14.6) hallar una base ortogonal de $V_3(C)$ si los vectores son

(a) $[0, 1, -1]'$, $[1+i, 1, 1]'$, $[1-i, 1, 1]'$

(b) $[1+i, i, 1]'$, $[2, 1-2i, 2+i]'$, $[1-i, 0, -i]'$.

Sol. (a) $[0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}]'$, $[\frac{1}{2}(1+i), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]'$, $[-\frac{1}{\sqrt{2}}i, \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i), \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i)]'$

(b) $[\frac{1}{2}(1+i), \frac{1}{2}i, \frac{1}{2}]'$, $[\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1-5i}{4\sqrt{3}}, \frac{3+3i}{4\sqrt{3}}]'$, $[\frac{7-i}{2\sqrt{30}}, \frac{-5}{2\sqrt{30}}, \frac{-6+3i}{2\sqrt{30}}]'$

13. Demostrar que si A es una matriz definida sobre el cuerpo de los números complejos, todos los elementos de $A + \bar{A}$ son reales y todos los de la matriz $A - \bar{A}$ son imaginarios puros.

14. Demostrar el Teorema V.

15. Siendo A una matriz cuadrada de orden n, demostrar:
(a) $\bar{A}'A$ es diagonal si, y solo si, las columnas de A son vectores mutuamente ortogonales.
(b) $\bar{A}'A = I$ si, y solo si, las columnas de A son vectores unitarios mutuamente ortogonales.

16. Demostrar que si X e Y son dos vectores de orden n, y A una matriz cuadrada de orden n, se verifica: $X \cdot AY = \bar{A}'X \cdot Y$.

17. Demostrar los Teoremas VII-X.

18. Demostrar que si A es una matriz hemihermítica de forma que $I + A$ es regular, la matriz $B = (I - A)(I + A)^{-1}$ es unitaria.

19. Aplicar el Problema 18 para formar una matriz unitaria, siendo (a) $\begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ -1+i & i \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 0 & i & 1+i \\ i & 0 & i \\ -1+i & i & 0 \end{bmatrix}$.

Sol. (a) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1+2i & -4-2i \\ 2-4i & -2-i \end{bmatrix}$, (b) $\frac{1}{29}\begin{bmatrix} -9+8i & -10-4i & -16-18i \\ -2-24i & 1+12i & -10-4i \\ 4-10i & -2-24i & -9+8i \end{bmatrix}$

20. Demostrar que si A y B son dos matrices unitarias y del mismo orden, las matrices AB y BA son también unitarias.

21. Siguiendo el Problema 10, Capítulo 13, demostrar el Teorema XI.

22. Demostrar que si A es una matriz unitaria y hermítica, es involutiva.

23. Demostrar que $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+i) & i/\sqrt{3} & \frac{3+i}{2\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{2} & 1/\sqrt{3} & \frac{4+3i}{2\sqrt{15}} \\ \frac{1}{2} & -i/\sqrt{3} & \frac{5i}{2\sqrt{15}} \end{bmatrix}$ es unitaria.

24. Demostrar que si A es unitaria y $B = AP$, siendo P una matriz regular, PB^{-1} es unitaria.

25. Demostrar que si A es unitaria e $I + A$ es una matriz regular, $B = (I - A)(I + A)^{-1}$ es hemihermítica.

Capítulo 15

Congruencia

MATRICES CONGRUENTES. Dos matrices cuadradas A y B de orden n definidas sobre un cuerpo F se llaman congruentes, $\underset{\sim}{C}$, sobre F, si existe una matriz regular P de forma que

(15.1) $$B = P'AP$$

La congruencia es un caso particular de la equivalencia, con lo cual, dos matrices congruentes han de tener la misma característica.

Si la matriz P se expresa mediante un producto de matrices columna elementales, P' es igual al producto, en orden contrario, de las mismas matrices fila elementales; es decir, A y B son congruentes siempre que A se pueda reducir a B por medio de una sucesión de *pares* de transformaciones elementales constituidas por una transformación elemental de fila seguida de la misma transformación elemental de columna.

MATRICES SIMETRICAS. En el Problema 1 se demuestra el teorema siguiente:

I. Toda matriz simétrica A, definida sobre un cuerpo F, de característica r es congruente, sobre F, con una matriz diagonal cuyos r primeros elementos de la diagonal principal son distintos de cero y todos los demás son nulos.

Ejemplo 1. Hallar una matriz regular P de elementos racionales de forma que la matriz $D = P'AP$ sea diagonal, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 8 & 10 & -8 \end{bmatrix}$$

Para reducir A a D tenemos en cuenta la matriz $[A\ I]$ y hallamos de paso la matriz P'. Aplicamos, en primer lugar, las transformaciones $H_{21}(-2)$ y $K_{21}(-2)$; a continuación, $H_{31}(-3)$ y $K_{31}(-3)$ y, finalmente, $H_{41}(-2)$ y $K_{41}(-2)$; de esta manera se anulan los elementos de la primera fila y de la primera columna excepto el de la diagonal principal. Se consigue una gran simplificación efectuando primero las tres transformaciones de fila y, acto seguido, las tres correspondientes de columna. Si A no se transforma en una matriz simétrica, es debido a que se ha cometido algún error.

$$[A\ H] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 10 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -12 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -10 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -10 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$= [D\ P']$$

Por tanto,
$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz D, reducida de A, no es única. Mediante otras transformaciones, como por ejemplo, $H_3(\frac{1}{2})$ y $K_3(\frac{1}{2})$, la matriz D pasa a ser la matriz diagonal $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, y si se aplican las transformaciones $H_2(3)$ y $K_2(3)$ se obtiene $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. No existe, sin embargo, un par de transformaciones racionales o reales mediante las cuales se pueda sustituir D por una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal sean nulos o positivos.

MATRICES SIMETRICAS REALES. Supongamos que se reduce, mediante transformaciones elementales reales, la matriz simétrica real A a una matriz diagonal D congruente, es decir, $P'AP = D$. Así como los elementos no nulos de la diagonal de D dependen de A y P, según veremos en el Capítulo 17, el número de elementos positivos distintos de cero en dicha diagonal depende únicamente de A.

Por medio de una sucesión de transformaciones elementales de la misma fila y columna del tipo 1, los elementos de la diagonal de D se pueden ordenar de manera que los elementos positivos precedan a los negativos y, aplicando seguidamente otra sucesión de transformaciones reales de la misma fila y columna del tipo 2, se puede reducir la matriz diagonal a otra en la cual los elementos distintos de cero sean $+1$ o bien -1. Por consiguiente,

II. Una matriz simétrica real de característica r es congruente, sobre el cuerpo de los números reales, con una matriz canónica de la forma

$$C = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{15.2}$$

El entero p de (15.2) se llama *indice* de la matriz y $s = p - (r - p)$ recibe el nombre de *signatura*.

Ejemplo 2. Aplicando las transformaciones H_{23}, K_{23} y $H_2(\frac{1}{2})$, $K_2(\frac{1}{2})$ al resultado del Ejemplo 1 se obtiene

$$[A \mid I] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -10 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] = [C \mid Q']$$

de donde $Q'AQ = C$. Por tanto, la caracteristica r de A es 3, el indice $p = 2$ y la signatura $s = 1$.

III. Dos matrices cuadradas de orden n simétricas y reales son congruentes sobre el cuerpo de los números reales si, y solo si, tienen la misma característica y el mismo índice, esto es, si tienen iguales característica y signatura.

Sobre el cuerpo de los números reales, el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n del tipo (15.2) forman un conjunto canónico, respecto de la congruencia, con las matrices cuadradas simétricas reales de orden n.

SOBRE EL CUERPO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS se verifica:

IV. Toda matriz cuadrada de orden n simétrica y compleja de característica r es congruente, sobre el cuerpo de los números complejos, con una matriz canónica de la forma,

$$C = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{15.3}$$

Ejemplo 3. Aplicando las transformaciones $H_3(i)$ y $K_3(i)$ al resultado del Ejemplo 2 se obtiene

$$[A \mid I] \; \underset{\sim}{C} \; \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \; \underset{\sim}{C} \; \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] = [D \mid R']$$

de donde $R'AR = D = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Véanse Problemas 2-3.

V. La condición necesaria y suficiente para que dos matrices cuadradas de orden n simétricas y complejas sean congruentes sobre el cuerpo de los números reales es que tengan la misma característica.

MATRICES HEMISIMETRICAS. Si A es una matriz hemisimétrica, se verifica:

$$(P'AP)' = P'A'P = P'(-A)P = -P'AP$$

Por tanto,

VI. Toda matriz $B = P'AP$ congruente con una matriz hemisimétrica A es también hemisimétrica.

En el Problema 4 se demuestra el teorema siguiente:

VII. Toda matriz A cuadrada de orden n hemisimétrica definida sobre F es congruente, sobre dicho cuerpo F, con una matriz canónica de la forma

$$B = \operatorname{diag}(D_1, D_2, \ldots, D_t, 0, \ldots, 0) \tag{15.4}$$

siendo $D_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $(i = 1, 2, \ldots, t)$. La característica de A es $r = 2t$.

Véase Problema 5.

VIII. Dos matrices cuadradas y hemisimétricas definidas sobre un cuerpo F son congruentes sobre dicho cuerpo si, y solo si, tienen la misma característica.

El conjunto de todas las matrices del tipo (15.4) forman un conjunto canónico congruente con las matrices hemisimétricas cuadradas de orden n.

MATRICES HERMITICAS. Dos matrices cuadradas de orden n hermíticas, A y B, son *congruentes en sentido hermítico* $[\underset{\sim}{HC}]$, o *conjuntivas*, si existe una matriz regular P tal que

$$B = \bar{P}'AP \tag{15.5}$$

Por consiguiente,

IX. Dos matrices cuadradas hermíticas de orden n son congruentes en sentido hermítico (conjuntivas) si, y solo si, una de ellas se puede obtener a partir de la otra por medio de una sucesión de pares de transformaciones elementales formadas cada una de ellas por una transformación de columna y la correspondiente transformación de fila conjugada.

X. Una matriz hermítica A de característica r es congruente en sentido hermítico con una matriz canónica de la forma

$$(15.6) \qquad C = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El entero p de (15.6) se llama *índice* de A y $s = p - (r - p)$ recibe el nombre de *signatura*.

XI. Dos matrices cuadradas y hermíticas de orden n son congruentes en sentido hermítico (conjuntivas), si, y solo si, tienen iguales característica e índice o bien la misma característica e igual signatura.

La reducción de una matriz hermítica a la forma canónica (15.6) se efectúa aplicando el método que se indica en el Problema 1 mediante una elección adecuada de los pares de transformaciones elementales. El caso dudoso se considera en el Problema 7.

Véanse Problemas 6-7.

MATRICES HEMIHERMITICAS. Sea A una matriz hemihermítica; entonces,

$$(\overline{\bar{P}'AP})' = (\bar{P}'\bar{A}'\bar{P}) = -\bar{P}'AP$$

Por tanto,

XII. Toda matriz $B = \bar{P}'AP$ congruente en sentido hermítico, o conjuntiva, con una matriz hemihermítica A es también hemihermítica.

Según el Problema 5, Capítulo 14, la matriz $H = -iA$ es hermítica si la matriz A es hemihermítica. Del Teorema X se deduce que existe una matriz regular P tal que

$$\bar{P}'HP = C = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, $i\bar{P}'HP = i\bar{P}'(-iA)P = \bar{P}'AP = iC$, con lo cual

$$(15.7) \qquad B = \bar{P}'AP = \begin{bmatrix} iI_p & 0 & 0 \\ 0 & -iI_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

XIII. Toda matriz A cuadrada y hemihermítica de orden n es congruente en sentido hermítico o conjuntiva con una matriz (15.7), en la cual r es la característica de A y p es el índice de $-iA$.

XIV. Dos matrices cuadradas de orden n y hemihermíticas, A y B, son congruentes en sentido hermítico o conjuntivas si, y solo si, tienen la misma característica y, además, $-iA$ y $-iB$ son de igual índice.

Véase Problema 8.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demostrar que toda matriz simétrica de característica r definida sobre un cuerpo F se puede reducir a una matriz diagonal que tiene, exactamente, r elementos de su diagonal principal que son distintos de cero.

Supongamos que la matriz simétrica $A = [a_{ij}]$ no es diagonal. Si $a_{11} \neq 0$ podemos reducir la matriz A, mediante una sucesión de pares de transformaciones elementales del tipo 3 (una transformación de fila seguida de la misma transformación de columna) a la matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Supongamos que, siguiendo este proceso con $b_{22}, c_{33}, \ldots$, distintos de cero, llegamos a la matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{ss} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & k_{s+1,s+2} \;\cdots & k_{s+1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{s+2,s+1} & k_{s+2,s+2} \;\cdots & k_{s+2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{n,s+1} & k_{n,s+2} \;\cdots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

en la cual el elemento diagonal $k_{s+1,s+1} = 0$. Si todo $k_{ij} = 0$, hemos demostrado el teorema con $s = r$. Si alguno de los k_{ij}, por ejemplo $k_{s+u,s+v} \neq 0$, lo podemos pasar a la posición $(s+1, s+1)$ mediante una transformación de fila y otra de columna del tipo 1 para $u = v$; de otra forma, podemos sumar la fila $(s+u)$ con la fila $(s+v)$ y, después de aplicar la transformación de columna correspondiente, tendremos un elemento diagonal distinto de cero. (Cuando $a_{11} = 0$ se procede como en el caso anterior de $k_{s+1,s+1} = 0$.)

Como hemos pasado por una sucesión de matrices equivalentes, A se reduce, finalmente, a una matriz diagonal cuyos r primeros elementos de su diagonal principal son distintos de cero mientras que todos los demás son nulos.

2. Reducir la matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ a la forma canónica (15.2) y a la forma canónica (15.3).

Obtener, en cada caso, la matriz P que efectúa la reducción.

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$= [D \mid P_1']$$

Para deducir (15.2) se tiene

$$[D \mid P_1'] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] = [C \mid P']$$

con lo que
$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2\sqrt{2} & -2 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Para deducir (15.3) se tiene
$$[D \mid P_1'] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2i & -i & 0 \end{array}\right] = [C \mid P']$$

con lo que
$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2\sqrt{2} & 2i \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -i \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

3. Hallar una matriz regular P de forma que $P'AP$ esté en la forma canónica (15.3), siendo
$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ i & 0 & 2-i \\ 1+i & 2-i & 10+2i \end{bmatrix}$$

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 1+i & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 2-i & 0 & 1 & 0 \\ 1+i & 2-i & 10+2i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3-2i & -i & 1 & 0 \\ 0 & 3-2i & 10 & -1-i & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5+12i & 1+2i & -3+2i & 1 \end{array}\right] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7+4i}{13} & \frac{-5+12i}{13} & \frac{3-2i}{13} \end{array}\right]$$

$$= [C \mid P']$$

con lo que
$$P = \begin{bmatrix} 1 & -i & \frac{7+4i}{13} \\ 0 & 1 & \frac{-5+12i}{13} \\ 0 & 0 & \frac{3-2i}{13} \end{bmatrix}$$

4. Demostrar que toda matriz cuadrada A de orden n hemisimétrica, definida sobre un cuerpo F, de característica $2t$ es congruente, sobre F, con una matriz
$$B = \operatorname{diag}(D_1, D_2, \ldots, D_t, 0, \ldots, 0)$$
siendo $D_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $(i = 1, 2, \ldots, t)$.

Si $A = 0$, entonces, $B = A$. Por el contrario, si $A \neq 0$, algún $a_{ij} = -a_{ji} \neq 0$. Permutando la fila i con la primera y la fila j con la segunda y, a continuación, la columna i con la primera y la columna j con la segunda, se sustituye A por la matriz hemisimétrica $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & a_{ij} & E_2 \\ -a_{ij} & 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{E_3} & E_4 \end{array}\right]$ Multip[illegible]o ahora la primera fila y la primera columna por $1/a_{ij}$ se obtiene $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & F_2 \\ -1 & 0 & \\ \hline F_3 & & E_4 \end{array}\right]$ y de ésta, por transformaciones elementales de fila y columna del tipo 3,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \\ \hline 0 & & F_4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & F_4 \end{bmatrix}$$

Si $F_4 = 0$, la reducción ha terminado; si no fuera así, se continúa el proceso con F_4 hasta llegar a B.

5. Hallar una matriz regular P de forma que $P'AP$ esté en la forma canónica (15.4), siendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ -4 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $a_{13} \neq 0$, solo necesitamos permutar la tercera fila con la segunda y, a continuación, la tercera columna con la segunda en $\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ para obtener $\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

Ahora, multiplicamos la primera fila y la primera columna por $\frac{1}{2}$ y luego se reducen a cero todos los demás elementos de las dos primeras filas y de las dos primeras columnas.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{y} \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Multiplicando, finalmente, la tercera fila y la tercera columna por $-1/5$ resulta

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/10 & -1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} P'$$

Por consiguiente, si $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/10 & -1 \\ 0 & 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $P'AP = \text{diag}(D_1, D_2)$.

6. Hallar una matriz regular P de manera que $\bar{P}'AP$ sea una forma canónica del tipo (15.6), siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & -3+2i \\ 1+i & 2 & -i \\ -3-2i & i & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1-i & -3+2i & 1 & 0 & 0 \\ 1+i & 2 & -i & 0 & 1 & 0 \\ -3-2i & i & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1-i & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -13 & 3+2i & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{25}{13} & 0 & \frac{2-3i}{13} & 1 & \frac{5}{13} \\ 0 & 0 & -13 & 3+2i & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2-3i}{5\sqrt{13}} & \frac{13}{5\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{13}} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3+2i}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{13}} \end{array}\right]$$

$$= [C \mid \overline{P}']$$

con lo que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2+3i}{5\sqrt{13}} & \frac{3-2i}{\sqrt{13}} \\ 0 & \frac{13}{5\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$$

7. Hallar una matriz regular P de forma que $P'AP$ esté en la forma canónica (15.6), siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+2i & 2-3i \\ 1-2i & 5 & -4-2i \\ 2+3i & -4+2i & 13 \end{bmatrix}$$

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+2i & 2-3i & 1 & 0 & 0 \\ 1-2i & 5 & -4-2i & 0 & 1 & 0 \\ 2+3i & -4+2i & 13 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5i & -1+2i & 1 & 0 \\ 0 & -5i & 0 & -2-3i & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5i & 2 & 1 & i \\ 0 & -5i & 0 & -2-3i & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 2 & 1 & i \\ 0 & 0 & -5/2 & -2-2i & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{i}{\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-4-4i}{\sqrt{10}} & \frac{i}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{array}\right]$$

$$= [C \mid \overline{P}']$$

con lo que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{-4+4i}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-i}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{-i}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

8. Hallar una matriz regular P de forma que $\bar{P}'AP$ esté en la forma canónica (15.7), siendo

$$A = \begin{bmatrix} i & -1 & -1+i \\ 1 & 0 & 1+2i \\ 1+i & -1+2i & 2i \end{bmatrix}$$

Consideremos la matriz hermítica $H = -iA = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 0 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 2 \end{bmatrix}$.

La matriz regular $P = \begin{bmatrix} 1 & -1-2i & -i \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ es tal que $\bar{P}'HP = \text{diag}[1, 1, -1]$.

Por tanto, $\bar{P}'AP = \text{diag}[i, i, -i]$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

9. Hallar una matriz regular P de forma que $P'AP$ esté en la forma canónica (15.2), siendo

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Sol. (a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (c) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, (d) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. Hallar una matriz regular P de forma que $P'AP$ esté en la forma canónica (15.3), siendo

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+2i \\ 1+2i & 1+4i \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 2i & 1+i & 2-4i \\ 1+i & 1+i & -1-2i \\ 2-4i & -1-2i & -3-5i \end{bmatrix}$

Sol. (a) $P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(-1-2i) \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, (b) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-i) & i/\sqrt{2} & (1+i)/2 \\ 0 & (1-i)/\sqrt{2} & (-3-2i)/13 \\ 0 & 0 & (3+2i)/13 \end{bmatrix}$

11. Hallar una matriz regular P de forma que $P'AP$ esté en la forma canónica (15.4), siendo

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

Sol.

(a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. Hallar una matriz regular P de forma que $\bar{P}'AP$ esté en la forma canónica (15.6), siendo

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1-3i \\ 1+3i & 10 \end{bmatrix}, \quad (b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2 \\ 1-i & 3 & -i \\ 2 & i & 4 \end{bmatrix} \quad (c)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 3-2i \\ 1-i & 3 & 3-4i \\ 3+2i & 3+4i & 18 \end{bmatrix}$$

Sol. $(a)\ P = \begin{bmatrix} 1 & -1+3i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b)\ P = \begin{bmatrix} 1 & -1-i & (-5-i)/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & (2-i)/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad (c)\ P = \begin{bmatrix} 1 & -1-i & (-2+5i) \\ 0 & 1 & (-2-i) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

13. Hallar una matriz regular P de forma que $\bar{P}'AP$ esté en la forma canónica (15.7), siendo

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ -1+i & i \end{bmatrix} \qquad (c)\ A = \begin{bmatrix} i & -1-i & -1 \\ 1-i & 0 & 1-i \\ 1 & -1-i & -i \end{bmatrix}$$

$$(b)\ A = \begin{bmatrix} i & -1 & 1+i \\ 1 & 2i & i \\ -1+i & i & 6i \end{bmatrix} \qquad (d)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2+i \\ -1 & 0 & 1-2i \\ -2+i & -1-2i & 0 \end{bmatrix}$$

Sol. $(a)\ P = \begin{bmatrix} 1 & -1+i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (c)\ P = \begin{bmatrix} 1 & (1-i)/\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$(b)\ P = \begin{bmatrix} 1 & -i & -2+3i \\ 0 & 1 & -2-i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (d)\ P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & (1-2i)/\sqrt{10} & -1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & (-2-i)/\sqrt{10} & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}$

14. Sea la matriz $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; demostrar que la condición necesaria y suficiente para que toda matriz cuadrada C de segundo orden satisfaga la relación $C'DC = D$ es que $|C| = 1$.

15. Sea A una matriz de orden n, regular, simétrica y real de indice p. Demostrar que $|A| > 0$ si, y solo si, $n - p$ es un número par.

16. Demostrar que una matriz A regular y simétrica es congruente con su inversa.
Ind. Considerar $P = BB'$ siendo $B'AB = I$ y demostrar que $P'AP = A^{-1}$.

17. Siguiendo el razonamiento de la demostración del Teorema I, deducir (15.6) en el caso de matrices hermíticas.

18. Demostrar que si $A \underset{\sim}{C} B$, la matriz A es simétrica (hemisimétrica) si, y solo si, B es simétrica (hemisimétrica).

19. Siendo S una matriz regular y simétrica, y T una matriz hemisimétrica de forma que $(S + T)(S - T)$ es regular, demostrar que $P'SP = S$ cuando

$$P = (S + T)^{-1}(S - T)$$

Ind. $P'SP = [(S - T)^{-1}(S + T)S^{-1}(S - T)(S + T)^{-1}]^{-1}$

20. Sea S una matriz regular y simétrica, y T otra matriz tal que $(S + T)(S - T)$ sea regular. Demostrar que si $P'SP = S$, siendo $P = (S + T)^{-1}(S - T)$, y la matriz $I + P$ es regular, entonces T es una matriz hemisimétrica.
Ind. $T = S(I - P)(I + P)^{-1} = S(I + P)^{-1}(I - P)$.

21. Demostrar que la congruencia de matrices cuadradas de orden n es una relación de equivalencia.

Capítulo 16

Formas bilineales

FORMA BILINEAL. Una expresión lineal y homogénea respecto de cada uno de los conjuntos de variables $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ se llama *forma bilineal* en dichas variables. Por ejemplo,

$$x_1y_1 + 2x_1y_2 - 13x_1y_3 - 4x_2y_1 + 15x_2y_2 - x_2y_3$$

es una forma bilineal en las variables (x_1, x_2) e (y_1, y_2, y_3).

La expresión más general de una bilineal en las variables $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ es

$$\begin{aligned} f(x,y) \;=\;& a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \cdots + a_{1n}x_1y_n \\ &+ a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \cdots + a_{2n}x_2y_n \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ a_{m1}x_my_1 + a_{m2}x_my_2 + \cdots + a_{mn}x_my_n \end{aligned}$$

o más brevemente

(16.1)
$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j \\ &= \begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= X'AY \end{aligned}$$

siendo $X = [x_1, x_2, \ldots, x_m]'$, $A = [a_{ij}]$, e $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]'$.

La matriz A de los coeficientes se llama *matriz* de la forma y la característica de A es la *característica* de la forma.

Véase Problema 1.

Ejemplo 1. La forma bilineal

$$x_1y_1 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \begin{bmatrix} x_1, x_2, x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = X'AY$$

FORMAS CANONICAS. Supongamos que las m variables x de (16.1) se sustituyen por las nuevas variables u mediante la transformación lineal

$$(16.2) \qquad x_i \;=\; \sum_{j=1}^{n} b_{ij}u_j, \qquad (i = 1,2,\ldots,m) \quad \text{o} \quad X = BU$$

y que las n variables y se sustituyen por las nuevas variables v mediante otra transformación lineal

$$(16.3) \qquad y_i \;=\; \sum_{j=1}^{n} c_{ij}v_j, \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \quad \text{o} \quad Y = CV$$

En estas condiciones, $X'AY = (BU)'A(CV) = U'(B'AC)V$. Aplicando ahora las transformaciones lineales $U = IX$, $V = IY$, se obtiene una nueva forma bilineal en las variables originales $X'(B'AC)Y = X'DY$.

Dos formas bilineales se llaman equivalentes si, y solo si, existe una transformación regular que transforme una de ellas en la otra.

I. Dos formas bilineales de matrices A y B de orden $m \times n$ definidas sobre un cuerpo F son equivalentes sobre dicho cuerpo si, y solo si, tienen la misma característica.

Si la característica de (16.1) es r, existen (véase Capítulo 5) las matrices regulares P y Q tales que

$$PAQ \;=\; \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Haciendo $B = P'$ en (16.2) y $C = Q$ en (16.3), la forma bilineal se reduce a

$$(16.4) \qquad U'(PAQ)V \;=\; U'\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V \;=\; u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_rv_r$$

Luego

II. Una forma bilineal cualquiera, definida sobre un cuerpo F, de característica r se puede reducir, mediante transformaciones lineales regulares sobre dicho cuerpo, a la forma canónica $u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_rv_r$.

Ejemplo 2. Sea la matriz de la forma bilineal $X'AY = X'\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}Y$ del Ejemplo 1,

$$\begin{array}{c} I_3 \\ \\ A \; I_3 \end{array} = \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} Q \\ \\ I_3 \; P' \end{array}$$

Por tanto, $X = PU = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}U$ e $Y = QV = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}V$ reducen $X'AY$ a

$$U'\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}V \;=\; U'I_3V \;=\; u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Las ecuaciones de las transformaciones son

$$\begin{cases} x_1 = u_1 - u_2 \\ x_2 = \quad u_2 \\ x_3 = \quad u_3 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} y_1 = v_1 \quad - v_3 \\ y_2 = \quad v_2 + v_3 \\ y_3 = \quad v_3 \end{cases}$$

Véase Problema 2.

TIPOS DE FORMAS BILINEALES. Una forma bilineal $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j = X'AY$ se llama

$$\begin{cases} \text{simétrica} \\ \text{alternada} \\ \text{hermítica} \\ \text{hermítica alternada} \end{cases} \text{ si la matriz } A \text{ es } \begin{cases} \text{simétrica} \\ \text{hemisimétrica} \\ \text{hermítica} \\ \text{hemihermítica} \end{cases}$$

TRANSFORMACIONES COGREDIENTES. Consideremos una forma lineal $X'AY$ en los dos conjuntos de variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Cuando estas variables x e y se someten a la misma transformación, $X = CU$ e $Y = CV$, dichas variables se llaman cogredientes o bien las variables se han transformado cogredientemente.

III. Si se somete la forma bilineal $X'AY$, siendo A una matriz cuadrada de orden n, a las transformaciones cogredientes $X = CU$ e $Y = CV$, aquélla se transforma en la forma bilineal $U'(C'AC)V$.

Si A es simétrica, también lo es $C'AC$; por tanto,

IV. Una forma bilineal sometida a transformaciones cogredientes de las variables sigue siendo simétrica.

V. Dos formas bilineales sobre un cuerpo F son equivalentes respecto de las transformaciones cogredientes de las variables si, y solo si, sus matrices son congruentes sobre dicho cuerpo F.

Del Teorema I, Capítulo 15, se deduce:

VI. Una forma bilineal simétrica de característica r se puede reducir mediante transformaciones cogredientes regulares de las variables a

$$a_1x_1y_1 + a_2x_2y_2 + \cdots + a_rx_ry_r \tag{16.5}$$

De los Teoremas II y IV, Capítulo 15, se deduce:

VII. Una forma bilineal simétrica de característica r se puede reducir mediante transformaciones cogredientes regulares de las variables sobre el cuerpo de los números reales a

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \cdots - x_ry_r \tag{16.6}$$

y sobre el cuerpo de los números complejos a

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ry_r \tag{16.7}$$

Véase Problema 3.

TRANSFORMACIONES CONTRAGREDIENTES. Sea la forma bilineal de la sección anterior. Cuando las variables x se someten a la transformación $X = (C^{-1})'U$ y las variables y a $Y = CV$, dichas variables se llaman *contragredientes* o bien las variables se han transformado contragredientemente.

VIII. Si se somete la forma bilineal $X'AY$, siendo A una matriz cuadrada de orden n, a las transformaciones contragredientes $X = (C^{-1})'U$ e $Y = CV$, se transforma en la forma bilineal $U'(C^{-1}AC)V$.

IX. La forma bilineal $X'IY = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ se transforma en sí misma si, y solo si, los dos conjuntos de variables se transforman contragredientemente.

DESCOMPOSICION EN FACTORES DE LAS FORMAS BILINEALES. En el Problema 4 se demuestra el teorema siguiente:

X. La condición necesaria y suficiente para que una forma bilineal no nula se pueda descomponer en factores es que su característica sea la unidad.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. $x_1y_1 + 2x_1y_2 - 13x_1y_3 - 4x_2y_1 + 15x_2y_2 - x_2y_3 = \begin{bmatrix} x_1, x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -13 \\ -4 & 15 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & -13 \\ -4 & 15 & -1 \end{bmatrix} Y.$

2. Reducir $x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 - 2x_1y_4 + 2x_2y_1 - 2x_2y_2 + x_2y_3 + 3x_2y_4 + 3x_3y_1 + 4x_3y_3 + x_3y_4$ a forma canónica.

La matriz de la forma es $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Del Problema 6, Capítulo 5, las matrices regulares

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -4/3 & -1/3 \\ 0 & -1/6 & -5/6 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ son tales que $PAQ = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Por tanto, las transformaciones lineales

$$X = P'U \text{ o bien} \begin{cases} x_1 = u_1 - 2u_2 - u_3 \\ x_2 = u_2 - u_3 \\ x_3 = u_3 \end{cases} \quad \text{e} \quad Y = QV \text{ o bien} \begin{cases} y_1 = v_1 + \frac{1}{3}v_2 - \frac{4}{3}v_3 - \frac{1}{3}v_4 \\ y_2 = - \frac{1}{6}v_2 - \frac{5}{6}v_3 + \frac{7}{6}v_4 \\ y_3 = v_3 \\ y_4 = v_4 \end{cases}$$

reducen $X'AY$ a $u_1v_1 + u_2v_2$.

3. Reducir la forma bilineal simétrica $X'AY = X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 8 & 10 & -8 \end{bmatrix} Y$ por medio de transformaciones cogredientes a (16.5) sobre el cuerpo de los números racionales, (*b*) (16.6) sobre el de los números reales y (*c*) (16.7) sobre el de los números complejos.

(*a*) Del Ejemplo 1, Capítulo 15, las transformaciones lineales $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} U$ $Y = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} V$

reducen $X'AY$ a $u_1v_1 - u_2v_2 + 4u_3v_3$.

(*b*) Del Ejemplo 2, Capítulo 15, las transformaciones lineales $X = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} U$, $Y = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} V$

reducen $X'AY$ a $u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3$.

(*c*) Del resultado del Ejemplo 2, Capítulo 15, se puede obtener

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Por tanto, las transformaciones lineales $X = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2i & -1 \\ 0 & 2 & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} U$, $Y = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2i & -1 \\ 0 & 2 & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} V$ reducen $X'AY$

a $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

4. Demostrar que una forma bilineal $f(x, y)$ se puede descomponer en factores si, y solo si, su característica es 1.

Supongamos que la forma se puede descomponer de manera que

$$\sum\sum a_{ij}x_iy_j = (\sum b_ix_i)(\sum c_jy_j) = \sum\sum b_ic_jx_iy_j$$

y que, por tanto, $a_{ij} = b_ic_j$. Evidentemente, todo menor de segundo orden de $A = [a_{ij}]$, como, por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} a_{ij} & a_{is} \\ a_{kj} & a_{ks} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_ib_j & a_ib_s \\ a_kb_j & a_kb_s \end{bmatrix} = b_jb_s\begin{bmatrix} a_i & a_i \\ a_k & a_k \end{bmatrix}$$

es igual a cero. Luego la característica de A es 1.

Recíprocamente, supongamos que la característica de la forma es 1. Según el Teorema I existen transformaciones lineales angulares que reducen la forma a $U'(B'AC)V = u_1v_1$. Ahora bien, las inversas de las transformaciones

$$u_i = \sum_j r_{ij}x_j \quad \text{y} \quad v_i = \sum_j s_{ij}y_j$$

convierten u_1v_1 en $(\sum_j r_{ij}x_j)(\sum_j s_{ij}y_j) = f(x,y)$ y, por tanto, $f(x,y)$ se puede descomponer en factores.

PROBLEMAS PROPUESTOS

5. Hallar las transformaciones lineales que reducen las siguientes formas bilineales a forma canónica (16.4)

(*a*) $x_1y_1 - 2x_1y_3 + 3x_2y_1 + x_2y_2 - 3x_2y_3 - x_3y_1 - x_3y_2 - x_3y_3$

(*b*) $X'\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & 0 \\ -4 & -11 & 2 & 7 \\ 5 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}Y$. (*c*) $X'\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}Y$. (*d*) $X'\begin{bmatrix} 7 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 12 & 6 \\ 8 & 5 & 6 & 10 \end{bmatrix}Y$

6. Hallar las transformaciones cogredientes que reducen

(*a*) $X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 14 \end{bmatrix}Y$ y (*b*) $X'\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}Y$ a forma canónica (16.6).

Sol. (*a*) $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (*b*) $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4\sqrt{3}/3 \\ 0 & 1 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}$

7. Sean B_1, B_2, C_1, C_2 cuatro matrices cuadradas regulares de orden n tales que $B_1A_1C_1 = B_2A_2C_2 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, hallar la transformación que convierte $X'A_1Y$ en $U'A_2V$.

Sol. $X = (B_2^{-1}B_1)'U$, $Y = C_1C_2^{-1}V$

8. Interpretar el Problema 23, Capítulo 5, en función de un par de formas bilineales.

9. Hallar la transformación contragrediente $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}U$. *Sol.* $Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}V$

10. Demostrar que una transformación ortogonal es contragrediente en sí misma, es decir, $X = PU$, $Y = PV$.

11. Demostrar el Teorema IX.

12. Sea $X'AY$ una forma bilineal real y regular; $X'A^{-1}Y$ se llama *forma bilineal inversa* de la primera. Demostrar que cuando se transforman cogredientemente formas bilineales inversas mediante la misma transformación ortogonal, se obtienen formas bilineales inversas.

13. Teniendo en cuenta el Problema 4, Capítulo 15, demostrar que existen transformaciones cogredientes $X = PU$, $Y = PV$ que reducen una forma bilineal alternada de característica $r = 2t$ a la forma canónica

$$u_1v_2 - u_2v_1 + u_3v_4 - u_4v_3 + \cdots + u_{2t-1}v_{2t} - u_{2t}v_{2t-1}$$

14. Hallar las formas canónicas de las formas bilineales hermíticas y hermíticas alternadas.
Ind. Véanse (15.6) y (15.7).

Capítulo 17

Formas cuadráticas

FORMA CUADRATICA. Todo polinomio homogéneo del tipo

$$(17.1) \qquad q \;=\; X'AX \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

cuyos coeficientes a_{ij} son elementos de un cuerpo F se llama forma cuadrática, sobre dicho cuerpo, en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ejemplo 1. $q = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$ es una forma cuadrática en las variables x_1, x_2, x_3. La matriz de la forma se puede escribir de varias maneras según como se separen los términos de los productos $-4x_1x_2$ y $8x_1x_3$ para formar los términos $a_{12}x_1x_2$, $a_{21}x_2x_1$ y $a_{13}x_1x_3$, $a_{31}x_3x_1$. Por convenio, lo haremos de manera que *la matriz de una forma cuadrática sea simétrica*, esto es, separaremos los términos de los productos de forma que $a_{ij} = a_{ji}$. Por consiguiente,

$$q \;=\; x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$$

$$= \; X'\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix}X$$

La matriz simétrica $A = [a_{ij}]$ se llama *matriz* de la forma cuadrática y la característica de A es la *característica* de la forma. Si la característica es $r < n$, la forma cuadrática se denomina *singular*; en caso contrario, se llama *regular*.

TRANSFORMACIONES. La transformación lineal sobre un cuerpo F, $X = BY$, convierte la forma cuadrática (17.1) de matriz simétrica A, sobre F, en la forma cuadrática

$$(17.2) \qquad (BY)'A(BY) = Y'(B'AB)Y$$

de matriz simétrica $B'AB$.

Dos formas cuadráticas en las mismas variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se llaman *equivalentes* si, y solo si, existe una transformación lineal regular $X = BY$ que, junto con $Y = IX$, transforma una de las formas en la otra. Como $B'AB$ es congruente con A se tiene:

I. La característica de una forma cuadrática es un invariante respecto de las transformaciones regulares de las variables.

II. Dos formas cuadráticas definidas sobre un cuerpo F son equivalentes sobre dicho cuerpo si, y solo si, sus matrices son congruentes sobre F.

Del Problema 1, Capítulo 15, se deduce que una forma cuadrática de característica r se puede reducir a la forma

$$(17.3) \qquad h_1y_1^2 + h_2y_2^2 + \cdots + h_ry_r^2, \qquad h_i \neq 0$$

en la cual solo figuran los términos de las variables al cuadrado, mediante una transformación regular $X = BY$. La matriz B es un producto de matrices elementales columna y B' es el producto, en orden contrario, de las mismas matrices elementales fila.

Ejemplo 2. Reducir $q = X'\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix}X$ del Ejemplo 1 a la forma (17.3).

$$\text{Se tiene}\quad [A\ \ I] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -23 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right] = [D\ \ B']$$

Por tanto, $X = BY = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}Y$ reduce q a $q' = y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2$.

Véanse Problemas 1-2.

REDUCCION DE LAGRANGE. La reducción de una forma cuadrática a la forma (17.3) se puede llevar a cabo por el método de Lagrange, que consiste, en esencia, en formar repetidamente cuadrados perfectos.

Ejemplo 3.

$$\begin{aligned} q &= x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 \\ &= \{x_1^2 - 4x_1(x_2 - 2x_3)\} + 2x_2^2 - 7x_3^2 \\ &= \{x_1^2 - 4x_1(x_2 - 2x_3) + 4(x_2 - 2x_3)^2\} + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4(x_2 - 2x_3)^2 \\ &= (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 2(x_2^2 - 8x_2x_3) - 23x_3^2 \\ &= (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 2(x_2^2 - 8x_2x_3 + 16x_3^2) + 9x_3^2 \\ &= (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 2(x_2 - 4x_3)^2 + 9x_3^2 \end{aligned}$$

Por tanto, $\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ y_2 = x_2 - 4x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ o bien $\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 + 4y_3 \\ x_2 = y_2 + 4y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

reduce q a $y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2$.

Véase Problema 3.

FORMAS CUADRATICAS REALES. Supongamos que la forma cuadrática real $q = X'AX$ se reduce a la forma (17.3) mediante una transformación real regular. Si uno o más de los coeficientes h_i son negativos existe una transformación regular $X = CZ$, en la que C se obtiene a partir de B por medio de una sucesión de transformaciones de fila y columna de tipo 1, que transforma q en

$$(17.4)\qquad s_1z_1^2 + s_2z_2^2 + \cdots + s_pz_p^2 - s_{p+1}z_{p+1}^2 - \cdots - s_rz_r^2$$

en la cual los términos con coeficiente positivo preceden a los de coeficiente negativo.

La transformación regular

$$w_i = \sqrt{s_i}\, z_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$
$$w_j = z_j \qquad (j = r+1, r+2, \ldots, n)$$

o bien

$$Z = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{s_1}}, \frac{1}{\sqrt{s_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{s_r}}, 1, 1, \ldots, 1\right) W$$

transforma (17.4) en la forma canónica

$$w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_p^2 - w_{p+1}^2 - \cdots - w_r^2 \tag{17.5}$$

Por consiguiente, como el producto de transformaciones regulares es una transformación regular, se deduce:

III. Toda forma cuadrática real se puede reducir, mediante una transformación real regular, a la forma canónica (17.5), en la que p, número de términos positivos, se llama *índice* y r característica de la forma cuadrática dada.

Ejemplo 4. En el Ejemplo 2, a forma cuadratica $q = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$ se redujo a $q' = y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2$. La transformación regular $y_1 = z_1$, $y_2 = z_3$, $y_3 = z_2$ reduce q' a $q'' = z_1^2 + 9z_2^2 - 2z_3^2$ y la transformación regular $z_1 = w_1$, $z_2 = w_2/3$, $z_3 = w_3/\sqrt{2}$ reduce q'' a $q''' = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2$.

Combinando las transformaciones se obtiene que la transformación lineal regular

$$\begin{aligned} x_1 &= w_1 + \tfrac{4}{3}w_2 + \sqrt{2}\,w_3 \\ x_2 &= \tfrac{4}{3}w_2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,w_3 \\ x_3 &= \tfrac{1}{3}w_2 \end{aligned} \qquad \text{o bien} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & \sqrt{2} \\ 0 & 4/3 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} W$$

reduce q a $q''' = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2$ La forma cuadrática es de característica 3 e índice 2.

LEY DE INERCIA DE SYLVESTER. En el Problema 5, se demuestra la ley de inercia que dice:

IV. Si se aplican dos transformaciones reales y regulares a una forma cuadrática real se obtienen dos formas canónicas (17.5) de la misma característica e igual índice.

Por consiguiente, el índice de una matriz simétrica real depende de la matriz y no de las transformaciones elementales que produce (15.2).

La diferencia entre el número de términos positivos y negativos, $p - (r - p)$, en (17.5) se llama *signatura* de la forma cuadrática. Como consecuencia del Teorema IV, se tiene:

V. Dos formas cuadráticas reales en n variables son equivalentes sobre el cuerpo de los números reales si, y solo si, tienen la misma característica e igual índice o bien la misma característica e idéntica signatura.

FORMAS CUADRATICAS COMPLEJAS. Supongamos que se reduce la forma cuadrática compleja $X'AX$ a la forma (17.3) mediante una transformación regular. La transformación regular

$$z_i = \sqrt{h_i}\, y_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$
$$z_j = y_j \qquad (j = r+1, r+2, \ldots, n)$$

o bien

$$Y = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{h_1}}, \frac{1}{\sqrt{h_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{h_r}}, 1, 1, \ldots, 1\right) Z$$

reduce (17.3) a

(17.6) $$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2$$

Por consiguiente,

VI. Toda forma cuadrática de característica r, sobre el cuerpo de los números complejos, se puede reducir mediante una transformación regular sobre dicho cuerpo, a la forma canónica (17.6).

VII. Dos formas cuadráticas complejas en n variables son equivalentes sobre el cuerpo de los números complejos si, y solo si, tienen la misma característica.

FORMAS DEFINIDAS Y SEMIDEFINIDAS. Una forma cuadrática real y regular, $q = X'AX$ con $|A| \neq 0$, en n variables se llama *definida positiva* si la característica y el índice son iguales. Así, pues, en el cuerpo de los números reales se puede reducir una forma cuadrática definida positiva a $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$, y para todo conjunto de valores de las variables x (distinto del trivial) $q > 0$.

Una forma cuadrática real y singular, $q = X'AX$ con $|A| = 0$, se llama *semidefinida positiva* si la característica y el índice son iguales, esto es, $r = p < n$. En el cuerpo de los números reales se puede reducir una forma cuadrática semidefinida positiva a $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2$, $r < n$, y para todo conjunto de valores de las variables x (distinto del trivial), $q \geq 0$.

Una forma cuadrática real y regular, $q = X'AX$, se llama *definida negativa* si su índice es $p = 0$, es decir, $r = n$, $p = 0$. En el cuerpo de los números reales se puede reducir una forma definida negativa a $-y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_n^2$, y para todo conjunto de valores de las variables x (distinto del trivial), $q < 0$.

Una forma cuadrática real y singular, $q = X'AX$, se llama *semidefinida negativa* si su índice es $p = 0$, esto es, $r < n$, $p = 0$. En el cuerpo de los números reales se puede reducir una forma semidefinida negativa a $-y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_r^2$, y para todo conjunto de valores de las variables x (distinto del trivial), $q \leq 0$.

Evidentemente, si q es una forma definida (semidefinida) negativa, $-q$ es una forma definida (semidefinida) positiva.

En las formas cuadráticas definidas positivas se verifica:

VIII. Si $q = X'AX$ es una forma definida positiva, entonces $|A| > 0$.

MENORES PRINCIPALES. Un menor de una matriz A se llama *principal* si se obtiene al suprimir en A determinadas filas y las columnas correspondientes de igual subíndice. Por tanto, los elementos de la diagonal de un menor principal de la matriz A son los elementos diagonales de A.

En el Problema 6 se demuestra el teorema siguiente:

IX. Toda matriz simétrica de característica r tiene al menos un menor principal de orden r distinto de cero.

MATRICES DEFINIDAS Y SEMIDEFINIDAS. La matriz A de una forma cuadrática real, $q = X'AX$, se llama definida o semidefinida según lo sea la forma cuadrática.

X. Una matriz simétrica real A es definida positiva si, y solo si, existe una matriz regular C tal que $A = C'C$.

XI. Una matriz simétrica real A de característica r es semidefinida positiva si, y solo si, existe una matriz C de característica r tal que $A = C'C$.

Véase Problema 7.

XII. Si A es una matriz definida positiva, todo menor principal de ella es positivo.

Véase Problema 8.

XIII. Si A es una matriz semidefinida positiva, todo menor principal de ella es nulo o positivo.

FORMAS CUADRATICAS DE ORDEN REGULAR. Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz simétrica definida sobre un cuerpo F, y consideremos los *menores principales*

$$(17.7) \qquad p_0 = 1, \quad p_1 = a_{11}, \quad p_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad p_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad p_n = |A|$$

En el Problema 9 se demuestra el teorema siguiente:

XIV. Toda matriz cuadrada A de orden n simétrica y regular se puede disponer, permutando algunas filas y las columnas correspondientes, de forma que p_{n-1} y p_{n-2} sean nulos simultáneamente.

XV. Si A es una matriz simétrica y $p_{n-2}p_n \neq 0$, pero $p_{n-1} = 0$, entonces p_{n-2} y p_n tienen signo positivo.

Ejemplo 5. En la forma cuadrática $X'AX = X'\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}X$, $p_0 = 1$, $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$, $p_4 = |A| = 1$.

Se tiene $\alpha_{33} \neq 0$; la transformación $X = K_{34}\tilde{X}$ da lugar a

$$\text{(i)} \qquad \tilde{X}'\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}\tilde{X}$$

en la cual $p_0 = 1$, $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_3 = -1$, $p_4 = 1$. Por tanto, de (i) se deduce que p_2 y p_3 no son nulos simultáneamente.

Una matriz simétrica A está *regularmente ordenada* si no hay dos menores p consecutivos que sean nulos en la sucesión $p_0, p_1, \ldots, p_r$. Si está regularmente ordenada, la forma cuadrática $X'AX$ se llama de *orden regular*. En el Ejemplo 5, la forma dada no es de orden regular; la forma cuadrática (i) del mismo ejemplo es de orden regular.

Sea A una matriz simétrica de característica r. Del Teorema IX se deduce que A tiene al menos un menor principal cuadrado de orden r, distinto de cero, y cuyos elementos se pueden llevar al extremo superior izquierdo de A. Entonces, $p_r \neq 0$, siendo $p_{r+1} = p_{r+2} = \cdots = p_n = 0$. Según el Teorema XIV, las r primeras filas y las r primeras columnas se pueden ordenar de forma que al menos uno de los p_{r-1} y p_{r-2} sea distinto de cero. Si $p_{r-1} \neq 0$ y $p_{r-2} = 0$, aplicamos el método anterior a la matriz de p_{r-1}; si $p_{r-2} \neq 0$, aplicamos dicho método a la matriz de p_{r-2}, y así sucesivamente, hasta que M quede regularmente ordenada.

XVI. Toda matriz (forma cuadrática) simétrica de característica r se puede ordenar regularmente.

Véase Problema 10.

XVII. Una forma cuadrática real $X'AX$ es positiva si, y solo si, su característica es n y todos los menores principales de la sucesión son positivos.

XVIII. Una forma cuadrática real $X'AX$ de característica r es semidefinida positiva si, y solo si, son positivos todos los menores principales de la sucesión $p_0, p_1, \ldots, p_r$.

METODO DE REDUCCION DE KRONECKER. Este método de Kronecker para reducir una forma cuadrática a otra en la que solo existan los términos de las variables al cuadrado se basa en el teorema siguiente:

XIX. Si $q = X'AX$ es una forma cuadrática definida sobre un cuerpo F, de n variables y característica r, se puede reducir mediante una transformación regular sobre dicho cuerpo, a la forma $q' = \bar{X}'B\bar{X}$, en la cual, un menor C de A de orden r y regular ocupe el extremo superior izquierdo de B. Además, existe una transformación lineal regular sobre el cuerpo F, que reduce q a la forma cuadrática regular $q'' = \bar{X}'C\bar{X}$, de r variables.

XX. Si $q = X'AX$ es una forma cuadrática regular de n variables definida sobre un cuerpo F, y $p_{n-1} = \alpha_{nn} \neq 0$, la transformación regular

$$\begin{cases} x_i = y_i + \alpha_{in} y_n, & (i = 1, 2, \ldots, n-1) \\ x_n = \alpha_{nn} y_n \end{cases}$$

o bien

$$X = BY = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{nn} \end{bmatrix} Y$$

reduce q a $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} y_i y_j + p_{n-1} p_n y_n^2$ en la que se ha puesto de manifiesto un término cuadrado de una de las variables.

Ejemplo 6. En la forma cuadrática $X'AX = X' \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} X$, $p_2 = \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. La transformación regular

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \alpha_{13} y_3 = y_1 - 8y_3 \\ x_2 = y_2 + \alpha_{23} y_3 = y_2 - 8y_3 \\ x_3 = \alpha_{33} y_3 = -2y_3 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} Y$$

reduce $X'AX$ a

$$Y' \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -8 & -8 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} Y = Y' \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix} Y$$

en la cual la variable y_3 aparece únicamente elevada al cuadrado.

XXI. Si $q = X'AX$ es una forma cuadrática regular, definida sobre un cuerpo F, y $\alpha_{n-1,n-1} = \alpha_{nn} = 0$, pero $\alpha_{n,n-1} \neq 0$, la transformación regular sobre dicho cuerpo F

$$\begin{cases} x_i = y_i + \alpha_{i,n-1} y_{n-1} + \alpha_{in} y_n, & (i = 1, 2, \ldots, n-2) \\ x_{n-1} = \alpha_{n-1,n} y_n, & x_n = \alpha_{n,n-1} y_{n-1} \end{cases}$$

o bien

$$X = BY = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_{n-2,n-1} & \alpha_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} Y$$

reduce q a $\sum_{i=1}^{r-2}\sum_{j=1}^{n-2} a_{ij} y_i y_j + 2\alpha_{n,n-1} p_n y_{n-1} y_n$.

La transformación siguiente

$$\begin{cases} y_i = z_i, & (i = 1, 2, \ldots, n-2) \\ y_{n-1} = z_{n-1} - z_n \\ y_n = z_{n-1} + z_n \end{cases}$$

da lugar a $\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-2} a_{ij} z_i z_j + 2\alpha_{n,n-1} p_n (z_{n-1}^2 - z_n^2)$, en la cual están aislados dos términos al cuadrado de signos contrarios.

Ejemplo 7. En la forma cuadrática

$$X'AX = X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} X$$

$\alpha_{22} = \alpha_{33} = 0$, pero $\alpha_{32} = -1 \neq 0$. La transformación regular

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \alpha_{12} y_2 + \alpha_{13} y_3 \\ x_2 = \alpha_{23} y_3 \\ x_3 = \alpha_{32} y_2 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} Y$$

reduce $X'AX$ a

$$Y'\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} Y = Y'\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} Y = Y'BY = y_1^2 + 2y_2 y_3$$

La transformación

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 - z_3 \\ y_3 = z_2 + z_3 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} Z$$

reduce $Y'BY$ a

$$Z'\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} Z = Z'\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} Z = z_1^2 + 2z_2^2 - 2z_3^2$$

Consideremos ahora una forma cuadrática en n variables y característica r. Del Teorema XIX se deduce que q se puede reducir a $q_1 = X'AX$, en la que A tiene un menor cuadrado regular de orden r en el extremo superior izquierdo, y el resto de ella está formado por ceros. Según el Teorema XVI, A se puede ordenar regularmente.

Si $p_{r-1} \neq 0$, se puede aplicar el Teorema XX para poner de manifiesto un término al cuadrado

$$p_{r-1} p_r y_r^2 \tag{17.8}$$

Si $p_{r-1} = 0$, pero $\alpha_{r-1,r-1} \neq 0$, permutando las dos últimas filas y las dos últimas columnas se obtiene una matriz en la cual $p_{r-1} = \alpha_{r-1,r-1} \neq 0$. Como $p_{r-2} \neq 0$, se puede aplicar el Teorema XX para poner de manifiesto dos términos al cuadrado

$$p_{r-2}\alpha_{r-1,r-1} y_{r-1}^2 + \alpha_{r-1,r-1} p_r y_r^2 \tag{17.9}$$

que serán de signo contrario, ya que, según el Teorema XV, p_{r-2} y p_r son de distinto signo.

Si $p_{r-1} = 0$ y $\alpha_{r-1,\,r-1} = 0$, entonces (véase Problema 9) $\alpha_{r,\,r-1} \neq 0$ y se puede aplicar el Teorema XXI para poner de manifiesto dos términos al cuadrado.

(17.10) $$2\alpha_{r,\,r-1}p_r(y_{r-1}^2 - y_r^2)$$

que tiene signo contrario.

Este proceso se puede repetir hasta que la forma cuadrática quede reducida a otra en la cual no haya más que términos elevados al cuadrado.

En (17.8), el término aislado será positivo o negativo, según que la sucesión p_{r-1}, p_r presente una permanencia o una inversión de signo. En (17.9) y (17.10) se ve que las sucesiones $p_{r-2}, \alpha_{r-1,\,r-1}, p_r$ y $p_{r-2}, \alpha_{r,\,r-1}, p_r$ presentan una permanencia y una variación de signo, prescindiendo del signo de $\alpha_{r-1,\,r-1}$ y $\alpha_{r,\,r-1}$. Por consiguiente,

XXII. Si se reduce una forma cuadrática de orden regular $q = X'AX$ a forma canónica por el método de Kronecker, el número de términos positivos es igual al de permanencias de signo, y el correspondiente de los negativos es igual al de las inversiones de signo en la sucesión $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_r$, en la que si hay algún cero se puede considerar como positivo o como negativo, pero conservando siempre para toda la sucesión el mismo criterio.

Véanse Problemas 11-13.

DESCOMPOSICION EN FACTORES DE LAS FORMAS CUADRATICAS. Sea $X'AX \neq 0$ una forma cuadrática de coeficientes complejos.

Supongamos que $X'AX$ se descompone en factores de la forma

(i) $$X'AX = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)(b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n)$$

Si los factores son linealmente independientes, existe al menos una matriz $\begin{bmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{bmatrix}$ que es regular. Numeremos las variables y los coeficientes de forma que $\begin{bmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{bmatrix}$ sea $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$

La transformación regular

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n \\ y_3 = x_3, \;\ldots,\; y_n = x_n \end{cases}$$

reduce (i) a y_1y_2 de característica 2. Por tanto, (i) es de característica 2.

Si los factores son linealmente dependientes, existe al menos un elemento $a_i \neq 0$. Numeremos las variables y los coeficientes de forma que a_1 represente a a_i. La transformación regular

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ y_2 = x_2, \;\ldots,\; y_n = x_n \end{cases}$$

reduce (i) a $\dfrac{b_1}{a_1}y_1^2$ de característica 1. Por tanto, (i) es de característica 1.

Recíprocamente, si la característica de $X'AX$ es 1 ó 2 se puede reducir, según el Teorema VI, a la forma y_1^2 o bien $y_1^2 + y_2^2$, respectivamente, cada una de las cuales se pueden escribir sobre el cuerpo de los números complejos como producto de dos factores lineales.

Por consiguiente,

XXIII. La condición necesaria y suficiente para que una forma cuadrática $X'AX \neq 0$ de coeficientes complejos admita una descomposición en dos factores lineales es que su característica sea $r \leq 2$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Reducir $q = X'AX = X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 8 & 10 & -8 \end{bmatrix}X$ a la forma (17.3).

Del Ejemplo 1, Capítulo 15,

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 10 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -10 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] = [D \mid P']$$

Por tanto, la transformación $X = PY = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}Y$ reduce q a la forma pedida $y_1^2 - y_2^2 + 4y_3^2$.

2. Reducir $q = X'AX = X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}X$ a la forma (17.3).

$$[A \mid I] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] = [D \mid P']$$

Por tanto, la transformación $X = PY = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}Y$ reduce q a $y_1^2 + 8y_2^2 - 2y_3^2$.

3. Reducción de Lagrange.

(*a*)
$$\begin{aligned} q &= 2x_1^2 + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 8x_1x_2 + 12x_1x_3 + 8x_1x_4 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4 \\ &= 2\{x_1^2 + 2x_1(2x_2 + 3x_3 + 2x_4)\} + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4 \\ &= 2\{x_1^2 + 2x_1(2x_2 + 3x_3 + 2x_4) + (2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2\} \\ &\qquad + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4 - 2(2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 \\ &= 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 - 3\{x_2^2 + 2x_2(x_3 + 4x_4)\} + x_3^2 - 32x_4^2 - 40x_3x_4 \\ &= 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 - 3(x_2 + x_3 + 4x_4)^2 + 4(x_3 - 2x_4)^2 \end{aligned}$$

Por tanto, la transformación $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ y_2 = x_2 + x_3 + 4x_4 \\ y_3 = x_3 - 2x_4 \\ y_4 = x_4 \end{cases}$ reduce q a $2y_1^2 - 3y_2^2 + 4y_3^2$

(*b*) Para la forma cuadrática del Problema 2 se obtiene

$$q = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 16x_2x_3 + 4x_3^2 = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 + 8x_2x_3$$

Como no hay término aislado en x_2^2 ni en x_3^2, pero sí en x_2x_3, aplicamos la transformación regular.

(i) $$x_1 = z_1, \quad x_2 = z_2, \quad x_3 = z_2 + z_3$$

y se obtiene

$$q = (z_1+4z_2+2z_3)^2 + 8z_2^2 + 8z_2z_3 = (z_1+4z_2+2z_3)^2 + 8(z_2+\tfrac{1}{2}z_3)^2 - 2z_3^2 = y_1^2 + 8y_2^2 - 2y_3^2$$

Ahora bien, $Y = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Z$ y de (i) $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X$; por tanto, $Y = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X$.

Así, pues, la transformación regular $X = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} Y$ es la que produce la reducción.

4. Aplicando el resultado del Problema 2,

$$[A \mid I] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

y aplicando las transformaciones $H_2(\frac{1}{4}\sqrt{2}),\ K_2(\frac{1}{4}\sqrt{2})$ y $H_3(\frac{1}{2}\sqrt{2}),\ K_3(\frac{1}{2}\sqrt{2})$, se obtiene

$$[A \mid I] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{array}\right] = [C \mid Q']$$

Por tanto, la transformación $X = QY = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{bmatrix} Y$ reduce $q = X' \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} X$ a la forma canónica $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

5. Demostrar que si una forma cuadrática real q se reduce a dos formas distintas mediante dos transformaciones regulares

(i) $$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - y_{p+2}^2 - \cdots - y_r^2$$

y

(ii) $$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_q^2 - y_{q+1}^2 - y_{q+2}^2 - \cdots - y_r^2$$

se verifica que $p = q$.

Supongamos $q > p$. Sea $X = FY$ la transformación que da lugar a (i) y $X = GY$ la que da lugar a (ii). Entonces,

$$Y = F^{-1}X = \left.\begin{array}{c} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{nn}x_n \end{array}\right\}$$

y

$$Y = G^{-1}X = \left.\begin{array}{c} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n \end{array}\right\}$$

reducen, respectivamente, (i) y (ii) a q. Por consiguiente,

$$\text{(iii)} \quad \begin{aligned} &(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n)^2 + \cdots + (b_{p1}x_1 + b_{p2}x_2 + \cdots + b_{pn}x_n)^2 \\ &\quad - (b_{p+1,1}x_1 + b_{p+1,2}x_2 + \cdots + b_{p+1,n}x_n)^2 - \cdots - (b_{r1}x_1 + b_{r2}x_2 + \cdots + b_{rn}x_n)^2 \\ = {} &(c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n)^2 + \cdots + (c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + \cdots + c_{qn}x_n)^2 \\ &\quad - (c_{q+1,1}x_1 + c_{q+1,2}x_2 + \cdots + c_{q+1,n}x_n)^2 - \cdots - (c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \cdots + c_{rn}x_n)^2 \end{aligned}$$

Consideremos las $r-q+p < r$ ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{p1}x_1 + b_{p2}x_2 + \cdots + b_{pn}x_n = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} c_{q+1,1}x_1 + c_{q+1,2}x_2 + \cdots + c_{q+1,n}x_n = 0 \\ c_{q+2,1}x_1 + c_{q+2,2}x_2 + \cdots + c_{q+2,n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \cdots + c_{rn}x_n = 0 \end{array}\right.$$

Según el Teorema IV, Capítulo 10, existe una solución no trivial $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ que, sustituida en (iii), nos da

$$\begin{aligned} &-(b_{p+1,1}\alpha_1 + b_{p+1,2}\alpha_2 + \cdots + b_{p+1,n}\alpha_n)^2 - \cdots - (b_{r1}\alpha_1 + b_{r2}\alpha_2 + \cdots + b_{rn}\alpha_n)^2 \\ &\quad = (c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2 + \cdots + c_{1n}\alpha_n)^2 + \cdots + (c_{q1}\alpha_1 + c_{q2}\alpha_2 + \cdots + c_{qn}\alpha_n)^2 \end{aligned}$$

Es evidente que solo se verifica cuando sean nulos los términos elevados al cuadrado. Pero entonces, ni F ni G son matrices regulares, en contra de la hipótesis. Por tanto, $q \le p$. Repitiendo el razonamiento anterior haciendo la hipótesis de que $q < p$, se llega también a una contradicción. Así, pues, $q = p$.

6. Demostrar que toda matriz simétrica A de característica r posee al menos un menor principal de orden r distinto de cero.

Como la característica de A es r, al menos existirá un menor cuadrado de orden r que sea distinto de cero. Supongamos que éste es el formado por las filas $i_1, i_2, \ldots, i_r$. Mediante cambios de filas podemos hacer que aquéllas pasen a ocupar los r primeros lugares, y lo mismo con las r columnas $i_1, i_2, \ldots, i_r$.

Ahora, las r primeras filas son linealmente independientes y todas las demás son combinación lineal de ellas. Mediante combinaciones lineales de estas r filas sumadas a las demás se puede conseguir que en las n-r filas se reduzcan sus elementos a cero. Como A es una matriz simétrica, las mismas operaciones reducirán a cero los elementos de las n-r columnas. Por tanto, resulta la matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_r} & \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_r} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{i_ri_1} & a_{i_ri_2} & \cdots & a_{i_ri_r} & \\ \hline & & 0 & & 0 \end{array}\right]$$

cuyo extremo superior izquierdo está ocupado por un menor no nulo que es, evidentemente, un menor principal de A.

7. Demostrar que una matriz simétrica real A de característica r es semidefinida positiva si, y solo si, existe una matriz C, de característica r, tal que $A = C'C$.

Como la característica de A es r, su forma canónica es $N_1 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. En estas condiciones, existe una matriz regular B de forma que $A = B'N_1B$, y como $N' = N_1 = N_1^2$ se tiene $A = B'N_1B = B'N_1N_1B = B'N_1' \cdot N_1B$. Hagamos $C = N_1B$; entonces, la característica de C es r y $A = C'C$, como queríamos demostrar.

Recíprocamente, sea C una matriz cuadrada de orden n real y simétrica; la característica de $A = C'C$ es $s \leq r$. Su forma canónica será del tipo

$$N_2 = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_s, 0, 0, \ldots, 0)$$

en donde d_i es $+1$ o -1. En estas condiciones, existe una matriz E real y regular tal que $E'(C'C)E = N_2$. Haciendo $CE = B = [b_{ij}]$, como $B'B = N_2$, se tiene

$$b_{i1}^2 + b_{i2}^2 + \cdots + b_{in}^2 = d_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

y

$$b_{j1}^2 + b_{j2}^2 + \cdots + b_{jn}^2 = 0, \qquad (j = s+1, s+2, \ldots, n)$$

en donde d_i es positivo y, por consiguiente, la matriz A es semidefinida positiva.

8. Demostrar que si la matriz A es definida positiva, todo menor principal de ella es positivo.

Sea $q = X'AX$. El menor principal de A obtenido al suprimir la fila y columna del lugar i es la matriz A_i de la forma cuadrática q_1 deducida de q haciendo $x_i = 0$. Ahora bien, todo valor de q_i, para un conjunto no trivial de valores de sus variables, es también un valor de q y, por tanto, positivo. En consecuencia, A_i es definida positiva.

Este razonamiento se puede repetir con los menores principales $A_{ij}, A_{ijk}, \ldots$, obtenidos al suprimir en la matriz A dos, tres, ..., filas, y las columnas correspondientes.

Según el Teorema VI, $A_i > 0$, $A_{ij} > 0, \ldots$, por tanto, todo menor principal es positivo.

9. Demostrar que toda matriz cuadrada regular, $A = [a_{ij}]$, se puede ordenar permutando ciertas filas, y las columnas correspondientes, de forma que p_{n-1} y p_{n-2} no sean nulos simultáneamente.

El teorema se verifica cuando A es de orden 1 ó 2. También se cumple cuando A es de orden $n > 2$ y $p_{n-1} = \alpha_{nn} \neq 0$. Supongamos $\alpha_{nn} = 0$; entonces (a) algún $\alpha_{ii} \neq 0$, (b) o bien todos los $\alpha_{ii} = 0$.

Supongamos que (a) algún $\alpha_{ii} \neq 0$. Después de permutar las filas y columnas del lugar i hasta que ocupen las últimas posiciones, en la matriz que se obtiene $p_{n-1} = \alpha_{ii} \neq 0$.

Supongamos que (b) todos los $\alpha_{ii} = 0$. Como $|A| \neq 0$, existe al menos un $\alpha_{ni} \neq 0$. Permutando las filas y columnas del lugar i hasta que ocupen la posición $(n-1)$, en la matriz que se obtiene $\alpha_{n-1,n} = \alpha_{n,n-1} \neq 0$. De (6.6) se deduce

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n-1,n-1} & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{n,n-1} & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix} = -\alpha_{n-1,n}^2 = p_{n-2}p_n$$

luego $p_{n-2} \neq 0$.

Obsérvese que esto demuestra también el Teorema XV.

10. Volver a numerar las variables de forma que $q = X'AX = X'\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}X$ sea regular.

Se tiene $p_0 = 1$, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = -4$, $p_4 = -3$. Como $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 \neq 0$, estudiemos la matriz

$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ de p_3. El adjunto $B_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$; permutando en A la segunda fila con la tercera y la segunda columna con la tercera se obtiene

$$X'\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}X$$

en la cual $p_0 = 1$, $p_1 = 0$, $p_2 = -4$, $p_3 = -4$, $p_4 = -3$. Por tanto, se debe tomar x_2 como x_3 y x_3 como x_2.

11. Reducir por el método de Kronecker $q = X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}X$.

En este caso, $p_0 = 1$, $p_1 = 1$, $p_2 = -3$, $p_3 = 20$, $p_4 = -5$, por lo que q es de orden regular. La sucesión de menores presenta una permanencia y tres inversiones de signo; la forma reducida, pues, tendrá un término positivo y tres negativos.

Como todos los $p_i \neq 0$, aplicando repetidamente el Teorema XIX se llega a la forma reducida

$$p_0p_1y_1^2 + p_1p_2y_2^2 + p_2p_3y_3^2 + p_3p_4y_4^2 = y_1^2 - 3y_2^2 - 60y_3^2 - 100y_4^2$$

12. Reducir por el método de Kronecker $q = X'AX = X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}X$.

La característica de A es 3 y $\alpha_{33} \neq 0$. Permutando las dos últimas filas y las dos últimas columnas A se reduce a $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ en la cual $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \neq 0$. Como la característica de B es 3 se puede reducir a $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ahora bien, q se ha reducido a $\tilde{X}'C\tilde{X} = \tilde{X}'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}\tilde{X}$, en la cual $p_0 = 1$, $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_3 = -1$. La forma reducida tendrá dos términos positivos y uno negativo. Como $p_2 = 0$, pero $\gamma_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, la forma reducida es, según (16.8),

$$p_0p_1y_1^2 + p_1\gamma_{22}y_2^2 + \gamma_{22}p_3y_3^2 = y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2$$

13. Reducir por el método de Kronecker $q = X'\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}X$.

En este caso, $p_0 = 1$, $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_3 = -9$, $p_4 = 27$; la forma reducida tendrá dos términos positivos y dos negativos. Consideremos la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ de p_3. Como $\beta_{33} = 0$, pero $\beta_{32} = -3 \neq 0$ la forma reducida es, según (16.8) y (16.9),

$$p_0p_1y_1^2 + 2\beta_{32}p_3(y_2^2 - y_3^2) + p_3p_4y_4^2 = y_1^2 + 54y_2^2 - 54y_3^2 - 243y_4^2$$

14. Demostrar que para todo conjunto de vectores reales de orden n, $X_1, X_2, \ldots, X_p$,

$$|G| = \begin{vmatrix} X_1\cdot X_1 & X_1\cdot X_2 & \cdots & X_1\cdot X_p \\ X_2\cdot X_1 & X_2\cdot X_2 & \cdots & X_2\cdot X_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_p\cdot X_1 & X_p\cdot X_2 & \cdots & X_p\cdot X_p \end{vmatrix} \geq 0$$

en donde la condición necesaria y suficiente para que se verifique la igualdad es que el conjunto dado sea linealmente independiente.

(*a*) Supongamos que los vectores X_i son linealmente independientes y sea $X = [x_1, x_2, \ldots, x_p]' \neq 0$. Entonces, $Z = \sum_{i=1}^{p} X_i x_i \neq 0$ y $0 < Z\cdot Z = (\sum_{i=1}^{p} X_i x_i)\cdot(\sum_{j=1}^{p} X_j x_j) = X'(X_i' X_j)X = X'(X_i\cdot X_j)X = X'GX$.
Como esta forma cuadrática es definida positiva, $|G| > 0$.

(*b*) Supongamos que los vectores X_i son linealmente dependientes. Entonces, existen los escalares $k_1, k_2, \ldots, k_p$, no todos nulos, de forma que $\xi = \sum_{i=1}^{p} k_i X_i = 0$ y, por tanto,

$$X_j\cdot\xi = k_1 X_j\cdot X_1 + k_2 X_j\cdot X_2 + \cdots + k_p X_j\cdot X_p = 0, \qquad (j = 1,2,\ldots,p)$$

El sistema homogéneo de ecuaciones

$$X_j\cdot X_1 x_1 + X_j\cdot X_2 x_2 + \cdots + X_j\cdot X_p x_p = 0, \qquad (j = 1,2,\ldots,p)$$

tiene una solución no trivial $x_i = k_i$, $(i = 1,2,\ldots,p)$, y $|G| = 0$.

Hemos demostrado que $|G| \geq 0$. Para demostrar el recíproco de (*b*) suponemos que $|G| = 0$ y razonando su orden inverso a (*b*) se obtiene $X_j\cdot\xi = 0$, $(j = 1,2,\ldots,p)$, siendo $\xi = \sum_{i=1}^{p} k_i X_i$. Por tanto, $\sum_{j=1}^{p} k_j X_j\cdot\xi = \xi\cdot\xi = 0$, $\xi = 0$, y los vectores dados X_j son linealmente dependientes.

PROBLEMAS PROPUESTOS

15. Escribir en notación matricial las formas cuadráticas siguientes:

(*a*) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$ (*b*) $2x_1^2 - 6x_1x_2 + x_3^2$ (*c*) $x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$

Sol. (*a*) $X'\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}X$ (*b*) $X'\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}X$ (*c*) $X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \\ 3 & -4 & -3 \end{bmatrix}X$

16. Escribir el desarrollo de la forma cuadrática en x_1, x_2, x_3, cuya matriz es $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$.

Sol. $2x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 - 5x_3^2$

17. Reducir por el método del Problema 1 y por la reducción de Lagrange:

(*a*) $X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 18 \end{bmatrix}X$ (*b*) $X'\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}X$ (*c*) $X'\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}X$ (*d*) $X'\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}X$

Sol. (*a*) $y_1^2 + 2y_2^2 - 48y_3^2$ (*b*) $y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2$ (*c*) $y_1^2 - y_2^2 + 8y_3^2$ (*d*) $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$

Id. Hacer en (*c*) y (*d*) $x_1 = z_3$, $x_2 = z_1$, $x_3 = z_2$.

18. (*a*) Demostrar que $X'\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}X = X'\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}X$, pero que las matrices tienen distinta característica.

(*b*) Demostrar que la matriz simétrica de una forma cuadrática es única.

19. Demostrar que sobre el cuerpo de los números reales $x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3$ y $9x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 - 6x_1x_3 - 8x_2x_3$ son equivalentes.

20. Demostrar que una matriz simétrica real es definida positiva (negativa) si, y solo si, es congruente sobre el cuerpo real con I $(-I)$.

21. Demostrar que $X'AX$ del Problema 12 se reduce a $\tilde{X}'C\tilde{X}$ mediante $X = R\tilde{X}$, en donde $R = K_{34}K_{41}(-5)K_{42}(1)$. Como consecuencia, demostrar el Teorema XIX.

22. (*a*) Demostrar que si dos formas cuadráticas reales en las mismas variables son definidas positivas, también lo es su suma.

(*b*) Demostrar que si q_1 es una forma definida positiva en $x_1, x_2, \ldots, x_s$, y q_2 es otra forma definida positiva en $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$, entonces $q = q_1 + q_2$ es una forma definida positiva en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

23. Demostrar que si C es una matriz real y regular, $C'C$ es definida positiva.
Ind. Considerar $X'IX = Y'C'ICY$.

24. Demostrar que toda matriz definida positiva A se puede expresar por $A = C'C$. (Los Problemas 23 y 24 completan la demostración del Teorema X.) *Ind.* Considerar $D'AD = I$.

25. Demostrar que si una matriz real simétrica A es definida positiva, también lo es A^p, siendo p un entero cualquiera.

26. Demostrar que si A es una matriz real simétrica y definida positiva, y B y C son tales que $B'AB = I$ y $A = C'C$, la matriz CB es ortogonal.

27. Demostrar que todo menor principal de una matriz A semidefinida positiva es igual o mayor que cero.

28. Demostrar que $ax_1^2 - 2bx_1x_2 + cx_2^2$ es definida positiva si, y solo si, $a > 0$ y $|A| = ac - b^2 > 0$.

29. Comprobar el efecto de la transformación en los Teoremas XX y XXI.

30. Aplicando el método de reducción de Kronecker, después de numerar las variables cuando sea necesario, transformar en forma canónica cada una de las siguientes:

(*a*) $X'\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}X$ (*c*) $X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}X$ (*e*) $X'\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}X$ (*g*) $X'\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}X$

(*b*) $X'\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}X$ (*d*) $X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}X$ (*f*) $X'\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}X$ (*h*) $X'\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}X$

Ind. En (*g*), volver a numerar las variables para obtener (*e*) y proceder como en el Problema 17(*d*).

Sol. (*a*) $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 1$; $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ (*e*) $p_0 = p_1 = 1$, $\alpha_{22} = -1$, $p_3 = -1$; $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$

(*b*) $4y_1^2 - 16y_2^2 + 16y_3^2$ (*f*) $p_0 = p_1 = 1$, $\alpha_{23} = -4$, $p_3 = -16$; $y_1^2 + 128y_2^2 - 128y_3^2$

(*c*) $y_1^2 - 4y_2^2 + 4y_3^2 - 3y_4^2$ (*g*) Véase (*e*).

(*d*) $y_1^2 - 8y_2^2$ (*h*) $4y_1^2 - 16y_2^2 + 16y_3^2 + 12y_4^2$

31. Demostrar que $q = x_1^2 - 6x_2^2 - 6x_3^2 - 3x_4^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_1x_4 + 13x_2x_3 - 11x_2x_4 + 9x_3x_4$ se puede descomponer en factores.

Capítulo 18

Formas hermíticas

FORMA HERMITICA. La forma definida por

$$(18.1) \qquad h \;=\; \bar{X}'HX \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\bar{x}_i x_j, \qquad \bar{h}_{ij} = h_{ji}$$

en la que H es una matriz hermítica y las componentes de X pertenecen al cuerpo de los números complejos se llama *forma hermítica*. La característica de H es la característica de la forma. Si dicha característica es $r < n$, la forma se denomina *singular*; en caso contrario, se llama *regular*.

Si H y X son matrices reales, (18.1) representa una forma cuadrática real; por tanto, los teoremas de este capítulo son análogos a los del capítulo anterior y sus demostraciones, con ligeras variantes, son las allí expuestas.

Como H es una matriz hermítica, h_{ii} y $h_{ii}\bar{x}_i x_i$ son reales. También se verifica para el par de productos $h_{ij}\bar{x}_i x_j$ y $h_{ji}\bar{x}_j x_i$,

$$h_{ij}\bar{x}_i x_j + h_{ji}\bar{x}_j x_i \;=\; h_{ij}\bar{x}_i x_j + \overline{h_{ij}\bar{x}_i x_j} \qquad (18.2)$$

que es real. Por consiguiente,

I. Los términos de una forma hermítica son reales.

La transformación lineal regular $X = BY$ reduce la forma hermítica (18.1) a otra forma hermítica:

$$(18.2) \qquad (\overline{BY})'H(BY) \;=\; \bar{Y}'(\bar{B}'HB)Y$$

Dos formas hermíticas en las mismas variables x_i son *equivalentes* si, y solo si, existe una transformación lineal regular $X = BY$ que, junto con $Y = IX$, reduce una de ellas a la otra. Puesto que $\bar{B}'HB$ y H son conjuntivas (congruentes en sentido hermítico), se tiene:

II. La característica de una forma hermítica es un invariante con respecto a toda transformación regular de las variables.

III. Dos formas hermíticas son equivalentes si, y solo si, sus matrices son conjuntivas (congruentes en sentido hermítico).

REDUCCION A FORMA CANONICA. Una forma hermítica (18.1) de característica r se puede reducir a la forma diagonal

$$(18.3) \qquad k_1\bar{y}_1 y_1 + k_2\bar{y}_2 y_2 + \cdots + k_r\bar{y}_r y_r, \qquad k_i \neq 0 \text{ y real}$$

mediante una transformación lineal regular $X = BY$. De (18.2) se deduce que B es un producto de matrices columna elementales y que $\bar{B}'$ es el producto, en orden contrario, de las matrices fila elementales conjugadas.

Mediante una nueva transformación, se puede reducir (18.3) a la forma canónica [véase (15.6)].

$$(18.4) \qquad \bar{z}_1 z_1 + \bar{z}_2 z_2 + \cdots + \bar{z}_p z_p - \bar{z}_{p+1} z_{p+1} - \cdots - \bar{z}_r z_r$$

de índice p y signatura $p - (r - p)$. Aquí también p depende de la forma dada y no de la transformación que reduce dicha forma a (18.4).

IV. Dos formas hermíticas en las mismas n variables son *equivalentes* si, y solo si, tienen la misma característica e igual índice o bien la misma característica e idéntica signatura.

FORMAS DEFINIDAS Y SEMIDEFINIDAS. Una forma hermítica regular $h = \bar{X}'HX$ en n variables se llama *definida positiva* si su característica y su índice son iguales a n. Así, pues, una forma hermítica definida positiva se puede reducir a $\bar{y}_1y_1 + \bar{y}_2y_2 + \ldots + \bar{y}_ny_n$, y para todo conjunto no trivial de valores de las variables x, $h > 0$.

Una forma hermítica singular, $h = \bar{X}'HX$, se llama *semidefinida positiva* si su característica y su índice son iguales, es decir, $r = p < n$. Una forma hermítica semidefinida positiva se puede reducir a $\bar{y}_1y_1 + \bar{y}_2y_2 + \ldots + \bar{y}_ry_r$, $r < n$, y para todo conjunto no trivial de valores de las variables x, $h > 0$.

La matriz H de una forma hermítica $\bar{X}'HX$ se llama definida positiva o semidefinida positiva según lo sea la forma hermítica correspondiente.

V. Una forma hermítica es definida positiva si, y solo si, existe una matriz regular C tal que $H = \bar{C}'C$.

VI. Si H es definida positiva, todo menor principal de H es positivo, y recíprocamente.

VII. Si H es semidefinida positiva, todo menor principal de H es nulo o positivo, y recíprocamente.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Reducir $\bar{X}'\begin{bmatrix} 1 & 1+2i & 2-3i \\ 1-2i & 5 & -4-2i \\ 2+3i & -4+2i & 13 \end{bmatrix}X$ a la forma canónica (18.4).

Del Problema 7, Capítulo 15,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+2i & 2-3i & 1 & 0 & 0 \\ 1-2i & 5 & -4-2i & 0 & 1 & 0 \\ 2+3i & -4+2i & 13 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} & i/\sqrt{10} \\ 0 & 0 & -1 & (-4-4i)/\sqrt{10} & i/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{array}\right]$$

Por tanto, la transformación lineal regular

$$X = BY = \begin{bmatrix} 1 & 2/\sqrt{10} & (-4+4i)/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & -i/\sqrt{10} \\ 0 & -i/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix} Y$$

se reduce a la forma hermítica dada a $\bar{y}_1y_1 + \bar{y}_2y_2 - \bar{y}_3y_3$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

2. Reducir a forma canónica las siguientes:

(a) $\bar{X}'\begin{bmatrix} 1 & 1+2i \\ 1-2i & 2 \end{bmatrix}X$ (c) $\bar{X}'\begin{bmatrix} 1 & 1-3i & 2-3i \\ 1+3i & 1 & 2+3i \\ 2+3i & 2-3i & 4 \end{bmatrix}X$

(b) $\bar{X}'\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}X$ (d) $\bar{X}'\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 3-2i \\ 1+i & 0 & 2-i \\ 3+2i & 2+i & 4 \end{bmatrix}X$

Ind. En (*b*), multiplicar la segunda fila de H por i y sumar a la primera fila.

Sol. (a) $X = \begin{bmatrix} 1 & (-1-2i)/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}Y$; $\bar{y}_1y_1 - \bar{y}_2y_2$

(b) $X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}Y$; $\bar{y}_1y_1 - \bar{y}_2y_2$

(c) $X = \begin{bmatrix} 1 & (-1+3i)/3 & -1 \\ 0 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}Y$; $\bar{y}_1y_1 - \bar{y}_2y_2$

(d) $X = \begin{bmatrix} 1 & (-1+i)/\sqrt{2} & (-1+3i)/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & (-3-2i)/\sqrt{10} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{10} \end{bmatrix}Y$; $\bar{y}_1y_1 - \bar{y}_2y_2 - \bar{y}_3y_3$

3. Hallar la transformación lineal $x = BY$, que, seguida de la transformación $Y = IX$, reduce (*a*) del Problema 2 a (*b*).

Sol. $X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & (-1-2i)/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}Y$

4. Demostrar que $\bar{X}'\begin{bmatrix} 1 & 1+i & -1 \\ 1-i & 6 & -3+i \\ -1 & -3-i & 11 \end{bmatrix}X$ es definida positiva y $\bar{X}'\begin{bmatrix} 1 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 3 & 5 \\ 1-2i & 5 & 10 \end{bmatrix}X$ es semidefinida positiva.

5. Demostrar los Teoremas V-VII.

6. Enunciar, para las formas hermíticas, los análogos a los Teoremas XIX-XXI del Capítulo 17 para las formas cuadráticas.

7. Demostrar que $\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \bar{x}_1 & h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ \bar{x}_2 & h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{x}_n & h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix} = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \eta_{ij}\bar{x}_i x_j$ siendo η_{ij} el adjunto de h_{ij} en $H = |h_{ij}|$.

Ind. Aplicar (4.3).

Capítulo 19

Ecuación característica de una matriz

INTRODUCCION. Sea $Y = AX$, siendo $A = [a_{ij}]$, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ una transformación lineal definida sobre un cuerpo F. En general, la transformación convierte un vector $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]'$ en otro $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]'$ relacionado con el primero por dicha transformación. Tratamos de estudiar aquí la posibilidad de que ciertos vectores X se transformen en λX, siendo λ un escalar perteneciente a F o a cualquier otro cuerpo del cual F sea un subcuerpo.

Todo vector X que se convierte mediante dicha transformación en el vector λX, es decir, todo vector tal que

(19.1) $$AX = \lambda X$$

se llama *vector invariante* respecto de la transformación.

ECUACION CARACTERISTICA. De (19.1), se obtiene

(19.2) $$\lambda X - AX \;=\; (\lambda I - A)X \;=\; \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots\cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots\cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots\cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

La condición necesaria y suficiente para que este sistema homogéneo de ecuaciones (19.2) tenga solución, distinta de la trivial, es que

(19.3) $$|\lambda I - A| \;=\; \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots\cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots\cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots\cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

El desarrollo de este determinante es un polinomio $\phi(\lambda)$ de grado n que se llama *polinomio característico* de la transformación o de la matriz A. La ecuación $\phi(\lambda) = 0$ recibe el nombre de *ecuación característica* o *secular* de A, y sus raíces, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, son las *raíces características* de A. Si $\lambda = \lambda_i$ es una raíz característica, entonces (19.2) admite soluciones, distintas de la trivial, que son las componentes de los *vectores invariantes* o *característicos* asociados a dicha raíz.

Las raíces características se llaman, normalmente, *valores propios* o *autovalores*; los vectores característicos correspondientes son los *vectores propios* o *autovectores*.

Ejemplo 1. Hallar los valores propios y los vectores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

La ecuación característica es $\begin{bmatrix} \lambda-2 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda-2 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$ cuyas raíces son $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$.

Para $\lambda = \lambda_1 = 5$, (19.2) se tiene

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{o bien} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

ya que $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ es equivalente de fila a $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Una solución es $x_1 = x_2 = x_3 = 1$; por tanto, asociado con el valor propio $\lambda = 5$ se tiene el espacio vectorial monodimensional generado por el vector $[1, 1, 1]'$. Todo vector $[k, k, k]'$ de este espacio es un vector propio de A.

Para $\lambda = \lambda_2 = 1$, (19.2) se tiene

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{o bien} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

Dos soluciones linealmente independientes son $(2, -1, 0)$ y $(1, 0, -1)$. Por tanto, asociado con el valor propio $\lambda = 1$ se tiene el espacio vectorial bidimensional generado por $X_1 = [2, -1, 0]'$ y $X_2 = [1, 0, -1]'$. Todo vector de la forma $hX_1 + kX_2 = [2h + k, -h, -k]'$ es un vector propio de A.

Véanse Problemas 1-2.

TEOREMAS GENERALES. En el Problema 3 se demuestra un caso particular ($k = 3$) del teorema general siguiente:

I. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son los valores propios distintos de una matriz A, y $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son los vectores propios, no nulos, asociados a aquéllos, dichos vectores X son linealmente independientes.

En el Problema 4 se demuestra un caso particular ($n = 3$) del teorema general siguiente:

II. La derivada de orden k de $\phi(\lambda) = |\lambda I - A|$ con respecto a λ, siendo A una matriz cuadrada de orden n, es igual a $k!$ veces la suma de los menores principales de orden $n - k$ de la matriz característica cuando $k < n$; si $k = n$ es $n!$, y si $k > n$ es igual a 0.

Consecuencia del Teorema II es:

III. Si λ_i es un valor propio de multiplicidad r de una matriz cuadrada A de orden n, el rango o característica de la matriz $\lambda_i I - A$ es igual o mayor que $n - r$, y la dimensión del espacio vectorial propio asociado es igual o menor que r.

Véase Problema 5.

En particular:

III'. Si λ_i es un valor propio simple de una matriz cuadrada A de orden n, el rango o característica de la matriz $\lambda_i I - A$ es igual a $n - 1$, y la dimensión del espacio vectorial asociado es 1.

Ejemplo 2. En la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ del Ejemplo 1, la ecuación característica es $\phi(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda - 1)^2 = 0$.

El vector propio $[1, 1, 1]'$ asociado al valor propio $\lambda = 5$, y los vectores propios $[2, -1, 0]'$ y $[1, 0, -1]'$, linealmente independientes, asociados al valor propio múltiple $\lambda = 1$, forman un conjunto linealmente independiente (véase Teorema I).

El espacio vectorial propio asociado al valor propio simple $\lambda = 5$ es de dimensión 1, y el asociado a la raíz $\lambda = 1$, de multiplicidad 2, es de dimensión 2 (véanse Teoremas III y III').

Véase también Problema 6.

Como todo menor principal de A' es igual al correspondiente menor principal de A, según (19.4) del Problema 1, se tiene:

IV. Las matrices A y A' tienen las mismas raíces características, es decir, los mismos valores propios.

Asimismo, como todo menor principal de A es el conjugado del menor principal correspondiente de A, resulta:

V. Los valores propios de $\bar{A}$ y de $\bar{A}'$ son los complejos conjugados de los valores propios de la matriz A.

Comparando las ecuaciones características, se deduce:

VI. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de una matriz cuadrada A de orden n, y k un escalar cualquiera, $k\lambda_1, k\lambda_2, \ldots, k\lambda_n$ son las raíces características o valores propios de la matriz kA.

VII. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de una matriz cuadrada A de orden n, y k es un escalar cualquiera, $\lambda_1 - k, \lambda_2 - k, \ldots, \lambda_n - k$ son las raíces características o valores propios de la matriz $A - kI$.

En el Problema 7 se demuestra el teorema siguiente:

VIII. Si α es un valor propio de una matriz A regular, $|A|/\alpha$ es un valor propio o raíz característica de adj A.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Siendo A una matriz cuadrada de orden n, demostrar:

$$(19.4) \qquad \phi(\lambda) \;=\; |\lambda I - A| \;=\; \lambda^n + s_1\lambda^{n-1} + s_2\lambda^{n-2} + \ldots + s_{n-1}\lambda + (-1)^n|A|$$

en donde s_m, $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$, es $(-1)^m$ veces la suma de todos los menores principales cuadrados de orden m de la matriz dada A.

Expresemos $|\lambda I - A|$ en la forma

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & 0 - a_{12} & \ldots\ldots & 0 - a_{1n} \\ 0 - a_{21} & \lambda - a_{22} & \ldots\ldots & 0 - a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 - a_{n1} & 0 - a_{n2} & \ldots\ldots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

en donde cada elemento es un binomio y supongamos que el desarrollo del determinante se ha expresado por la suma de 2^n determinantes, de acuerdo con el Teorema VIII, Capítulo 3. Uno de estos determinantes tiene todos sus elementos nulos, salvo los de la diagonal principal que son iguales a λ. El valor de este determinante es λ^n. Otro de ellos no contiene ningún λ y vale $(-1)^n|A|$, y el resto de los determinantes constan de m columnas $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$, de $-A$, de las cuales $n - m$ contienen un elemento no nulo igual a λ.

Consideremos uno de estos determinantes y supongamos que sus columnas $i_1, i_2, \ldots, i_m$ son columnas de $-A$.

Después de un número par de permutaciones de filas y columnas contiguas se llega al determinante

$$(-1)^m \left|\begin{array}{cccc:cccc} a_{i_1,i_1} & a_{i_1,i_2} & \cdots & a_{i_1,i_m} & & & & \\ a_{i_2,i_1} & a_{i_2,i_2} & \cdots & a_{i_2,i_m} & & & 0 & \\ \multicolumn{4}{c:}{\dotfill} & & & & \\ a_{i_m,i_1} & a_{i_m,i_2} & \cdots & a_{i_m,i_m} & & & & \\ \hdashline & & & & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ a_{i_n,i_1} & a_{i_n,i_2} & \cdots & a_{i_n,i_m} & & \cdots & & \\ & & & & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{array}\right| = (-1)^m \left|A^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\right| \lambda^{n-m},$$

siendo $\left|A^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\right|$ un menor principal cuadrado de orden m de A. Por tanto,

$$s_m = (-1)^m \sum_{\rho} \left|A^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\right|$$

siendo $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ una de las $\rho = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\,2\ldots m}$ combinaciones de los elementos $1, 2, \ldots, n$, tomados de m en m.

2. Aplicar (19.4) del Problema 1 para desarrollar $|\lambda I - A|$, siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$.

Se tiene

$$s_1 = 1 + 0 - 2 + 6 = 5$$

$$s_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 8 - 3 + 2 - 5 + 16 - 9 = 9$$

$$s_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -3 + 16 - 8 + 2 = 7$$

$$|A| = 2$$

Por tanto, $|\lambda I - A| = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2.$

3. Sean $\lambda_1, X_1; \lambda_2, X_2; \lambda_3, X_3$ los valores y vectores propios de una matriz A. Demostrar que X_1, X_2, X_3 son linealmente independientes.

Lo vamos a demostrar por reducción al absurdo. Supongamos que existen los escalares a_1, a_2, a_3, no todos nulos, de manera que

(i) $$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 = 0$$

Multiplicando (i) por A y recordando que $AX_i = \lambda_i X_i$; se obtiene

(ii) $$a_1 A X_1 + a_2 A X_2 + a_3 A X_3 = a_1\lambda_1 X_1 + a_2\lambda_2 X_2 + a_3\lambda_3 X_3 = 0$$

Multiplicando (ii) por A,

(iii) $$a_1\lambda_1^2 X_1 + a_2\lambda_2^2 X_2 + a_3\lambda_3^2 X_3 = 0$$

Las ecuaciones (i), (ii), (iii) se pueden escribir en la forma matricial

(iv) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 X_1 \\ a_2 X_2 \\ a_3 X_3 \end{bmatrix} = 0$$

Del Problema 5, Capítulo 3, se deduce que $B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \neq 0$; por tanto, existe la matriz inversa B^{-1}.

Multiplicando (iv) por B^{-1} se obtiene $[a_1X_1, a_2X_2, a_3X_3]' = 0$. Pero esto exige que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, en contra de la hipótesis.

En resumen, X_1, X_2, X_3 son vectores linealmente independientes.

4. De $\phi(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix}$ se obtiene

$$\phi'(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{13} \\ -a_{31} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} \end{vmatrix}$$

= La suma de los menores principales de segundo orden de $\lambda I - A$

$$\phi''(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{31} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{13} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\{(\lambda-a_{11}) + (\lambda-a_{22}) + (\lambda-a_{33})\}$$

= 2! veces la suma de los menores principales de orden uno de $\lambda I - A$

$$\phi'''(\lambda) = 3!$$

También $\phi^{(iv)}(\lambda) = \phi^{(v)}(\lambda) = \ldots = 0$.

5. Demostrar que si λ_i es un valor propio de orden de multiplicidad r correspondiente a una matriz cuadrada A de orden n, el rango o característica de la matriz $\lambda_i I - A$ es igual o mayor que $n - r$, y la dimensión del espacio vectorial propio asociado es igual o menor que r.

Como λ_i es una raíz de la ecuación $\phi(\lambda) = 0$, de multiplicidad r, $\phi(\lambda_i) = \phi'(\lambda_i) = \phi''(\lambda_i) = \cdots = \phi^{(r-1)}(\lambda_i) = 0$ y $\phi^{(r)}(\lambda_i) \neq 0$. Ahora bien, $\phi^{(r)}(\lambda_i)$ es $r!$ veces la suma de los menores principales de orden $n - r$ de $\lambda_i I - A$; luego, como no son nulos todos los menores principales, la característica de la matriz $\lambda_i I - A$ es, al menos, $n - r$. Según (11.2), la dimensión del espacio propio asociado de $\lambda_i I - A$, es decir, de su espacio nulo, es como máximo r.

6. Hallar los valores propios o raíces características y los espacios vectoriales propios de la matriz del Problema 2.

Los valores propios son 1, 1, 1, 2.

Para $\lambda = 2$: $\lambda I - A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es de característica 3; su espacio nulo es de dimensión 1. El espacio vectorial propio es el generado por $[2, 3, -2, -3]'$.

Para $\lambda = 1$: $\lambda I - A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es de característica 3; su espacio nulo es de dimensión 1. El espacio vectorial propio es el generado por $[3, 6, -4, -5]'$.

7. Demostrar que si α es un valor propio no nulo de la matriz cuadrada A, regular y de orden n, entonces $|A|/\alpha$ es un valor propio de la matriz adj A.

Del Problema 1,

$$\text{(i)} \qquad \alpha^n + s_1\alpha^{n-1} + \ldots + s_{n-1}\alpha + (-1)^n|A| = 0$$

en donde s_i, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ es $(-1)^i$ veces la suma de todos los menores principales cuadrados de orden i de A y

$$|\mu I - \text{adj } A| = \mu^n + S_1\mu^{n-1} + \ldots + S_{n-1}\mu + (-1)^n|\text{adj } A|$$

en donde S_j, $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ es $(-1)^j$ veces la suma de todos los menores principales cuadrados de orden j de A.

De (6.4) y de las definiciones de s_i y S_j resulta $\quad S_1 = (-1)^n s_{n-1},\ S_2 = (-1)^n|A|s_{n-2},\ \ldots,\ S_{n-1} = (-1)^n|A|^{n-2}s_1$,

y $\quad |\text{adj } A| = |A|^{n-1}$; luego

$$|\mu I - \text{adj } A| = (-1)^n\{(-1)^n\mu^n + s_{n-1}\mu^{n-1} + s_{n-2}|A|\mu^{n-2} + \cdots + s_2|A|^{n-3}\mu^2 + s_1|A|^{n-2}\mu + |A|^{n-1}\}$$

y

$$|A|^{1-n}|\mu I - \text{adj } A| = (-1)^n\{1 + s_1\left(\frac{\mu}{|A|}\right) + \ldots + s_{n-1}\left(\frac{\mu}{|A|}\right)^{n-1} + (-1)^n\left(\frac{\mu}{|A|}\right)^n|A|\} = f(\mu)$$

Ahora bien,

$$f\left(\frac{|A|}{\alpha}\right) = (-1)^n\{1 + s_1\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \ldots + s_{n-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1} + (-1)^n\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n|A|\}$$

y de (i)

$$\alpha^n f\left(\frac{|A|}{\alpha}\right) = (-1)^n\{\alpha^n + s_1\alpha^{n-1} + \ldots + s_{n-1}\alpha + (-1)^n|A|\} = 0$$

Por tanto, $|A|/\alpha$ es un valor propio de adj A.

8. Demostrar que la ecuación característica de una matriz ortogonal P es una ecuación recíproca.

Se tiene

$$\phi(\lambda) = |\lambda I - P| = |\lambda PIP' - P| = |-P\lambda(\tfrac{1}{\lambda}I - P')| = \pm\lambda^n|\tfrac{1}{\lambda}I - P| = \pm\lambda^n\phi(\tfrac{1}{\lambda})$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

9. Dadas las matrices siguientes, hallar sus valores propios y una base del espacio vectorial propio.

$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad (c)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad (e)\ \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad (g)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad (i)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$(b)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad (d)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad (f)\ \begin{bmatrix} -3 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad (h)\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad (j)\ \begin{bmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{bmatrix}$

$(k)\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad (l)\ \begin{bmatrix} 5 & 6 & -10 & 7 \\ -5 & -4 & 9 & -6 \\ -3 & -2 & 6 & -4 \\ -3 & -3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ $\quad (m)\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

Sol. (a) $1,\ [1,-1,0]'$; $\ 2,\ [2,-1,-2]'$; $\ 3,\ [1,-1,-2]'$
(b) $-1,\ [1,0,1]'$; $\ 2,\ [1,3,1]'$; $\ 1,\ [3,2,1]'$
(c) $1,\ [1,1,-1]'$; $\ 2,\ [2,1,0]'$
(d) $1,\ [1,1,1]'$

(*e*) $2, [2, -1, 0]'$; $0, [4, -1, 0]'$; $1, [4, 0, -1]'$
(*f*) $0, [3, -1, 0]'$; $1, [12, -4, -1]'$
(*g*) $1, [1, 0, -1]', [0, 1, -1]'$; $3, [1, 1, 0]'$
(*h*) $0, [1, -1, 0]'$; $1, [0, 0, 1]'$; $4, [1, 1, 0]'$
(*i*) $-1, [0, 1, -1]'$; $i, [1+i, 1, 1]'$; $-i, [1-i, 1, 1]'$
(*j*) $2, [1, 0, 1]'$; $1+i, [0, 1, 0]'$; $2-2i, [1, 0, -1]'$
(*k*) $1, [1, 0, -1, 0]', [1, -1, 0, 0]'$; $2, [-2, 4, 1, 2]'$; $3, [0, 3, 1, 2]'$
(*l*) $1, [1, 2, 3, 2]'$; $-1, [-3, 0, 1, 4]'$
(*m*) $0, [2, 1, 0, 1]'$; $1, [3, 0, 1, 4]'$; $-1, [3, 0, 1, 2]'$

10. Demostrar que si X es un vector unitario y $AX = \lambda X$, se verifica: $X'AX = \lambda$.

11. Demostrar que los valores propios de una matriz diagonal son los elementos de su diagonal principal y que los vectores propios asociados son los vectores unitarios o elementales E_i.

12. Demostrar los Teoremas I y VI.

13. Demostrar el Teorema VII.
Ind. Si $|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)$, $|(\lambda + k)I - A| = (\lambda + k - \lambda_1)(\lambda + k - \lambda_2)\ldots(\lambda + k - \lambda_n)$.

14. Demostrar que los valores propios de la suma directa diag $(A_1, A_2, \ldots, A_s)$ son las raíces características de $A_1, A_2, \ldots, A_s$.

15. Demostrar que si A y $N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ son matrices cuadradas de orden n y $r < n$, se verifica que NA y AN tienen la misma ecuación característica.

16. Demostrar que si la característica de una matriz cuadrada A de orden n es igual a r, al menos $n - r$ de sus valores propios son nulos.

17. Demostrar que si A y B son dos matrices cuadradas de orden n y A es regular, las matrices $A^{-1}B$ y BA^{-1} tienen los mismos valores propios.

18. Demostrar que B y $A^{-1}BA$, siendo A y B las matrices del Problema 17, tienen los mismos valores propios.

19. Siendo A una matriz cuadrada de orden n demostrar, a partir de la expresión $|\lambda I - A^{-1}| = |-\lambda A^{-1}(\frac{1}{\lambda}I - A)|$, que $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \ldots, 1/\lambda_n$ son los valores propios de la matriz A^{-1}.

20. Demostrar que el valor absoluto de las raíces de la ecuación característica de una matriz ortogonal P son iguales a 1.
Ind. Si λ_i, X_i son un valor propio y un vector propio asociado de P, entonces $X_i'X_i = (PX_i)'(PX_i) = \lambda_i\lambda_i X_i X_i$.

21. Demostrar que si $\lambda_i \neq \pm 1$ es un valor propio y X_i es el vector propio asociado de una matriz ortogonal P, se verifica: $X_i'X_i = 0$.

22. Demostrar que el valor absoluto de los valores propios de que una matriz unitaria es 1.

23. Deducir, aplicando el Teorema II,

$$\phi(0) = (-1)^n|A|$$

$$\phi'(0) = (-1)^{n-1} \text{ veces la suma de los menores principales de orden } n-1 \text{ de } A$$

. . . .

$$\phi^{(r)}(0) = (-1)^{n-r} r! \text{ veces la suma de los menores principales de orden } n-r \text{ de } A$$

. . . .

$$\phi^{(n)}(0) = n!$$

24. Aplicar el Problema 23 siendo

$$\phi(\lambda) = \phi(0) + \phi'(0)\cdot\lambda + \frac{1}{2!}\phi''(0)\cdot\lambda^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\phi^{(n)}(0)\cdot\lambda^n$$

para producir (19.4).

Capítulo 20

Semejanza

DOS MATRICES CUADRADAS A y B DE ORDEN n, definidas sobre un cuerpo F, son *semejantes* sobre dicho cuerpo si existe una matriz regular R, también definida sobre F, tal que

$$B = R^{-1}AR \tag{20.1}$$

Ejemplo 1. Las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ del Ejemplo 1, Capítulo 19, y

$$B = R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

son semejantes.

La ecuación característica $(\lambda - 5)(\lambda - 1)^2 = 0$, de la matriz B es también la ecuación característica de A.

Un vector propio de B asociado con el valor $\lambda = 5$ es $Y_1 = [1, 0, 0]'$ y se puede ver fácilmente que $X_1 = RY_1 = [1, 1, 1]'$ es un vector propio de A asociado con el mismo valor propio $\lambda = 5$. Se deja para el alumno la demostración de que $Y_2 = [7, -2, 0]'$ e $Y_3 = [17, -3, -2]'$ son un par de vectores propios, linealmente independientes, de la matriz B asociados con $\lambda = 1$, mientras que $X_2 = RY_2$ y $X_3 = RY_3$ son un par de vectores propios, linealmente independientes, de la matriz A asociados con la misma raíz $\lambda = 1$.

El Ejemplo 1 ilustra los siguientes teoremas:

I. Dos matrices semejantes tienen los mismos valores propios.

Véase la demostración en el Problema 1.

II. Si Y es un vector propio de $B = R^{-1}AR$ correspondiente al valor propio λ_i de la ecuación característica de B, entonces $X = RY$ es un vector propio de A correspondiente al mismo valor propio λ_i de A.

Véase la demostración en el Problema 2.

MATRIZ DIAGONAL. Los valores propios de una matriz diagonal, $D = \text{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, son los elementos de su diagonal principal.

Una matriz diagonal tiene siempre n vectores propios linealmente independientes. Los vectores unitarios E_i forman un conjunto de tales vectores, ya que $DE_i = a_iE_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Como consecuencia, se deduce (véanse las demostraciones en los Problemas 3 y 4):

III. Toda matriz cuadrada A de orden n semejante a una matriz diagonal tiene n vectores propios linealmente independientes.

IV. Si una matriz cuadrada A de orden n tiene n vectores propios linealmente independientes es semejante a una matriz diagonal.

Véase Problema 5.

En el Problema 6 se demuestra el teorema siguiente:

V. Sobre un cuerpo F, la condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada A de orden n sea semejante a una matriz diagonal es que $\lambda I - A$ se pueda descomponer en factores sobre F y que la multiplicidad de cada valor λ_i sea igual a la dimensión del espacio nulo de $\lambda_i I - A$.

No toda matriz cuadrada de orden n es semejante a una matriz diagonal. La matriz del Problema 6, Capítulo 19, es un ejemplo. En dicha matriz, la dimensión del espacio nulo de $\lambda I - A$, correspondiente a la raíz triple $\lambda = 1$, es igual a 1.

Sin embargo, se puede demostrar que:

VI. Toda matriz cuadrada A de orden n es semejante a una matriz triangular cuyos elementos de la diagonal principal son los valores propios de A.

Véanse Problemas 7-8.

Como casos particulares se tiene:

VII. Si A es una matriz real, cuadrada y de orden n, cuyos valores propios son todos reales, existe una matriz ortogonal P de forma que $P^{-1}AP = P'AP$ es una matriz triangular y sus elementos de la diagonal principal son las raíces características de A.

Véanse Problemas 9-10.

VIII. Si A es una matriz cuadrada de elementos complejos o bien una matriz cuadrada real de valores propios complejos, existe una matriz unitaria U de forma que $U^{-1}AU = \bar{U}'AU$ es triangular y los elementos de su diagonal principal son las raíces características de A.

Véase Problema 11.

Las matrices A y $P^{-1}AP$ del Teorema VII se llaman semejantes respecto de la ortogonalidad o *semejantes ortogonalmente*.

Las matrices A y $U^{-1}AU$ del Teorema VIII se llaman *semejantes unitariamente*.

MATRICES DIAGONALIZABLES. Cualquier matriz A semejante a una matriz diagonal se llama, y es, diagonalizable. El Teorema IV es fundamental en el estudio de algunos tipos de matrices susceptibles de diagonalizar y se verá en el próximo capítulo.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demostrar que dos matrices semejantes tienen los mismos valores propios.

Sean A y $B = R^{-1}AR$ las matrices semejantes; entonces,

(i) $$\lambda I - B = \lambda I - R^{-1}AR = R^{-1}\lambda IR - R^{-1}AR = R^{-1}(\lambda I - A)R$$

y

$$|\lambda I - B| = |R^{-1}|\cdot|\lambda I - A|\cdot|R| = |\lambda I - A|$$

Por tanto, A y B tienen la misma ecuación característica y los mismos valores propios.

2. Demostrar que si Y es un vector propio de $B = R^{-1}AR$ correspondiente al valor propio λ_i, entonces $X = RY$ es un vector propio de A correspondiente al mismo valor λ_i de A.

Por hipótesis, $BY = \lambda_i Y$ y $RB = AR$; luego

$$AX = ARY = RBY = R\lambda_i Y = \lambda_i RY = \lambda_i X$$

y X es un vector propio de A correspondiente al valor propio λ_i.

3. Demostrar que una matriz cualquiera A semejante a una matriz diagonal tiene n vectores propios linealmente independientes.

Sea $R^{-1}AR = \text{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = B$. Los vectores unitarios o elementales $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son vectores propios de B. Según el Teorema II, los vectores $X_j = RE_j$ son vectores propios de A. Como R es una matriz regular, sus vectores columna son linealmente independientes.

4. Demostrar que si una matriz cuadrada A de orden n tiene n vectores propios linealmente independientes es semejante a una matriz diagonal.

Sean los n vectores propios linealmente independientes $X_1, X_2, \ldots, X_n$, asociados respectivamente a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, de forma que $AX_i = \lambda_i X_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Si $R = [X_1, X_2, \ldots, X_n]$,

$$AR = [AX_1, AX_2, \ldots, AX_n] = [\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \ldots, \lambda_n X_n]$$

$$= [X_1, X_2, \ldots, X_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} = R \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

Por tanto, $R^{-1}AR = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

5. Un conjunto de vectores propios linealmente independientes de la matriz A del Ejemplo 1, Capítulo 19, es

$$X_1 = [1, 1, 1]', \quad X_2 = [2, -1, 0]', \quad X_3 = [1, 0, -1]'$$

Tomemos $R = [X_1, X_2, X_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; entonces, $R^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ y

$$R^{-1}AR = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

una matriz diagonal.

6. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada A de orden n definida sobre un cuerpo F sea semejante a una matriz diagonal es que $\lambda I - A$ se pueda descomponer en factores, pertenecientes a F, y la multiplicidad de cada valor propio λ_i sea igual a la dimensión del espacio nulo de $\lambda_i I - A$.

Supongamos, en primer lugar, que $R^{-1}AR = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = B$, y que k de estas raíces son iguales a λ_i. Entonces, $\lambda_i I - B$ tiene k elementos de su diagonal principal iguales a cero y su característica es igual a $n - k$; la dimensión de su espacio nulo es $n - (n - k) = k$. Ahora bien, $\lambda_i I - A = R(\lambda_i I - B)R^{-1}$, luego $\lambda_i I - A$ tiene la misma característica, $n - k$, y la misma nulidad, k, que $\lambda_i I - B$.

Recíprocamente, sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ los distintos valores propios de A de multiplicidades $r_1, r_2, \ldots, r_s$, respectivamente, siendo $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n$, y sean $V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_s}$ los espacios vectoriales propios asociados a aquéllos. Tomemos $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{ir_i}$ como base del espacio vectorial propio asociado V_{r_i}, $(i = 1, 2, \ldots, s)$, y supongamos que existen los escalares a_{ij}, no todos nulos, de forma que

(i) $$(a_{11}X_{11} + a_{12}X_{12} + \ldots + a_{1r_1}X_{1r_1}) + (a_{21}X_{21} + a_{22}X_{22} + \ldots + a_{2r_2}X_{2r_2})$$
$$+ \ldots + (a_{s1}X_{s1} + a_{s2}X_{s2} + \ldots + a_{sr_s}X_{sr_s}) = 0$$

Como cada vector $Y_i = (a_{i1}X_{i1} + a_{i2}X_{i2} + \cdots + a_{ir_i}X_{ir_i}) = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, s)$ es un vector propio, según el Teorema I, todos ellos serán linealmente independientes. Ahora bien, esto es contrario a (i); por tanto, los vectores X constituyen una base de V_n y, según el Teorema IV, A es semejante a una matriz diagonal.

7. Demostrar que toda matriz cuadrada A de orden n es semejante a una matriz triangular cuyos elementos de la diagonal principal son los valores propios de A.

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de A y X_1 un vector propio de A correspondiente a la raíz λ_1. Tomemos X_1 como primera columna de una matriz regular Q_1 cuyas restantes columnas sean términos cualesquiera, pero de forma que $|Q_1| \neq 0$. La primera columna de AQ_1 es $AX_1 = \lambda_1 X_1$ y la primera columna de $Q_1^{-1}AQ_1$ es $Q_1^{-1}\lambda_1 X_1$. Ahora bien, ésta es la primera columna de $Q_1^{-1}\lambda_1 Q_1$, eso es, $[\lambda_1, 0, \ldots, 0]'$. Por tanto,

(i) $$Q_1^{-1}AQ_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

siendo A_1 de orden $n-1$.

Como $|\lambda I - Q_1^{-1}AQ_1| = (\lambda - \lambda_1)|\lambda I - A_1|$ y $Q_1^{-1}AQ_1$ y A tienen los mismos valores propios, se deduce que las raíces características de A_1 son $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$. Si $n = 2$, $A_1 = [\lambda_2]$ y el teorema queda demostrado con $Q = Q_1$.

Sea, ahora, X_2 un vector propio de A_1 correspondiente al valor λ_2. Tomemos X_2 como primera columna de una matriz regular Q_2 cuyas restantes columnas sean términos cualesquiera, pero de forma que $|Q_2| \neq 0$. En estas condiciones,

(ii) $$Q_2^{-1}A_1Q_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

siendo A_2 de orden $n-2$. Si $n = 3$, $A_2 = [\lambda_3]$, y el teorema queda demostrado con $Q = Q_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$

Repitiendo la marcha anterior al menos $n-1$ veces se obtiene,

(iii) $$Q = Q_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{bmatrix}$$

de forma que $Q^{-1}AQ$ es triangular y tiene como elementos de la diagonal principal los valores propios de A.

8. Hallar una matriz regular Q de forma que $Q^{-1}AQ$ sea una matriz triangular, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 8 & -9 \\ 6 & -1 & 5 & -5 \\ -5 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

En este caso, $|\lambda I - A| = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 4)$ y los valores propios son $1, -1, 2, -2$. Tomemos el vector propio $[5, 5, -1, 3]'$ correspondiente al valor propio 1 como primera columna de una matriz Q_1 regular cuyas restantes columnas están formadas por vectores unitarios, es decir,

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En estas condiciones,

$$Q_1^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad Q_1^{-1}AQ_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & -1 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & -15 & 20 \\ 0 & 4 & -12 & 16 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

Un valor propio de A_1 es -1 y su vector propio asociado es $[4, 0, -1]'$. Tomemos $Q_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

entonces $$Q_2^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad Q_2^{-1}A_1Q_2 = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -20 & -15 & 20 \\ 0 & -48 & 64 \\ 0 & -11 & 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

Un valor propio de A_2 es 2 y su vector propio asociado es $[8, 11]'$. Tomemos $Q_3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$; entonces

$$Q_3^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -11 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad Q_3^{-1}A_2Q_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2/5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Así, pues,

$$Q = Q_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & -1 & 11 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q^{-1} = \frac{1}{160}\begin{bmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ -40 & 40 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 20 & 0 \\ -180 & 40 & -220 & 160 \end{bmatrix}$$

y

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 & -9/5 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

9. Si A es una matriz cuadrada real de orden n cuyos valores propios son todos reales, existe una matriz ortogonal P de forma que $P^{-1}AP$ es triangular y sus elementos de la diagonal principal son los valores propios de A.

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de la matriz A. Como son todos reales, por hipótesis, también lo serán los vectores propios asociados a ellos. Como en el Problema 7, sea Q_1 una matriz cuya primera columna sea el vector propio correspondiente a λ_1. Aplicando el método de Gram-Schmidt obtenemos, a partir de Q_1, una matriz ortogonal P_1 cuya primera columna es proporcional a la correspondiente de Q_1. Por tanto,

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

siendo A_1 de orden $n-1$ y $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ sus valores propios.

Formemos, a continuación, la matriz Q_2 que tenga como primera columna un vector propio de A_1 correspondiente a la raíz λ_2, y aplicando el método de Gram-Schmidt obtendremos una matriz ortogonal P_2. Entonces,

$$P_2^{-1}A_1P_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

Repitiendo el proceso, se llegaría a la matriz ortogonal

$$P = P_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

siendo $P^{-1}AP$ triangular y cuyos elementos de la diagonal principal son los valores propios de A.

10. Hallar la matriz ortogonal P de forma que

$$P^{-1}AP = P^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}P$$

sea triangular y cuyos elementos de la diagonal principal sean los valores propios de A.

Del Ejemplo 1, Capítulo 19, los valores propios son 5, 1, 1, y un vector propio correspondiente a $\lambda = 1$ es $[1, 0, -1]'$.

Tomemos $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; aplicando el método de Gram-Schmidt se obtiene

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

que es una matriz ortogonal cuya primera columna es proporcional a $[1, 0, -1]'$.

Por tanto,

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

Ahora bien, $\lambda = 1$ es un valor propio de A_1 y $[1, -\sqrt{2}]'$ es su vector propio asociado. De $Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$, se obtiene, aplicando el método de Gram-Schmidt, la matriz ortogonal. $P_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 2\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ Por tanto,

$$P = P_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

es una matriz ortogonal y $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

11. Hallar una matriz unitaria U de forma que $U^{-1}AU$ sea triangular y cuyos elementos en la diagonal principal sean los valores propios de A, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 5+5i & -1+i & -6-4i \\ -4-6i & 2-2i & 6+4i \\ 2+3i & -1+i & -3-2i \end{bmatrix}$$

La ecuación característica de A es $\lambda(\lambda^2 + (-4-i)\lambda + 5 - i) = 0$ cuyas raíces son $0, 1-i, 3+2i$. Para $\lambda = 0$, tomemos $[1, -1, 1]'$ como vector propio asociado y formemos la matriz $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Por el método de Gram-Schmidt se llega a la matriz unitaria

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Ahora bien,

$$U_1^{-1}AU_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{2}(1-i) & -(26+24i)/\sqrt{6} \\ 0 & 1-i & (2+3i)/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3+2i \end{bmatrix}$$

con lo cual, para la matriz Q_1 elegida, la matriz pedida es $U = U_1$.

12. Hallar una matriz ortogonal P de forma que $P^{-1}AP$ sea triangular y cuyos elementos de la diagonal principal sean los valores propios de A, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Los valores propios son 2, 3, 6, y los vectores propios asociados pueden ser $[1, 0, -1]'$, $[1, 1, 1]'$ y $[1, -2, 1]'$, respectivamente. Estos tres vectores son linealmente independientes y mutuamente ortogonales. Tomando

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

se obtiene $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(2, 3, 6)$. En el próximo capítulo se estudiarán más a fondo las matrices reales simétricas.

PROBLEMAS PROPUESTOS

13. Hallar una matriz ortogonal P de forma que $P^{-1}AP$ sea triangular y cuyos elementos de la diagonal principal sean los valores propios de A, siendo A la matriz de los Problemas 9 (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) del Capítulo 19.

Sol. (*a*) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 0 & -4/3\sqrt{2} & 1/3 \end{bmatrix}$, (*c*) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

(*b*) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, (*d*) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

14. Explicar por qué son semejantes las matrices (*a*) y (*b*) del Problema 13, mientras que (*c*) y (*d*) no lo son. Estudiar las matrices (*a*)-(*m*) del Problema 9, Capítulo 19, y determinar aquellas que son semejantes a una matriz diagonal y tienen elementos de la diagonal principal los valores propios correspondientes.

15. Siendo A la matriz del Problema 9 (*i*), (*j*), Capítulo 19, hallar una matriz unitaria U de forma que $U^{-1}AU$ sea triangular y cuyos elementos en la diagonal principal sean los valores propios de A.

Sol. (*i*) $\begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -(1+i)/2 \\ 1/\sqrt{2} & (1-i)/2\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ -1/\sqrt{2} & (1-i)/2\sqrt{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, (*j*) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

16. Demostrar que si A es una matriz real y simétrica y P es ortogonal la matriz $P^{-1}AP$ es real y simétrica.

17. Modificando convenientemente el Problema 9, demostrar el Teorema VIII.

18. Siendo B_i y C_i matrices semejantes para $(i = 1, 2, \ldots, n)$, demostrar que

$$B = \operatorname{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_m) \quad \text{y} \quad C = \operatorname{diag}(C_1, C_2, \ldots, C_m)$$

son semejantes. *Ind.* Suponer $C_i = R_i^{-1}B_iR_i$ y formar $R = \operatorname{diag}(R_1, R_2, \ldots, R_m)$.

19. Sean $B = \operatorname{diag}(B_1, B_2)$, $C = \operatorname{diag}(B_2, B_1)$, $I = \operatorname{diag}(I_1, I_2)$, con I_1 e I_2 del mismo orden que B_1 y B_2, respectivamente, y $R = \begin{bmatrix} 0 & I_1 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix}$. Demostrar que $R^{-1}BR = C$ para probar que B y C son semejantes.

20. Generalizar el resultado del Problema 19 a la matriz $B = \operatorname{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_m)$ siendo C una matriz cualquiera obtenida ordenando B_i según la diagonal.

21. Demostrar que si A y B son dos matrices cuadradas de orden n, las matrices AB y BA tienen los mismos valores propios.

Ind. Sea $PAQ = N$; entonces $PABP^{-1} = NQ^{-1}BP^{-1}$ y $Q^{-1}BAQ = Q^{-1}BP^{-1}N$. (Véase Problema 15, Capítulo 19.)

22. Siendo $A_1, A_2, \ldots, A_s$ matrices regulares del mismo orden, demostrar que $A_1A_2 \ldots A_s$, $A_2A_3 \ldots A_sA_1$, $A_3 \ldots A_s A_1A_2, \ldots$, tienen la misma ecuación característica.

23. Siendo $Q^{-1}AQ = B$ y B una matriz triangular cuyos elementos de la diagonal principal son los valores propios, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, de A, demostrar:

(*a*) $Q^{-1}A^kQ$ es una matriz triangular y sus elementos de la diagonal principal son los valores propios de A elevados a la potencia k.

(*b*) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = \text{traza } A^k$.

24. Demostrar que la semejanza es una relación de equivalencia.

25. Demostrar que $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ tienen los mismos valores propios, pero no son semejantes.

Capítulo 21

Matrices semejantes a una matriz diagonal

MATRICES SIMETRICAS REALES. Las matrices simétricas definidas sobre el cuerpo de los números reales y las hermíticas sobre el de los complejos se pueden estudiar conjuntamente, aunque nosotros lo haremos por separado. En lo que se refiere a las primeras, verifican los teoremas siguientes:

I. Los valores propios o raíces características de una matriz simétrica real son todos reales.

Véase Problema 1.

II. Los vectores propios asociados a los valores propios de una matriz simétrica real son mutuamente ortogonales.

Véase Problema 2.

Si A es una matriz real y simétrica, los B_i del Problema 9, Capítulo 20, son nulos, por tanto,

III. Si A es una matriz cuadrada simétrica y real de orden n cuyos valores propios son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, existe una matriz ortogonal P tal que $P'AP = P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

De este Teorema III se deduce:

IV. Si λ_i es un valor propio de índice de multiplicidad r_i correspondiente a una matriz simétrica real existe un espacio propio, asociado a λ_i, de dimensión r_i.

El Teorema III aplicado a una forma cuadrática real dice:

V. Toda forma cuadrática real $q = X'AX$ se puede reducir, por medio de una transformación ortogonal $X = BY$, a la forma canónica

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2 \tag{21.1}$$

siendo r la característica de A y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sus valores propios distintos de cero.

Así, pues, la característica de q es igual al número de valores propios de A distintos de cero y su índice es igual al número de valores propios positivos o bien al número de variaciones de signo que representa la ecuación característica $|\lambda I - A| = 0$, según la regla de Descartes.

VI. La condición necesaria y suficiente para que una matriz simétrica real sea definida positiva es que todos sus valores propios sean positivos.

SEMEJANZA ORTOGONAL. Sea P una matriz ortogonal y $B = P^{-1}AP$; entonces, las matrices B y A son *semejantes ortogonalmente*. Como $P^{-1} = P'$, dichas matrices B y A son también congruentes y equivalentes ortogonalmente. El Teorema III se puede establecer, asimismo, en los términos siguientes:

VII. Toda matriz simétrica real A es semejante ortogonalmente a una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son los valores propios de A.

Véase Problema 3.

Ordenemos los valores propios de una matriz simétrica real A en la forma $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \ldots \geqq \lambda_n$. La matriz diag $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ es la única matriz diagonal semejante a A. Todas estas matrices diagonales forman un conjunto canónico de matrices simétricas reales con respecto a la semejanza ortogonal.

VIII. La condición necesaria y suficiente para que dos matrices simétricas reales sean semejantes ortogonalmente es que tengan los mismos valores propios, es decir, sean semejantes.

PAR DE FORMAS CUADRATICAS REALES. En el Problema 4 se demuestra el teorema siguiente:

IX. Sean $X'AX$ y $X'BX$ dos formas cuadráticas reales en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $X'BX$ definida positiva; entonces, existe una transformación lineal real y regular $X = CY$ que reduce $X'AX$ a

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

y $X'BX$ a

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$$

siendo λ_i las raíces de $|\lambda B - A| = 0$.

Véanse también Problemas 4-5.

MATRICES HERMITICAS. Paralelamente a los teoremas relativos a las matrices reales simétricas, se verifican los siguientes:

X. Los valores propios de una matriz hermítica son todos reales.

Véase Problema 7.

XI. Los vectores propios asociados a los valores propios de una matriz hermítica son mutuamente ortogonales.

XII. Si H es una matriz hermítica cuadrada de orden n de valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, existe una matriz unitaria U de forma que $\bar{U}'HU = U^{-1}HU = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Las matrices H y $U^{-1}HU$ se llaman *semejantes unitariamente*.

XIII. Si λ_i es un valor propio de índice de multiplicidad r_i de la matriz hermítica H, existe, asociado a λ_i, un espacio vectorial propio de dimensión r_i.

Ordenemos los valores propios de la matriz hermítica H de la forma $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$. La matriz diag $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ es la única matriz semejante a H. Todas estas matrices diagonales forman un conjunto canónico de matrices hermíticas con respecto a la semejanza unitaria. De esto se deduce el teorema siguiente:

XIV. La condición necesaria y suficiente para que dos matrices hermíticas sean semejantes unitariamente es que tengan los mismos valores propios, es decir, sean semejantes.

MATRICES NORMALES. Una matriz cuadrada A de orden n se llama normal si $A\bar{A}' = \bar{A}'A$. Las matrices normales incluyen a las diagonales, simétricas reales, hemisimétricas reales, ortogonales, hermíticas, hemihermíticas y unitarias.

Sea A una matriz normal y U una matriz unitaria y supongamos que $B = \bar{U}'AU$. Entonces, $\bar{B}' = \bar{U}'\bar{A}'U$ y $\bar{B}'B = \bar{U}'\bar{A}'U \cdot \bar{U}'AU = \bar{U}'\bar{A}'AU = \bar{U}'A\bar{A}'U = \bar{U}'AU \cdot \bar{U}'\bar{A}'U = B\bar{B}'$. Por tanto,

XV. Si A es una matriz normal y U una matriz unitaria, la matriz $B = \bar{U}'AU$ es normal.

En el Problema 8 se demuestra el teorema siguiente:

XVI. Sea X_i un vector propio correspondiente al valor propio λ_i de una matriz normal A; entonces, X_i es también un vector propio de $\bar{A}'$ correspondiente al valor propio $\bar{\lambda}_i$.

En el Problema 9 se demuestra el teorema siguiente:

XVII. La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada A sea semejante unitariamente a una matriz diagonal es que dicha matriz A sea normal.

Como consecuencia se deduce este otro teorema:

XVIII. Si A es una matriz normal los vectores propios correspondientes a los valores propios son ortogonales.

Véase Problema 10.

XIX. Si λ_i es un valor propio de la matriz A, de índice de multiplicidad r_i, la dimensión del espacio vectorial propio asociado es r_i.

XX. Dos matrices normales son semejantes unitariamente si, y solo si, tienen los mismos valores propios, es decir, si, y solo si, son semejantes.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demostrar que los valores propios de una matriz cuadrada A de orden n, real y simétrica, son todos reales.

Supongamos que $h + ik$ es un valor propio complejo de A. La matriz

$$B = \{(h+ik)I - A\}\{(h-ik)I - A\} = (hI - A)^2 + k^2 I$$

es real y singular ya que $(h+ik)I - A$ es singular. Existe un vector real no nulo X tal que $BX = 0$ y, por consiguiente,

$$X'BX = X'(hI-A)^2X + k^2X'X = X'(hI-A)'(hI-A)X + k^2X'X = 0$$

El vector $(hI-A)X$ es real; luego, $\{(hI-A)X\}'\{(hI-A)X\} \geq 0$. También $X'X > 0$. Por consiguiente, $k = 0$ y no existen raíces complejas.

2. Demostrar que los vectores propios asociados a valores propios distintos de una matriz A simétrica y real son mutuamente ortogonales.

Sean X_1 y X_2 dos vectores propios asociados, respectivamente, a los dos valores propios distintos λ_1 y λ_2 de A. Entonces,

$$AX_1 = \lambda_1 X_1 \quad \text{y} \quad AX_2 = \lambda_2 X_2, \quad \text{y también} \quad X_2'AX_1 = \lambda_1 X_2'X_1 \quad \text{y} \quad X_1'AX_2 = \lambda_2 X_1'X_2$$

Tomando traspuestas

$$X_1'AX_2 = \lambda_1 X_1'X_2 \quad \text{y} \quad X_2'AX_1 = \lambda_2 X_2'X_1$$

Por tanto, $\lambda_1 X_1'X_2 = \lambda_2 X_1'X_2$ y como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $X_1'X_2 = 0$. Así, pues, X_1 y X_2 son ortogonales.

3. Hallar una matriz ortogonal P de forma que $P^{-1}AP$ sea diagonal y sus elementos de la diagonal principal sean los valores propios de A, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica es

$$\begin{vmatrix} \lambda-7 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda-10 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda-7 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 24\lambda^2 + 180\lambda - 432 = 0$$

cuyas raíces son 6, 6, 12.

Para $\lambda = 6$, se tiene $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$, o sea $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ y escogemos como vectores propios el par de vectores mutuamente ortogonales $X_1 = [1, 0, -1]'$ y $X_2 = [1, 1, 1]'$. Para $\lambda = 12$, sea $X_3 = [1, -2, 1]'$ el vector propio asociado.

Tomando la forma normalizada de estos vectores como columnas de P se tiene

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Se deja como ejercicio al alumno la demostración de que $P^{-1}AP = \text{diag}\ (6,\ 6,\ 12)$.

4. Demostrar que si $X'AX$ y $X'BX$ son dos formas cuadráticas reales en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $X'BX$ es definida positiva, existe una transformación lineal, real y regular, $X = CY$, que reduce $X'AX$ a $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$ y $X'BX$ a $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$, siendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ las raíces de la ecuación característica $|\lambda B - A| = 0$.

Según el Teorema VII existe una transformación ortogonal $X = GV$ que reduce $X'BX$ a

(i) $$V'(G'BG)V = \mu_1 v_1^2 + \mu_2 v_2^2 + \ldots + \mu_n v_n^2$$

siendo $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ los valores propios (todos positivos) de B.

Sea $H = \text{diag}(1/\sqrt{\mu_1},\ 1/\sqrt{\mu_2},\ \ldots,\ 1/\sqrt{\mu_n})$. Entonces $V = HW$ reduce (i) a

(ii) $$W'(H'G'BGH)W = w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_n^2$$

La transformación ortogonal $W = KY$ reduce la forma cuadrática real $W'(H'G'AGH)W$ a

$$Y'(K'H'G'AGHK)Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

siendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de la matriz $H'G'AGH$. Por tanto, existe una transformación real y regular, $X = CY = GHKY$, que reduce $X'AX$ a $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ y $X'BX$ a

$$Y'(K'H'G'BGHK)Y = Y'(K^{-1}IK)Y = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$$

Puesto que para todos los valores de λ,

$$\begin{aligned} K'H'G'(\lambda B - A)GHK &= \lambda K'H'G'BGHK - K'H'G'AGHK = \text{diag}(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda) - \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \\ &= \text{diag}(\lambda - \lambda_1,\ \lambda - \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda - \lambda_n) \end{aligned}$$

Se deduce que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son las raíces de $|\lambda B - A| = 0$

5. Del Problema 3, la transformación lineal

$$X = (GH)W = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix} W$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{3} & 1/3\sqrt{2} & 1/6\sqrt{2} \\ 0 & 1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ -1/2\sqrt{3} & 1/3\sqrt{2} & 1/6\sqrt{2} \end{bmatrix} W$$

reduce $q = X'BX = X'\begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}X$ a $W'IW$.

La misma transformación reduce

$$X'AX = X'\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}X \quad \text{a} \quad W'\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}W$$

Como ésta es una matriz diagonal, la transformación $W = KY$ del Problema 4 es la transformación identidad $W = IY$.

Por tanto, la transformación lineal real $X = CY = (GH)Y$ reduce la forma cuadrática definida positiva $X'BX$ a $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ y la forma cuadrática $X'AX$ a $\frac{1}{3}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2$. Se deja como ejercicio la demostración de que $|\lambda B - A| = 36(3\lambda - 1)(2\lambda - 1)^2$.

6. Demostrar que toda matriz A real y regular se puede escribir en la forma $A = CP$ siendo C una matriz simétrica definida positiva y P una matriz ortogonal.

Como A es una matriz regular, según el Teorema X, Capítulo 17, AA' es simétrica definida positiva. En estas condiciones, existe una matriz ortogonal Q de forma que $Q^{-1}AA'Q = \text{diag}\,(k_1, k_2, \ldots, k_n) = B$, siendo $k_i > 0$. Sean $B_1 = \text{diag}\,(\sqrt{k_1}, \sqrt{k_2}, \ldots, \sqrt{k_n})$ y $C = QB_1Q^{-1}$. Como C es una matriz simétrica definida positiva,

$$C^2 = QB_1Q^{-1}QB_1Q^{-1} = QB_1^2Q^{-1} = QBQ^{-1} = AA'$$

Haciendo $P = C^{-1}A$ resulta, $PP' = C^{-1}AA'C^{-1} = C^{-1}C^2C^{-1} = I$. En consecuencia, la matriz P es ortogonal. Así, pues, $A = CP$, siendo C simétrica definida positiva y P ortogonal, como se quería demostrar.

7. Demostrar que los valores propios de una matriz hermítica son todos reales.

Llamando λ_i un valor propio cualquiera de la matriz hermítica H, existe un vector no nulo X_i de forma que $HX_i = \lambda_i X_i$. Ahora bien $\bar{X}_i'HX_i = \lambda_i \bar{X}_i'X_i$ es una matriz real y distinta de cero, luego también lo será la traspuesta de la conjugada $\bar{X}_i'HX_i = \bar{\lambda}_i\bar{X}_i'X_i$. Por consiguiente, $\bar{\lambda}_i = \lambda_i$, con lo que λ_i ha de ser real.

8. Demostrar que si X_i es un vector propio correspondiente al valor propio λ_i de una matriz normal A, entonces X_i es un vector propio de $\bar{A}'$ correspondiente al valor propio $\bar{\lambda}_i$.

Como A es normal

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)(\overline{\lambda I - A})' &= (\lambda I - A)(\bar{\lambda} I - \bar{A}') = \lambda\bar{\lambda} I - \lambda\bar{A}' - \bar{\lambda} A + A\bar{A}' \\ &= \bar{\lambda}\lambda I - \lambda\bar{A}' - \bar{\lambda} A + \bar{A}'A = (\overline{\lambda I - A})'(\lambda I - A)\end{aligned}$$

de manera que $\lambda I - A$ es normal. Por hipótesis, $BX_i = (\lambda_i I - A)X_i = 0$; luego

$$(\overline{BX_i})'(BX_i) = \bar{X}_i'\bar{B}'\cdot BX_i = \bar{X}_i'B\cdot\bar{B}'X_i = (\overline{\bar{B}'X_i})'(\bar{B}'X_i) = 0 \quad \text{y} \quad \bar{B}'X_i = (\bar{\lambda}_i I - \bar{A}')X_i = 0$$

Así, pues, X_i es un vector propio de $\bar{A}'$ correspondiente al valor propio $\bar{\lambda}_i$.

9. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada A de orden n sea semejante unitariamente a una matriz diagonal es que dicha matriz A sea normal.

Supongamos que A es normal. Según el Teorema VIII, Capítulo 20, existe una matriz unitaria U de forma que

$$\bar{U}'AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & b_{23} & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = B$$

Según el Teorema XV, B es normal y, por tanto, $\bar{B}'B = B\bar{B}'$. El elemento de la primera fila y primera columna de $\bar{B}'B$ es $\bar{\lambda}_1\lambda_1$, y el correspondiente de $B\bar{B}'$ es

$$\lambda_1\bar{\lambda}_1 + b_{12}\bar{b}_{12} + b_{13}\bar{b}_{13} + \ldots + b_{1n}\bar{b}_{1n}$$

Como estos elementos son iguales y puesto que cada $b_{ij}\bar{b}_{ij} \geq 0$, se deduce que cada $b_{ij} = 0$. Razonando de igual forma con los elementos de la segunda fila y segunda columna, etc., se llega a la conclusión de que todos los elementos b_{ij} de B son nulos. Por tanto, $B = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Recíprocamente, si A es una matriz diagonal, también es normal.

10. Demostrar que si A es una matriz normal, los vectores propios correspondientes a valores propios distintos son ortogonales.

Sean λ_1, X_1 y λ_2, X_2 los valores y vectores propios correspondientes de la matriz dada A. Entonces, $AX_1 = \lambda_1 X_1$, $AX_2 = \lambda_2 X_2$ y, del Problema 8, $\bar{A}'X_1 = \bar{\lambda}_1 X_1$, $\bar{A}'X_2 = \bar{\lambda}_2 X_2$. Ahora bien, $\bar{X}_2' A X_1 = \lambda_1 \bar{X}_2' X_1$ y, tomando la traspuesta conjugada, $\bar{X}_1' \bar{A}' X_2 = \bar{\lambda}_1 \bar{X}_1' X_2$. Pero $\bar{X}_1' \bar{A}' X_2 = \bar{\lambda}_2 \bar{X}_1' X_2$. Luego, $\bar{\lambda}_1 \bar{X}_1' X_2 = \bar{\lambda}_2 \bar{X}_1' X_2$ y como $\bar{\lambda}_1 \neq \bar{\lambda}_2$, $\bar{X}_1' X_2 = 0$ que es lo que se quería demostrar.

11. Sea la cónica $x_1^2 - 12x_1x_2 - 4x_2^2 = 40$, o bien,

(i) $$X'AX \quad = \quad X'\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} X \quad = \quad 40$$

referida a los ejes coordenados rectangulares OX_1 y OX_2.

La ecuación característica de A es

$$|\lambda I - A| \quad = \quad \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 6 \\ 6 & \lambda + 4 \end{vmatrix} \quad = \quad (\lambda - 5)(\lambda + 8) \quad = \quad 0$$

Para las raíces características $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = -8$, tomamos $[3, -2]'$ y $[2, 3]'$, respectivamente, como vectores propios. Formemos ahora la matriz ortogonal $P = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}$ cuyas columnas sean los dos vectores normalizados. La transformación $X = PY$ reduce (i) a

$$Y'\begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} & -2/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{bmatrix} Y \quad = \quad Y'\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} Y \quad = \quad 5y_1^2 - 8y_2^2 \quad = \quad 40$$

La cónica es una hipérbola.

Esto es lo que se hace en geometría analítica para hallar la ecuación de una cónica referida a sus ejes. Obsérvese que, según el Teorema VII, se obtiene el resultado tan pronto como se hallen los valores propios.

12. Un problema de geometría analítica del espacio es reducir, por medio de una traslación y una rotación de ejes, la ecuación de una cuádrica a su forma más sencilla. Dicho problema estriba, fundamentalmente, en hallar el centro y determinar las direcciones principales, es decir, las direcciones de los ejes después de la rotación. Vamos a ver, sin justificar los pasos sucesivos, el papel de las dos matrices de transformación en la citada reducción de la ecuación de una cuádrica con centro.

Consideremos la superficie $3x^2 + 2xy + 2xz + 4yz - 2x - 14y + 2z - 9 = 0$ y las matrices simétricas

$$A \quad = \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B \quad = \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -7 & 1 & -9 \end{bmatrix}$$

formadas, respectivamente, con los términos de segundo grado y con todos los términos.

La ecuación característica de A es

$$|\lambda I - A| \quad = \quad \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -2 \\ -1 & -2 & \lambda \end{bmatrix} \quad = \quad 0$$

Los valores propios y los vectores propios unitarios, asociados, son:

$$\lambda_1 = 1, \quad v_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right]'; \qquad \lambda_2 = 4, \quad v_2 = \left[\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]'; \qquad \lambda_3 = -2, \quad v_3 = \left[0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]'$$

Aplicando únicamente transformaciones elementales de fila, $H_j(k)$ y $H_{ij}(k)$, con $j \neq 4$,

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hdashline -1 & -7 & 1 & -9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

Considerando a B_1 como la matriz aplicada del sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x + y + z - 1 = 0 \\ x + 2z - 7 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$, de D_1 se obtiene la solución $x = -1$, $y = 0$, $z = 4$ o bien $C(-1, 0, 4)$. De D_2 se obtiene $d = -4$.

La característica de A es 3 y la de B es 4; la cuádrica tiene de centro $C(-1, 0, 4)$. La ecuación reducida es, por consiguiente,

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + d = X^2 + 4Y^2 - 2Z^2 - 4 = 0$$

Las ecuaciones de la translación son $x = x' - 1$, $y = y'$, $z = z' + 4$.

Las direcciones principales son v_1, v_2, v_3. Representando por E la inversa de $[v_1, v_2, v_3]$, las ecuaciones de la rotación de ejes a las direcciones principales son

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [X \;\, Y \;\, Z] \cdot E = [X \;\, Y \;\, Z] \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

13. Para cada una de las siguientes matrices simétricas reales A hallar una matriz ortogonal P de forma que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal sean los valores propios de A.

$(a)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $(b)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $(c)\ \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $(d)\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $(e)\ \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

Sol. $(a)\ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $(b)\ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, $(c)\ \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix}$

$(d)\ \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ $(e)\ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

14. Hallar una transformación lineal que reduzca $X'BX$ a $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ y $X'AX$ a $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$, siendo λ_i las raíces de $|\lambda B - A| = 0$,

$(a)\ A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $(b)\ A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Sol. $(a)\ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 1/3 \\ 0 & -2/3\sqrt{2} & 1/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 1/3 \end{bmatrix}$, $(b)\ \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3\sqrt{10} \\ -2/3 & 1/3 & 2/3\sqrt{10} \\ 1/3 & -2/3 & 2/3\sqrt{10} \end{bmatrix}$

15. Demostrar el Teorema IV.
Ind. Si $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_n)$, entonces $P^{-1}(\lambda_1 I - A)P = \text{diag}(0, 0, \ldots, 0, \lambda_1 - \lambda_{r+1}, \lambda_1 - \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_1 - \lambda_n)$ es de característica $n - r$.

16. Modificar la demostración del Problema 2 para probar el Teorema XI.

17. Demostrar los Teoremas XII, XIII y XIX.

18. Hallar la naturaleza de las cuádricas:

(*a*) $20x_1^2 - 24x_1x_2 + 27x_2^2 = 369$. (*c*) $108x_1^2 - 312x_1x_2 + 17x_2^2 = 900$.

(*b*) $3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 4$. (*d*) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 8$

19. Siendo A una matriz real y hemisimétrica, demostrar:

(*a*) Los valores propios de A son nulos o imaginarios puros.
(*b*) Las matrices $I + A$ e $I - A$ son regulares.
(*c*) La matriz $B = (I + A)^{-1}(I - A)$ es ortogonal. (Véase Problema 35, Capítulo 13.)

20. Demostrar que si A es una matriz normal y regular también lo es A^{-1}.

21. Demostrar que si A es una matriz normal es semejante a A'.

22. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada A sea normal es que se pueda expresar en la forma $H + iK$, siendo H y K matrices hermíticas permutables.

23. Demostrar que si A es una matriz cuadrada de orden n de valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, la condición necesaria y suficiente para que sea normal es que la matriz $A\bar{A}'$ tenga de valores propios $\lambda_1\bar{\lambda}_1, \lambda_2\bar{\lambda}_2, \ldots, \lambda_n\bar{\lambda}_n$.
Ind. Escribir $U^{-1}AU = T = [t_{ij}]$, siendo U unitaria y T triangular. Para que $\text{tr}(T\bar{T}') = \text{tr}(A\bar{A}')$ debe ser $t_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

24. Demostrar que si A es una matriz regular, $A\bar{A}'$ es una matriz hermítica definida positiva. Enunciar el teorema cuando A sea real y regular.

25. Demostrar que si A y B son dos matrices cuadradas normales y de orden n, y A y $\bar{B}'$ son permutables, las matrices AB y BA son normales.

26. Sea la función característica de una matriz cuadrada A de orden n,

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$$

y supongamos que existe una matriz regular P de forma que

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1 I_{r_1}, \lambda_2 I_{r_2}, \ldots, \lambda_s I_{r_s}) \tag{1}$$

siendo B_i, $(i = 1, 2, \ldots, s)$ la matriz cuadrada de orden n, $\text{diag}(0, 0, \ldots, I_{r_i}, 0, \ldots, 0)$ obtenida sustituyendo λ_i por 1 y λ_j, $(j \neq i)$ por 0 en el segundo miembro de (1) y definiendo

$$E_i = PB_iP^{-1}, \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

Demostrar que:

(*a*) $P^{-1}AP = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \cdots + \lambda_s B_s$
(*b*) $A = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \cdots + \lambda_s E_s$
(*c*) Todos los E_i son idempotentes
(*d*) $E_iE_j = 0$ para $i \neq j$
(*e*) $E_1 + E_2 + \cdots + E_s = I$
(*f*) La característica E_i es igual al índice de multiplicidad de la raíz característica λ_i
(*g*) $(\lambda_i I - A)E_i = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, s)$
(*h*) Si $p(x)$ es un polinomio en x, se verifica $p(A) = p(\lambda_1)E_1 + p(\lambda_2)E_2 + \cdots + p(\lambda_s)E_s$.
Ind. Establecer $A^2 = \lambda_1^2 E_1 + \lambda_2^2 E_2 + \cdots + \lambda_s^2 E_s$, $A^3 = \lambda_1^3 E_1 + \lambda_2^3 E_2 + \cdots \lambda_s^3 E_s, \ldots$

(*i*) Cada E_i es un polinomio en A
Ind. Definir $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_s)$ y $f_i(\lambda) = f(\lambda)/(\lambda - \lambda_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Entonces, $f_i(A) = f_i(\lambda_i)E_i$.

(*j*) Una matriz B conmuta con A si, y solo si, conmuta con cada uno de los E_i.
Ind. Si B conmuta con A, conmuta con cualquier polinomio en A

(*k*) Si A es normal, todos los E_i son hermíticos.

(*l*) Si A es regular se verifica

$$A^{-1} = \lambda_1^{-1}E_1 + \lambda_2^{-1}E_2 + \ldots + \lambda_S^{-1}E_S$$

(*m*) Si A es hermítica definida positiva se verifica que

$$H = A^{1/2} = \sqrt{\lambda_1}\,E_1 + \sqrt{\lambda_2}\,E_2 + \ldots + \sqrt{\lambda_S}\,E_S$$

es hermítica definida positiva.

(*n*) La ecuación (*b*) se denomina *descomposición espectral* de A. Demostrar que esta descomposición es única.

27. (*a*) Obtener la descomposición espectral de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 24 & -20 & 10 \\ -20 & 24 & -10 \\ 10 & 0 & 9 \end{bmatrix} = 49\begin{bmatrix} 4/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 4/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 5/9 & 4/9 & -2/9 \\ 4/9 & 5/9 & 2/9 \\ -2/9 & 2/9 & 8/9 \end{bmatrix}.$$

(*b*) Obtener $A^{-1} = \dfrac{1}{196}\begin{bmatrix} 29 & 20 & -1 \\ 20 & 29 & 10 \\ -10 & 10 & 44 \end{bmatrix}$

(*c*) Obtener $A^{1/2} = \begin{bmatrix} 38/9 & -20/9 & 10/9 \\ -20/9 & 38/9 & -10/9 \\ 10/9 & -10/9 & 23/9 \end{bmatrix}$

28. Demostrar que si A es una matriz normal permutable con B, las matrices $\bar{A}'$ y B conmutan.
Ind. Véase Problema 26(*j*).

29. Demostrar que si A es una matriz regular existe una matriz unitaria U y una matriz hermítica definida positiva H, de forma que $A = HU$.
Ind. Definir H por $H^2 = A\bar{A}'$ y $U = H^{-1}A$.

30. Demostrar que si A es una matriz regular la condición necesaria y suficiente para que sea normal es que las matrices H y U del Problema 29 sean permutables.

31. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada A sea semejante a una matriz diagonal es que exista una matriz hermítica definida positiva H, de forma que $H^{-1}AH$ sea normal.

32. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que una matriz (hermítica) simétrica real sea idempotente es que sus valores propios sean ceros y unos.

33. Demostrar que si A es una matriz simétrica real (hermítica) e idempotente se verifica $r_A = \text{tr}\ A$.

34. Siendo A una matriz normal, $B = I + A$ una matriz regular y $C = B^{-1}\bar{B}'$, demostrar que:
(*a*) Las matrices A y $(\bar{B}')^{-1}$ son permutables. (*b*) La matriz C es unitaria.

35. Demostrar que si la matriz H es hermítica, la matriz $(I + iH)^{-1}(I - iH)$ es unitaria.

36. Si A es una matriz cuadrada de orden n, el conjunto de números $\bar{X}'AX$, siendo X un vector unitario, se llama *cuerpo de valores* de A. Demostrar que:

(*a*) Los valores propios de A pertenecen a su cuerpo de valores.
(*b*) Todo elemento de la diagonal principal de A y todo elemento de la diagonal principal de $U^{-1}AU$, siendo U una matriz unitaria, pertenecen al cuerpo de valores de A.
(*c*) Si A es una matriz real y simétrica (hermítica), todo elemento de su cuerpo de valores es real.
(*d*) Si A es una matriz real y simétrica (hermítica), su cuerpo de valores es el conjunto de números reales $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_n$, siendo λ_1 y λ_n el menor y mayor valores propios, respectivamente, de A.

Capítulo 22

Polinomios definidos sobre un cuerpo

DOMINIO POLINOMICO SOBRE UN CUERPO F. Sea λ un símbolo abstracto (indeterminado) que supondremos conmutativo consigo mismo y con los elementos de un cuerpo F. La expresión

$$f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\lambda^0 \tag{22.1}$$

siendo a_i un elemento de F, se llama *polinomio en* λ *definido sobre* F.

Si todos los coeficientes a_i son nulos, el polinomio recibe el nombre de *polinomio nulo*, y se escribe $f(\lambda) = 0$. Si $a_n \neq 0$, el polinomio (22.1) es de grado n y a_n es su *primer coeficiente*. El polinomio $f(\lambda) = a_0\lambda^0 = a_0 \neq 0$ es de grado cero; el grado de un polinomio nulo no está definido.

Si en el polinomio (22.1) el primer coeficiente $a_n = 1$ se llama *normalizado* o *mónico*.

Dos polinomios en λ que contienen los mismos términos se llaman *idénticos*.

Todos los polinomios de la forma (22.1) constituyen un *dominio polinómico* $F(\lambda)$ sobre un cuerpo F.

SUMA Y PRODUCTO. Considerando cada uno de los polinomios de $F[\lambda]$ como elementos de un sistema numérico, el dominio polinómico goza de la mayoría de las propiedades de un cuerpo. Por ejemplo,

$$f(\lambda) + g(\lambda) = g(\lambda) + f(\lambda) \quad \text{y} \quad f(\lambda)\cdot g(\lambda) = g(\lambda)\cdot f(\lambda)$$

Si $f(\lambda)$ es de grado m y $g(\lambda)$ es de grado n,

(i) $f(\lambda) + g(\lambda)$ es de grado m cuando $m > n$, con máximo de grado m cuando $m = n$, y de grado n cuando $m < n$.

(ii) $f(\lambda)\cdot g(\lambda)$ es de grado $m + n$.

Si $f(\lambda) \neq 0$ y $f(\lambda)\cdot g(\lambda) = 0$, entonces $g(\lambda) = 0$.

Si $g(\lambda) \neq 0$ y $h(\lambda)\cdot g(\lambda) = k(\lambda)\cdot g(\lambda)$, entonces $h(\lambda) = k(\lambda)$.

COCIENTE. En el Problema 1 se demuestra el teorema siguiente:

I. Si $f(\lambda)$ y $g(\lambda) \neq 0$ son dos polinomios de $F[\lambda]$ existen otros dos polinomios y éstos son únicos, $h(\lambda)$ y $r(\lambda)$ en $F[\lambda]$, siendo $r(\lambda)$ de grado igual o menor que el correspondiente de $g(\lambda)$, de forma que

$$f(\lambda) = h(\lambda)\cdot g(\lambda) + r(\lambda) \tag{22.2}$$

En esta igualdad, $r(\lambda)$ se llama *resto* de la división de $f(\lambda)$ por $g(\lambda)$. Si $r(\lambda) = 0$, el polinomio $g(\lambda)$ es un factor o divisor de $f(\lambda)$, y $g(\lambda)$ y $h(\lambda)$ se denominan *divisores* (o factores) de $f(\lambda)$.

Sea $f(\lambda) = h(\lambda) \cdot g(\lambda)$. Si $g(\lambda)$ es un polinomio de grado cero, es decir, si $g(\lambda) = c$ (constante), la descomposición en factores se llama *trivial*. Un polinomio no constante es *irreducible* si su única descomposición en factores es trivial.

Ejemplo 1. El polinomio $\lambda^2 - 3$ definido sobre el cuerpo de los números racionales es irreducible; $(\lambda + \sqrt{3})(\lambda - \sqrt{3})$ se puede descomponer en factores sobre el cuerpo de los números reales. El polinomio $\lambda^2 + 4$ es irreducible sobre el cuerpo de los números reales y, por consiguiente, sobre el de los números racionales; $(\lambda + 2i)(\lambda - 2i)$ se puede descomponer en factores sobre el cuerpo de los números complejos.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL RESTO. Sea $f(\lambda)$ un polinomio cualquiera y $g(\lambda) = \lambda - a$; entonces, la igualdad (22.2) se convierte en

$$f(\lambda) = h(\lambda) \cdot (\lambda - a) + r \tag{22.3}$$

siendo r de grado cero. De (22.3), $f(a) = r$. Por tanto,

II. Si se divide $f(\lambda)$ por $\lambda - a$ hasta que el resto obtenido sea de grado cero, el valor de dicho resto es $f(a)$.

III. La condición necesaria y suficiente para que un polinomio $f(\lambda)$ sea divisible por $\lambda - a$ es que $f(a) = 0$.

MAXIMO COMUN DIVISOR. Sea $h(\lambda)$ un polinomio que divide a $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$; entonces, $h(\lambda)$ es un *divisor común* de ambos.

Un polinomio $d(\lambda)$ se llama *máximo común divisor* de los polinomios $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$ si:

(i) $d(\lambda)$ es normalizado o mónico,
(ii) $d(\lambda)$ es un divisor común de $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$,
(iii) todo divisor común de $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$ también es divisor de $d(\lambda)$.

En el Problema 2 se demuestra el teorema siguiente:

IV. Si $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$ son dos polinomios de $F[\lambda]$, no nulos simultáneamente, tienen un máximo común divisor único, $d(\lambda)$, y existen otros dos polinomios, $h(\lambda)$ y $k(\lambda)$ definidos sobre F, tales que

$$d(\lambda) = h(\lambda) \cdot f(\lambda) + k(\lambda) \cdot g(\lambda) \tag{22.4}$$

Véase también Problema 3.

Si los únicos divisores comunes de $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$ son constantes, su máximo común divisor es la unidad, es decir, $d(\lambda) = 1$.

Ejemplo 2. El máximo común divisor de $f(\lambda) = (\lambda^2 + 4)(\lambda^2 + 3\lambda + 5)$ y $g(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 3\lambda + 5)$ es $\lambda^2 + 3\lambda + 5$, y (22.4) es

$$\lambda^2 + 3\lambda + 5 = \frac{1}{5}f(\lambda) - \frac{1}{5}g(\lambda)$$

También se tiene que $(1 - \lambda^2) \cdot f(\lambda) + (\lambda^2 + 4) \cdot g(\lambda) = 0$. Esto último ilustra el teorema siguiente:

V. Si el máximo común divisor del polinomio $f(\lambda)$ de grado $n > 0$ y del polinomio $g(\lambda)$ de grado $m > 0$ es distinto de la unidad existen otros dos polinomios no nulos, $a(\lambda)$ de grado $< m$ y $b(\lambda)$ de grado $< n$, de forma que

$$a(\lambda) \cdot f(\lambda) + b(\lambda) \cdot g(\lambda) = 0$$

y recíprocamente. Véase Problema 4.

POLINOMIOS PRIMOS ENTRE SI. Dos polinomios se llaman *primos entre sí* cuando su máximo común divisor es la unidad.

VI. Si $g(\lambda)$ es un polinomio irreducible y $f(\lambda)$ un polinomio cualquiera, ambos pertenecientes a $F[\lambda]$, el polinomio $g(\lambda)$ o bien es un divisor de $f(\lambda)$ o bien $g(\lambda)$ y $f(\lambda)$ son primos entre sí.

VII. Si $g(\lambda)$ es irreducible y divide al producto $f(\lambda)\cdot h(\lambda)$, divide al menos a uno de los factores.

VIII. Si $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$ son primos entre sí y ambos dividen a $h(\lambda)$, también dividen al producto $f(\lambda)\cdot g(\lambda)$.

TEOREMA DE LA DESCOMPOSICION EN FACTORES. En el Problema 5 se demuestra el teorema siguiente:

IX. Todo polinomio no nulo $f(\lambda)$ perteneciente a $F[\lambda]$ se puede escribir en la forma

$$f(\lambda) = c\cdot q_1(\lambda)\cdot q_2(\lambda)\ldots q_r(\lambda) \tag{22.5}$$

siendo $c \neq 0$ una constante, y $q_i(\lambda)$ polinomios normalizados de $F[\lambda]$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demostrar que si $f(\lambda)$ y $g(\lambda) \neq 0$ son dos polinomios pertenecientes a $F[\lambda]$ existen los polinomios únicos $h(\lambda)$ y $r(\lambda)$ sobre $F[\lambda]$, siendo $r(\lambda)$ un polinomio nulo o de grado menor al de $g(\lambda)$, tales que

$$f(\lambda) = h(\lambda)\cdot g(\lambda) + r(\lambda) \tag{i}$$

Sean

$$f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

y

$$g(\lambda) = b_m\lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0, \quad b_m \neq 0$$

Evidentemente, el teorema es cierto si $f(\lambda) = 0$ o bien si $n < m$. Supongamos que $n \geq m$; en estas condiciones,

$$f(\lambda) - \frac{a_n}{b_m}\lambda^{n-m}g(\lambda) = f_1(\lambda) = c_p\lambda^p + c_{p-1}\lambda^{p-1} + \cdots + c_0$$

o bien es un polinomio nulo o bien es de grado inferior al de $f(\lambda)$.

Si $f_1(\lambda) = 0$ o bien es de grado menor al de $g(\lambda)$, hemos demostrado el teorema con $h(\lambda) = \frac{a_n}{b_m}\lambda^{n-m}$ y $r(\lambda) = f_1(\lambda)$. En caso contrario,

$$f(\lambda) - \frac{a_n}{b_m}\lambda^{n-m}g(\lambda) - \frac{c_p}{b_m}\lambda^{p-m}g(\lambda) = f_2(\lambda)$$

Si $f_2(\lambda) = 0$ o bien es de grado inferior al de $g(\lambda)$, hemos demostrado el teorema. En caso contrario, se repite el razonamiento anterior. Como en cada paso el grado del resto (supuesto distinto de cero) va disminuyendo, se obtendrá forzosamente un polinomio $r(\lambda) = f_s(\lambda)$ que será o bien un polinomio nulo o su grado ha de ser menor al de $g(\lambda)$.

Para demostrar que los polinomios son únicos supongamos que

$$f(\lambda) = h(\lambda)\cdot g(\lambda) + r(\lambda) \quad \text{y} \quad f(\lambda) = k(\lambda)\cdot g(\lambda) + s(\lambda)$$

en donde los grados de $r(\lambda)$ y $s(\lambda)$ son menores que el de $g(\lambda)$. En estas condiciones,

$$h(\lambda)\cdot g(\lambda) + r(\lambda) = k(\lambda)\cdot g(\lambda) + s(\lambda)$$

y

$$[k(\lambda) - h(\lambda)]g(\lambda) = r(\lambda) - s(\lambda)$$

Ahora bien, $r(\lambda) - s(\lambda)$ es de grado menor que m, mientras que $[k(\lambda) - h(\lambda)]g(\lambda)$ es de grado igual o mayor que m, a menos que sea $k(\lambda) - h(\lambda) = 0$. Por tanto, $k(\lambda) - h(\lambda) = 0$, $r(\lambda) - s(\lambda) = 0$ con lo cual, $k(\lambda) = h(\lambda)$ y $r(\lambda) = s(\lambda)$. Es decir, los polinomios $h(\lambda)$ y $r(\lambda)$ son únicos.

2. Demostrar que si $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$ son dos polinomios pertenecientes a $F[\lambda]$, no nulos simultáneamente, tienen un máximo común divisor $d(\lambda)$ único, y existen los polinomios $h(\lambda)$ y $k(\lambda)$ de F tales que

$$(a) \qquad d(\lambda) \;=\; h(\lambda)\cdot f(\lambda) \;+\; k(\lambda)\cdot g(\lambda)$$

Si, por ejemplo, $f(\lambda) = 0$, entonces $d(\lambda) = b_m^{-1}g(\lambda)$, en donde b_m es el primer coeficiente de $g(\lambda)$, con lo que resulta (a) con $h(\lambda) = 1$ y $k(\lambda) = b_m^{-1}$.

Supongamos ahora que el grado de $g(\lambda)$ no es inferior al de $f(\lambda)$. Según el Teorema I,

$$\text{(i)} \qquad f(\lambda) \;=\; q_1(\lambda)\cdot g(\lambda) \;+\; r_1(\lambda)$$

en donde $r_1(\lambda) = 0$ o bien es de grado menor al de $g(\lambda)$. Si $r_1(\lambda) = 0$, entonces $d(\lambda) = b_m^{-1}g(\lambda)$, con lo que resulta (a) con $h(\lambda) = 0$ y $k(\lambda) = b_m^{-1}$.

Si $r_1(\lambda) \neq 0$ se obtiene,

$$\text{(ii)} \qquad g(\lambda) \;=\; q_2(\lambda)\cdot r_1(\lambda) \;+\; r_2(\lambda)$$

en donde $r_2(\lambda) = 0$ o bien es de grado menor al de $r_1(\lambda)$. Si $r_2(\lambda) = 0$, de (i) se deduce,

$$r_1(\lambda) \;=\; f(\lambda) \;-\; q_1(\lambda)\cdot g(\lambda)$$

y de esta igualdad resulta (a) dividiendo por el primer coeficiente de $r_1(\lambda)$.

Si $r_2(\lambda) \neq 0$, se obtiene

$$\text{(iii)} \qquad r_1(\lambda) \;=\; q_3(\lambda)\cdot r_2(\lambda) \;+\; r_3(\lambda)$$

en donde $r_3(\lambda) = 0$ o bien es de grado menor al de $r_2(\lambda)$. Si $r_3(\lambda) = 0$, de (i) y (ii) se deduce,

$$\begin{aligned} r_2(\lambda) &= g(\lambda) - q_2(\lambda)\cdot r_1(\lambda) \;=\; g(\lambda) - q_2(\lambda)[f(\lambda) - q_1(\lambda)\cdot g(\lambda)] \\ &= -q_2(\lambda)\cdot f(\lambda) + [1 + q_1(\lambda)\cdot q_2(\lambda)]g(\lambda) \end{aligned}$$

y de ella se llega a (a) dividiendo por el primer coeficiente de $r_2(\lambda)$.

Continuando el proceso, en la hipótesis de que cada nuevo resto es distinto de cero se obtiene, en general,

$$\text{(iv)} \qquad r_i(\lambda) \;=\; q_{i+2}(\lambda)\cdot r_{i+1}(\lambda) \;+\; r_{i+2}(\lambda)$$

y el proceso termina con

$$\text{(v)} \qquad r_{s-2}(\lambda) \;=\; q_s(\lambda)\cdot r_{s-1}(\lambda) \;+\; r_s(\lambda), \qquad r_s(\lambda) \neq 0$$

y

$$\text{(vi)} \qquad r_{s-1}(\lambda) \;=\; q_{s+1}(\lambda)\cdot r_s(\lambda)$$

De (vi) se deduce que $r_s(\lambda)$ es un divisor de $r_{s-1}(\lambda)$, con lo que, según (v) también es un divisor de $r_{s-2}(\lambda)$. De (iv) se deduce

$$r_{s-3}(\lambda) \;=\; q_{s-1}(\lambda)\cdot r_{s-2}(\lambda) \;+\; r_{s-1}(\lambda)$$

de forma que $r_s(\lambda)$ es un divisor de $r_{s-3}(\lambda)$. Por consiguiente, recorriendo en sentido inverso los mismos pasos hasta llegar a (vi) se deduce que $r_s(\lambda)$ es un divisor de $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$. Si el primer coeficiente de $r_s(\lambda)$ es c, entonces $d(\lambda) = c^{-1}r_s(\lambda)$.

De (i), $\quad r_1(\lambda) = f(\lambda) - q_1(\lambda)\cdot g(\lambda) = h_1(\lambda)\cdot f(\lambda) + k_1(\lambda)\cdot g(\lambda)$, y sustituyendo en (ii),

$$r_2(\lambda) \;=\; -q_2(\lambda)\cdot f(\lambda) + [1 + q_1(\lambda)\cdot q_2(\lambda)]g(\lambda) \;=\; h_2(\lambda)\cdot f(\lambda) + k_2(\lambda)\cdot g(\lambda)$$

De (iii) $\quad r_3(\lambda) = r_1(\lambda) - q_3(\lambda)\cdot r_2(\lambda)$. Sustituyendo $r_1(\lambda)$ y $r_2(\lambda)$, se obtiene

$$\begin{aligned} r_3(\lambda) &= [1 + q_2(\lambda)\cdot q_3(\lambda)]f(\lambda) \;+\; [-q_1(\lambda) - q_3(\lambda) - q_1(\lambda)\cdot q_2(\lambda)\cdot q_3(\lambda)]g(\lambda) \\ &= h_3(\lambda)\cdot f(\lambda) \;+\; k_3(\lambda)\cdot g(\lambda) \end{aligned}$$

Finalmente, se llega a

$$r_s(\lambda) \;=\; h_s(\lambda)\cdot f(\lambda) \;+\; k_s(\lambda)\cdot g(\lambda)$$

Por tanto, $d(\lambda) = c^{-1}r_s(\lambda) = c^{-1}h_s(\lambda)\cdot f(\lambda) + c^{-1}k_s(\lambda)\cdot g(\lambda) = h(\lambda)\cdot f(\lambda) + k(\lambda)\cdot g(\lambda)$, como se quería demostrar.

Se deja como ejercicio la demostración de que $d(\lambda)$ es único.

3. Hallar el máximo común divisor $d(\lambda)$ de los polinomios

$$f(\lambda) = 3\lambda^5 + 7\lambda^4 + 11\lambda + 6 \quad \text{y} \quad g(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 2$$

y expresar $d(\lambda)$ en la forma del Teorema III.

Se tiene

(i) $f(\lambda) = (3\lambda+1)g(\lambda) + (\lambda^3+4\lambda^2+6\lambda+4)$

(ii) $g(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda^3+4\lambda^2+6\lambda+4) + (\lambda^2+7\lambda+10)$

(iii) $\lambda^3+4\lambda^2+6\lambda+4 = (\lambda-3)(\lambda^2+7\lambda+10) + (17\lambda+34)$

y

(iv) $\lambda^2 + 7\lambda + 10 = (\frac{1}{17}\lambda + \frac{5}{17})(17\lambda+34)$

El máximo común divisor es $\frac{1}{17}(17\lambda+34) = \lambda + 2$.

De (iii),

$$17\lambda + 34 = (\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4) - (\lambda - 3)(\lambda^2 + 7\lambda + 10)$$

Sustituyendo el valor de $\lambda^2 + 7\lambda + 10$ obtenido en (ii)

$$\begin{aligned} 17\lambda + 34 &= (\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4) - (\lambda - 3)[g(\lambda) - (\lambda-2)(\lambda^3+4\lambda^2+6\lambda+4)] \\ &= (\lambda^2 - 5\lambda + 7)(\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4) - (\lambda - 3)g(\lambda) \end{aligned}$$

y el de $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4$ de (i)

$$17\lambda + 34 = (\lambda^2 - 5\lambda + 7)f(\lambda) + (-3\lambda^3 + 14\lambda^2 - 17\lambda - 4)g(\lambda)$$

Por consiguiente,

$$\lambda + 2 = \frac{1}{17}(\lambda^2 - 5\lambda + 7)\cdot f(\lambda) + \frac{1}{17}(-3\lambda^3 + 14\lambda^2 - 17\lambda - 4)\cdot g(\lambda)$$

4. Demostrar que si el máximo común divisor de los polinomios $f(\lambda)$ de grado $n > 0$ y $g(\lambda)$ de grado $m > 0$ es distinto de la unidad existen dos polinomios no nulos, $a(\lambda)$ de grado $< m$ y $b(\lambda)$ de grado $< n$ tales que

$$(a) \qquad a(\lambda)\cdot f(\lambda) + b(\lambda)\cdot g(\lambda) = 0$$

y recíprocamente

Sea $d(\lambda) \neq 1$ el máximo común divisor de $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$; entonces,

$$f(\lambda) = d(\lambda)\cdot f_1(\lambda) \qquad \text{y} \qquad g(\lambda) = d(\lambda)\cdot g_1(\lambda)$$

siendo $f_1(\lambda)$ de grado $< n$ y $g_1(\lambda)$ de grado $< m$. Ahora bien,

$$g_1(\lambda)\cdot f(\lambda) = g_1(\lambda)\cdot d(\lambda)\cdot f_1(\lambda) = g(\lambda)\cdot f_1(\lambda)$$

y

$$g_1(\lambda)\cdot f(\lambda) + [-f_1(\lambda)\cdot g(\lambda)] = 0$$

Por tanto, tomando $a(\lambda) = g_1(\lambda)$ y $b(\lambda) = -f_1(\lambda)$, se obtiene (a).

Recíprocamente, supongamos que $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$ son primos entre sí y que se verifica (a). Según el Teorema IV existen dos polinomios, $h(\lambda)$ y $k(\lambda)$, tales que

$$h(\lambda)\cdot f(\lambda) + k(\lambda)\cdot g(\lambda) = 1$$

Teniendo en cuenta (a),

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= a(\lambda)\cdot h(\lambda)\cdot f(\lambda) + a(\lambda)\cdot k(\lambda)\cdot g(\lambda) \\ &= -b(\lambda)\cdot h(\lambda)\cdot g(\lambda) + a(\lambda)\cdot k(\lambda)\cdot g(\lambda) \end{aligned}$$

y, por tanto, $g(\lambda)$ es un divisor de $a(\lambda)$. Como esto es imposible, para que se verifique (a) es necesario que $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$ sean primos entre sí.

5. Demostrar que todo polinomio no nulo $f(\lambda)$ perteneciente a $F[\lambda]$ se puede expresar en la forma

$$f(\lambda) = c \cdot q_1(\lambda) \cdot q_2(\lambda) \dots q_r(\lambda)$$

siendo $c \neq 0$ una constante y $q_i(\lambda)$ polinomios normalizados irreducibles de $F[\lambda]$.

Hagamos

(i) $$f(\lambda) = a_n \cdot f_1(\lambda)$$

siendo a_n el primer coeficiente de $f(\lambda)$. Si $f_1(\lambda)$ es irreducible, la relación (i) satisface las condiciones del teorema. En caso contrario,

(ii) $$f(\lambda) = a_n \cdot g(\lambda) \cdot h(\lambda)$$

Si $g(\lambda)$ y $h(\lambda)$ son irreducibles, la relación (ii) satisface las condiciones del teorema. Repitiendo el proceso se llega a una descomposición en factores normalizados irreducibles.

Para demostrar que la descomposición es única, supongamos que

$$a_n \cdot q_1(\lambda) \cdot q_2(\lambda) \dots q_r(\lambda) \qquad y \qquad a_n \cdot p_1(\lambda) \cdot p_2(\lambda) \dots p_s(\lambda)$$

son dos descomposiciones distintas del mismo polinomio, con $r < s$. Como $q_1(\lambda)$ es un divisor de $p_1(\lambda) \cdot p_2(\lambda) \dots p_s(\lambda)$ dividirá a alguno de los polinomios $p_i(\lambda)$, por ejemplo, a $p_1(\lambda)$. Puesto que $p_1(\lambda)$ está normalizado e irreducible, $q_1(\lambda) = p_1(\lambda)$. En estas condiciones, $q_2(\lambda)$ es un divisor de $p_2(\lambda) \cdot p_3(\lambda) \dots p_s(\lambda)$ y, repitiendo el razonamiento anterior, se llega a la conclusión de que $q_2(\lambda) = p_2(\lambda)$. Así, pues, $q_i(\lambda) = p_i(\lambda)$ para $i = 1, 2, \dots, r$ y $p_{r+1}(\lambda) \cdot p_{r+2}(\lambda) \dots p_s(\lambda) = 1$. Como esta última igualdad es imposible, ha de ser $r = s$, con lo cual, queda demostrada la unicidad.

PROBLEMAS PROPUESTOS

6. Poner un ejemplo en el cual el grado del polinomio $f(\lambda) + g(\lambda)$ sea menor que el grado de $f(\lambda)$ o que el de $g(\lambda)$.

7. Demostrar el Teorema III.

8. Demostrar que si $f(\lambda)$ es un divisor de $g(\lambda)$ y de $h(\lambda)$ divide a la suma algebraica $g(\lambda) \pm h(\lambda)$.

9. Deducir una condición necesaria y suficiente para que los dos polinomios no nulos, $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$ pertenecientes a $F(\lambda)$, sean divisores uno del otro.

10. Expresar el máximo común divisor de los polinomios siguientes teniendo en cuenta el Teorema IV.

(a) $f(\lambda) = 2\lambda^5 - \lambda^3 + 2\lambda^2 - 6\lambda - 4$, $\quad g(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 2$

(b) $f(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 - 11\lambda + 6$, $\quad g(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 2\lambda - 3$

(c) $f(\lambda) = 2\lambda^5 + 5\lambda^4 + 4\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$, $\quad g(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1$

(d) $f(\lambda) = 3\lambda^4 - 4\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 6$, $\quad g(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$

Sol. (a) $\lambda^2 - 2 = -\frac{1}{3}(\lambda - 1)f(\lambda) + \frac{1}{3}(2\lambda^2 + 1)g(\lambda)$

(b) $\lambda - 3 = -\frac{1}{13}(\lambda + 4)f(\lambda) + \frac{1}{13}(\lambda^2 + 5\lambda + 5)g(\lambda)$

(c) $\lambda + 1 = \frac{1}{13}(\lambda + 4)f(\lambda) + \frac{1}{13}(-2\lambda^3 - 9\lambda^2 - 2\lambda + 9)g(\lambda)$

(d) $1 = \frac{1}{102}(5\lambda + 2)f(\lambda) + \frac{1}{102}(-15\lambda^3 + 44\lambda^2 - 55\lambda + 45)g(\lambda)$

11. Demostrar el Teorema VI.
Ind. Sea $d(\lambda)$ el máximo común divisor de $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$; entonces, $g(\lambda) = d(\lambda) \cdot h(\lambda)$ y, por tanto, o bien $d(\lambda)$ o bien $h(\lambda)$ son constantes.

12. Demostrar los Teoremas VII y VIII.

13. Demostrar que si $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$ son dos polinomios primos entre sí y dividen al producto $g(\lambda)\cdot a(\lambda)$ dividen a $a(\lambda)$.

14. El *mínimo común múltiplo* de los polinomios $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$ es el polinomio de menor grado que es múltiplo de $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$. Hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de

(*a*) $f(\lambda) = \lambda^3 - 1, \quad g(\lambda) = \lambda^2 - 1$
(*b*) $f(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)^2(\lambda+2), \quad g(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2)^3(\lambda-3)$

Sol. (*a*) m.c.d. $= \lambda - 1$; m.c.m. $= (\lambda^2-1)(\lambda^2+\lambda+1)$
(*b*) m.c.d. $= (\lambda+1)(\lambda+2)$; m.c.m. $= (\lambda-1)(\lambda+1)^2(\lambda+2)^3(\lambda-3)$

15. Siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, demostrar que

(*a*) $\phi(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5$ y $\phi(A) = A^3 - 3A^2 - 9A - 5I = 0$
(*b*) $m(A) = 0$, cuando $m(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$.

16. Qué propiedad del cuerpo no se cumple en el dominio polinómico?

17. Un escalar c se llama *raíz* del polinomio $f(\lambda)$ si $f(c) = 0$. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que el escalar c sea una raíz de $f(\lambda)$ es que $\lambda - c$ sea divisor de $f(\lambda)$.

18. Suponiendo que $f(\lambda) = (\lambda - c)^k g(\lambda)$ demostrar que (*a*) c es una raíz de $f'(\lambda)$ de índice de multiplicidad $k - 1$. (*b*) la condición necesaria y suficiente para que c sea una raiz de $f(\lambda)$ de índice de multiplicidad $k > 1$ es que c sea una raiz de $f(\lambda)$ y de $f'(\lambda)$.

19. Sea $d(\lambda)$ el máximo común divisor de los polinomios $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$ de $F[\lambda]$, no nulos simultáneamente, y K un cuerpo cualquiera que incluye a F. Demostrar que si $D(\lambda)$ es el máximo común divisor de $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$, definidos sobre $K(\lambda)$, se verifica que $D(\lambda) = d(\lambda)$.

Ind: Sean $d(\lambda) = h(\lambda)\cdot f(\lambda) + k(\lambda)\cdot g(\lambda)$, $f(\lambda) = s(\lambda)\cdot D(\lambda)$, $g(\lambda) = t(\lambda)\cdot D(\lambda)$, y $D(\lambda) = c(\lambda)\cdot d(\lambda)$.

20. Demostrar que la condición necesaria para que toda matriz cuadrada A de orden n sea normal es que $\bar{A}'$ se pueda expresar en la forma polinómica en A.

$$a_s A^s + a_{s-1} A^{s-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I$$

Capítulo 23

Matrices definidas sobre el cuerpo de los polinomios

DEFINICIONES. Sea $F[\lambda]$ un dominio polinómico constituido por todos los polinomios en λ cuyos coeficientes pertenecen a un cuerpo F. Toda matriz no nula de orden $m \times n$ definida sobre $F[\lambda]$ de la forma

$$(23.1) \qquad A(\lambda) \;=\; [a_{ij}(\lambda)] \;=\; \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \ldots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \ldots & a_{2n}(\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \ldots & a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

se llama matriz $-\lambda$.

Sea p el grado máximo en λ de los polinomios $a_{ij}(\lambda)$ de (23.1). Entonces, $A(\lambda)$ se puede expresar mediante un polinomio y, por ello, recibe el nombre de *matriz polinómica* de grado p en λ.

$$(23.2) \qquad A(\lambda) \;=\; A_p\lambda^p + A_{p-1}\lambda^{p-1} + \ldots + A_1\lambda + A_0$$

en donde A_i son matrices de orden $m \times n$ definidas sobre F.

Ejemplo 1.

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda+1 & \lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+5 \\ \lambda^3-4 & \lambda^3-3\lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^4 + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

es una matriz $-\lambda$ o matriz polinómica de cuarto grado.

Una matriz cuadrada $A(\lambda)$ de orden n se llama singular o regular según que el determinante $|A(\lambda)|$ sea o no igual a cero. Más adelante estableceremos las denominaciones de *propia* o *impropia* para $A(\lambda)$ según que A_p sea una matriz regular o singular respectivamente. La matriz polinómica del Ejemplo 1 es regular e impropia.

ALGEBRA DE LAS MATRICES POLINOMICAS. Consideremos las dos matrices polinómicas o matrices λ cuadradas de orden n definidas sobre $F(\lambda)$

$$(23.3) \qquad A(\lambda) \;=\; A_p\lambda^p + A_{p-1}\lambda^{p-1} + \ldots + A_1\lambda + A_0$$

y

$$(23.4) \qquad B(\lambda) \;=\; B_q\lambda^q + B_{q-1}\lambda^{q-1} + \ldots + B_1\lambda + B_0$$

Las matrices (23.3) y (23.4) son iguales y se escribe $A(\lambda) = B(\lambda)$, cuando $p = q$ y $A_i = B_i$, $(i = 0, 1, 2, \ldots, p)$.

La suma $A(\lambda) + B(\lambda)$ es otra matriz λ, $C(\lambda)$, que se obtiene sumando los elementos correspondientes de las dos matrices λ dadas.

El producto $A(\lambda)\cdot B(\lambda)$ es otra matriz λ cuyo grado es, a lo sumo, $p + q$. Cuando una de las matrices $A(\lambda)$ o $B(\lambda)$ sea regular, el grado del producto $A(\lambda)\cdot B(\lambda)$ o bien el de $B(\lambda)\cdot A(\lambda)$ es $p + q$.

La igualdad (23.3) no varía si se sustituye λ por un escalar cualquiera k perteneciente a F. Por ejemplo, para $\lambda = k$, (23.3) se convierte en

$$A(k) \;=\; A_pk^p + A_{p-1}k^{p-1} + \ldots + A_1k + A_0$$

Sin embargo, si se sustituye λ por una matriz cuadrada C de orden n se pueden obtener dos resultados distintos debido a que, en general, dos matrices cuadradas de orden n no son permutables. Las expresiones

$$(23.5) \qquad A_R(C) = A_p C^p + A_{p-1} C^{p-1} + \dots + A_1 C + A_0$$

y

$$(23.6) \qquad A_L(C) = C^p A_p + C^{p-1} A_{p-1} + \dots + CA_1 + A_0$$

se llaman *valores funcionales por la derecha y por la izquierda*, respectivamente, de $A(\lambda)$.

Ejemplo 2. Sea $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda^2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Entonces, $A_R(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 14 & 26 \end{bmatrix}$

y

$$A_L(C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 17 & 27 \end{bmatrix}$$

Véase Problema 1.

DIVISION. En el Problema 2 se demuestra el teorema siguiente:

I. Si $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ son las dos matrices polinómicas (23.3) y (23.4) y la matriz B_q es regular existen las matrices polinómicas únicas $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$; $Q_2(\lambda)$, $R_2(\lambda)$, siendo $R_1(\lambda)$ y $R_2(\lambda)$ iguales a cero o de grado menor al de $B(\lambda)$, tales que

$$(23.7) \qquad A(\lambda) = Q_1(\lambda)\cdot B(\lambda) + R_1(\lambda)$$

y

$$(23.8) \qquad A(\lambda) = B(\lambda)\cdot Q_2(\lambda) + R_2(\lambda)$$

Si $R_1(\lambda) = 0$, $B(\lambda)$ se llama *divisor por la derecha* de $A(\lambda)$; si $R_2(\lambda) = 0$, $B(\lambda)$ es un *divisor por la izquierda* de $A(\lambda)$.

Ejemplo 3. Si $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^4+\lambda^2+\lambda-1 & \lambda^3+\lambda^2+\lambda+2 \\ 2\lambda^3-\lambda & 2\lambda^2+2\lambda \end{bmatrix}$ y $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix}$, se tiene

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2-1 & \lambda-1 \\ 2\lambda & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\lambda & 2\lambda+3 \\ -5\lambda & -2\lambda \end{bmatrix} = Q_1(\lambda)\cdot B(\lambda) + R_1(\lambda)$$

y

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda+1 \\ \lambda-1 & 1 \end{bmatrix} = B(\lambda)\cdot Q_2(\lambda)$$

En este ejemplo, $B(\lambda)$ es un divisor por la izquierda de $A(\lambda)$.

Véase Problema 3.

Una matriz polinómica de la forma

$$(23.9) \qquad B(\lambda) = b_q\lambda^q\cdot I_n + b_{q-1}\lambda^{q-1}\cdot I_n + \dots + b_1\lambda\cdot I_n + b_0 I_n = b(\lambda)\cdot I_n$$

se llama *escalar*. Toda matriz polinómica escalar $B(\lambda) = b(\lambda)\cdot I_n$ es permutable con toda matriz polinómica cuadrada de orden n.

Si en (23.7) y (23.8), $B(\lambda) = b(\lambda)\cdot I$, se tiene

$$(23.10) \qquad A(\lambda) = Q_1(\lambda)\cdot B(\lambda) + R_1(\lambda) = B(\lambda)\cdot Q_1(\lambda) + R_1(\lambda)$$

Ejemplo 4. Sean $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+2\lambda & \lambda+1 \\ \lambda^2-1 & 2\lambda+1 \end{bmatrix}$ y $B(\lambda) = (\lambda+2)I_2$. Entonces,

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda-2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = Q_1(\lambda)\cdot B(\lambda) + R_1(\lambda)$$

y

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda-2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = B(\lambda)\cdot Q_1(\lambda) + R_1(\lambda)$$

Si en (23.10) $R_1(\lambda) = 0$ se verifica, $A(\lambda) = b(\lambda)\cdot I \cdot Q_1(\lambda)$; por lo tanto:

II. La condición necesaria y suficiente para que una matriz polinómica $A(\lambda) = [a_{ij}(\lambda)]$ de grado n sea divisible por una matriz polinómica escalar $B(\lambda) = b(\lambda)\cdot I_n$ es que todos los elementos $a_{ij}(\lambda)$ sean divisibles por $b(\lambda)$.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL RESTO. Sea $A(\lambda)$ la matriz polinómica (23.3) y $B = [b_{ij}]$ una matriz cuadrada de orden n definida sobre un cuerpo F. Como la matriz $\lambda I - B$ es regular podremos escribir

(23.11) $$A(\lambda) = Q_1(\lambda)\cdot(\lambda I - B) + R_1$$

y

(23.12) $$A(\lambda) = (\lambda I - B)\cdot Q_2(\lambda) + R_2$$

siendo R_1 y R_2 independientes de λ. Se puede demostrar que

III. Si la matriz polinómica (23.3) se divide por $\lambda I - B$, siendo $B = [b_{ij}]$ una matriz cuadrada de orden n, hasta obtener restos R_1 y R_2 independientes de λ, resulta

$$R_1 = A_R(B) = A_p B^p + A_{p-1}B^{p-1} + \dots + A_1 B + A_0$$

y

$$R_2 = A_L(B) = B^p A_p + B^{p-1}A_{p-1} + \dots + BA_1 + A_0$$

Ejemplo 5. Sean $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda^2+2 \end{bmatrix}$ y $\lambda I - B = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{bmatrix}$. Entonces,

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 3 \\ 4 & \lambda+4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 14 & 26 \end{bmatrix} = Q_1(\lambda)\cdot(\lambda I - B) + R_1$$

y

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda+1 & 3 \\ 4 & \lambda+4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 17 & 27 \end{bmatrix} = (\lambda I - B)Q_2(\lambda) + R_2$$

En el Ejemplo 2, $R_1 = A_R(B)$ y $R_2 = A_L(B)$, de acuerdo con el Teorema III.

Si $A(\lambda)$ es una matriz polinómica escalar

$$A(\lambda) = f(\lambda)\cdot I = a_p I\lambda^p + a_{p-1}I\lambda^{p-1} + \dots + a_1 I\lambda + a_0 I$$

los restos que aparecen en (23.11) y (23.12) son idénticos, de manera que

$$R_1 = R_2 = a_p B^p + a_{p-1}B^{p-1} + \dots + a_1 B + a_0 I$$

Por tanto,

IV. Si una matriz polinómica escalar $f(\lambda)\cdot I_n$ se divide por $\lambda I_n - B$ hasta obtener un resto R que no dependa de λ resulta $R = f(B)$.

Consecuencia:

V. La condición necesaria y suficiente para que una matriz polinómica escalar $f(\lambda)\cdot I_n$ sea divisible por $\lambda I_n - B$ es que $f(B) = 0$.

TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON. Consideremos la matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ de orden n cuyas matriz y ecuación características son, respectivamente, $\lambda I - A$ y $\phi(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$. De (6.2) se deduce,

$$(\lambda I - A)\cdot \operatorname{adj}(\lambda I - A) = \phi(\lambda)\cdot I$$

Por tanto, $\phi(\lambda)\cdot I$ es divisible por $\lambda I - A$ y, según el Teorema V, $\phi(A) = 0$. En consecuencia,

VI. Toda matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ satisface a su ecuación característica $\phi(\lambda) = 0$.

Ejemplo 6. La ecuación característica de $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ es $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$. En este caso,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 32 & 62 & 31 \\ 31 & 63 & 31 \\ 31 & 62 & 32 \end{bmatrix},$$

y

$$\begin{bmatrix} 32 & 62 & 31 \\ 31 & 63 & 31 \\ 31 & 62 & 32 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Véase Problema 4.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dada la matriz $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ \lambda+1 & 1 \end{bmatrix}$, hallar $A_R(C)$ y $A_L(C)$ siendo $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}; \text{ por tanto,}$$

$$A_R(C) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$A_L(C) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Demostrar que si $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ son las dos matrices polinómicas (23.3) y (23.4) y la matriz B_q es regular existen las matrices polinómicas únicas, $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$ y $Q_2(\lambda)$, $R_2(\lambda)$, siendo $R_1(\lambda)$ y $R_2(\lambda)$ o nulas o de grado menor al de $B(\lambda)$, tales que

(i) $$A(\lambda) = Q_1(\lambda)\cdot B(\lambda) + R_1(\lambda)$$

y

(ii) $$A(\lambda) = B(\lambda)\cdot Q_2(\lambda) + R_2(\lambda)$$

Si $p < q$ se verifica (i) para $Q_1(\lambda) = 0$ y $R_1(\lambda) = A(\lambda)$. Supongamos que $p \geq q$; entonces,

$$A(\lambda) - A_p B_q^{-1} B(\lambda)\lambda^{p-q} = C(\lambda)$$

en donde $C(\lambda)$ es cero o a lo sumo de grado $p-1$.

Si $C(\lambda)$ es cero, o de grado menor que q, se verifica (i) con

$$Q_1(\lambda) = A_p B_q^{-1}\lambda^{p-q} \quad \text{y} \quad R_1(\lambda) = C(\lambda)$$

Si $C(\lambda) = C_s\lambda^s + \dots$ siendo $s > q$.

$$A(\lambda) - A_p B_q^{-1} B(\lambda)\lambda^{p-q} - C_s B_q^{-1} B(\lambda)\lambda^{s-q} = D(\lambda)$$

Si $D(\lambda)$ es cero, o de grado menor que q, se verifica (i) con

$$Q_1(\lambda) = A_p B_q^{-1}\lambda^{p-q} + C_s B_q^{-1}\lambda^{s-q} \qquad \text{y} \qquad R_1(\lambda) = D(\lambda)$$

y, en caso contrario, se continuaría el proceso. Como se van obteniendo sucesivamente matrices polinómicas $C(\lambda)$, $D(\lambda)$, . . . , de grados decrecientes se llegará, finalmente, a una matriz polinómica nula, o de grado menor que q, con lo que queda demostrado (i).

Para obtener (ii), empezamos con

$$A(\lambda) - B(\lambda) B_q^{-1} A_p \lambda^{p-q}$$

La deducción de dicha expresión, así como la demostración de que las matrices son únicas, se deja como ejercicio al alumno. Véase Problema 1, Capítulo 22.

3. Siendo $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^4 + 2\lambda^3 - 1 & \lambda^3 - \lambda - 1 \\ \lambda^3 + \lambda^2 + 1 & \lambda^3 + 1 \end{bmatrix}$ y $B(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda^2 - \lambda & -\lambda^2 + \lambda - 1 \\ -\lambda^2 + 2 & \lambda^2 - \lambda \end{bmatrix}$

hallar las matrices $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$; $Q_2(\lambda)$, $R_2(\lambda)$ de forma que

(*a*) $A(\lambda) = Q_1(\lambda)\cdot B(\lambda) + R_1(\lambda)$, (*b*) $A(\lambda) = B(\lambda)\cdot Q_2(\lambda) + R_2(\lambda)$ como en el Problema 2.

Se tiene

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^4 + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

En este caso, $B_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(*a*) Hallamos

$$A(\lambda) - A_4 B_2^{-1} B(\lambda)\lambda^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = C(\lambda)$$

$$C(\lambda) - C_3 B_2^{-1} B(\lambda)\lambda = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} -10 & 3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = D(\lambda)$$

y

$$D(\lambda) - D_2 B_2^{-1} B(\lambda) = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -13 & 3 \\ -9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\lambda - 13 & 5\lambda + 3 \\ -2\lambda - 9 & 3\lambda + 5 \end{bmatrix} = R_1(\lambda)$$

Por tanto, $$Q_1(\lambda) = (A_4\lambda^2 + C_3\lambda + D_2)B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \lambda^2 + 4\lambda + 4 & \lambda^2 + 5\lambda + 6 \\ 2\lambda + 4 & 3\lambda + 5 \end{bmatrix}$$

(*b*) Hallamos

$$A(\lambda) - B(\lambda) B_2^{-1} A_4\lambda^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = E(\lambda)$$

$$E(\lambda) - B(\lambda) B_2^{-1} E_3\lambda = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = F(\lambda)$$

y

$$F(\lambda) - B(\lambda) B_2^{-1} F_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 8 & -\lambda + 4 \\ \lambda - 7 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = R_2(\lambda)$$

Entonces, $$Q_2(\lambda) = B_2^{-1}(A_4\lambda^2 + E_3\lambda + F_2) = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix}4 & 2\\6 & 3\end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix}4 & 2\\9 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda^2+4\lambda+4 & 2\lambda+2\\ \lambda^2+6\lambda+9 & 3\lambda+5\end{bmatrix}$$

4. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\3 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}$, hallar A^3 y A^4 teniendo en cuenta que A satisface a su ecuación característica; hallar también A^{-1} y A^{-2}, teniendo en cuenta que A es una matriz regular.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -2\\-3 & \lambda-1 & -1\\-2 & -3 & \lambda-1\end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 7\lambda - 11 = 0$$

Entonces,

$$A^3 = 3A^2 + 7A + 11I = 3\begin{bmatrix}8 & 8 & 5\\8 & 7 & 8\\13 & 8 & 8\end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\3 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}42 & 31 & 29\\45 & 39 & 31\\53 & 45 & 42\end{bmatrix}$$

$$A^4 = 3A^3 + 7A^2 + 11A = 3\begin{bmatrix}42 & 31 & 29\\45 & 39 & 31\\53 & 45 & 42\end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix}8 & 8 & 5\\8 & 7 & 8\\13 & 8 & 8\end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\3 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}193 & 160 & 144\\224 & 177 & 160\\272 & 224 & 193\end{bmatrix}$$

De $11I = -7A - 3A^2 + A^3$, se obtiene

$$A^{-1} = \frac{1}{11}[-7I - 3A + A^2] = \frac{1}{11}\left\{-7\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\3 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}8 & 8 & 5\\8 & 7 & 8\\13 & 8 & 8\end{bmatrix}\right\} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix}-2 & 5 & -1\\-1 & -3 & 5\\7 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

$$A^{-2} = \frac{1}{11}[-7A^{-1} - 3I + A] = \frac{1}{121}\left\{-7\begin{bmatrix}-2 & 5 & -1\\-1 & -3 & 5\\7 & -1 & -2\end{bmatrix} - 33\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\3 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}\right\} = \frac{1}{121}\begin{bmatrix}-8 & -24 & 29\\40 & -1 & -24\\-27 & 40 & -8\end{bmatrix}$$

5. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios o raíces características de una matriz cuadrada A de orden n, y $h(x)$ un polinomio de grado p en x. Demostrar que $|h(A)| = h(\lambda_1)\cdot h(\lambda_2)\ldots h(\lambda_n)$.

Tendremos,

(i) $$|\lambda I - A| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)$$

Sea

(ii) $$h(x) = c(s_1 - x)(s_2 - x)\ldots(s_p - x)$$

Entonces,

$$h(A) = c(s_1I - A)(s_2I - A)\ldots(s_pI - A)$$

y

$$\begin{aligned}
|h(A)| &= c^p|s_1I-A|\cdot|s_2I-A|\ldots|s_pI-A| \\
&= \{c(s_1-\lambda_1)(s_1-\lambda_2)\ldots(s_1-\lambda_n)\} \\
&\qquad \cdot\{c(s_2-\lambda_1)(s_2-\lambda_2)\ldots(s_2-\lambda_n)\}\ldots\{c(s_p-\lambda_1)(s_p-\lambda_2)\ldots(s_p-\lambda_n)\} \\
&= \{c(s_1-\lambda_1)(s_2-\lambda_1)\ldots(s_p-\lambda_1)\} \\
&\qquad \cdot\{c(s_1-\lambda_2)(s_2-\lambda_2)\ldots(s_p-\lambda_2)\}\ldots\{c(s_1-\lambda_n)(s_2-\lambda_n)\ldots(s_p-\lambda_n)\} \\
&= h(\lambda_1)\,h(\lambda_2)\ldots h(\lambda_n)
\end{aligned}$$

aplicando (ii).

PROBLEMAS PROPUESTOS

6. Dadas las matrices $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+2\lambda & \lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda-1 \end{bmatrix}$ y $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda^2+\lambda \\ \lambda+1 & \lambda \end{bmatrix}$, hallar:

(a) $A(\lambda)+B(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda^2+2\lambda & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda^2+\lambda+2 & 2\lambda-1 \end{bmatrix}$

(b) $A(\lambda)-B(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda & -\lambda^2 \\ \lambda^2-\lambda & -1 \end{bmatrix}$

(c) $A(\lambda)\cdot B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^4+2\lambda^3+\lambda^2+\lambda & \lambda^4+3\lambda^3+3\lambda^2 \\ \lambda^4+2\lambda^2-1 & \lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2 \end{bmatrix}$

(d) $B(\lambda)\cdot A(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda^4+3\lambda^3+\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3-\lambda \\ 2\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda & 2\lambda^2 \end{bmatrix}$

7. Dadas las matrices $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & \lambda^2 \\ \lambda+2 & \lambda-1 \end{bmatrix}$, $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ -\lambda^2 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, hallar:

$A_R(C) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, $B_R(C) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_R(C)\cdot B_R(C) = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 17 & -7 \end{bmatrix}$, $B_R(C)\cdot A_R(C) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$,

$P_R(C) = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$, $Q_R(C) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$;

$A_L(C) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B_L(C) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $A_L(C)\cdot B_L(C) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, $B_L(C)\cdot A_L(C) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$,

$P_L(C) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $Q_L(C) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$,

siendo $P(\lambda) = A(\lambda)\cdot B(\lambda)$ y $Q(\lambda) = B(\lambda)\cdot A(\lambda)$.

8. Sean $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ dos matrices polinómicas propias, cuadradas y de orden n, de grados p y q, respectivamente, y $C(\lambda)$ una matriz polinómica no nula. Demostrar que el grado del producto de dichas tres matrices, en cualquier orden, es a lo sumo $p+q$.

9. Dados los pares de matrices $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$, hallar $Q_1(\lambda), R_1(\lambda); Q_2(\lambda), R_2(\lambda)$ que satisfacen a (23.7) y (23.8).

(a) $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+2\lambda & \lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix}, \quad B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$

(b) $A(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda^2+\lambda & -\lambda^2+2\lambda+2 \\ -\lambda^2+2\lambda-1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$

(c) $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3-2\lambda+1 & \lambda^4+\lambda^2+7\lambda-2 & 5\lambda^2+2\lambda+4 \\ \lambda^4+3\lambda^2-3\lambda-1 & 3\lambda^3+2\lambda+2 & 4\lambda^2+6\lambda+1 \\ 2\lambda^3-\lambda+2 & \lambda^3+2\lambda^2 & \lambda^3+\lambda^2+8\lambda-4 \end{bmatrix},$

$B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 1 & 3\lambda-1 \\ 2\lambda & \lambda^2 & \lambda+1 \\ \lambda-2 & 2\lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}$

(d) $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 3\lambda^4+\lambda^2-1 & \lambda^3-1 & \lambda^2-\lambda \\ \lambda^3-\lambda^2+1 & \lambda^4+\lambda^2+2 & \lambda-1 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda+1 & 2\lambda^4+\lambda-2 \end{bmatrix}, \quad B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2-2\lambda-1 & \lambda^2+1 & \lambda+1 \\ \lambda+1 & \lambda^2+\lambda & \lambda^2-2\lambda \\ \lambda & \lambda-2 & \lambda^2+\lambda-1 \end{bmatrix}$

Sol. (a) $Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}, \quad R_1(\lambda) = 0; \quad Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda & \lambda-1 \\ -\lambda+2 & -\lambda+2 \end{bmatrix}, \quad R_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda & -\lambda-1 \\ -\lambda+1 & -1 \end{bmatrix}, \quad R_1(\lambda) = 0; \quad Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda-1 & -\lambda+1 \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix}, \quad R_2(\lambda) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda+1 & \lambda^2+3 & -\lambda+7 \\ \lambda^2-1 & 3\lambda+5 & -3\lambda+2 \\ 2\lambda-3 & \lambda & \lambda-6 \end{bmatrix}, \quad R_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -16\lambda+14 & -6\lambda-3 & -5\lambda+2 \\ -21\lambda+4 & -2\lambda+3 & \lambda-5 \\ 5\lambda-7 & 10\lambda+3 & 18\lambda-7 \end{bmatrix}$

$Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda-1 & \lambda^2 & 2 \\ \lambda^2+1 & \lambda & 3 \\ -1 & 2 & \lambda+1 \end{bmatrix}, \quad R_2(\lambda) = 0$

(d) $Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 3\lambda^2+6\lambda+31 & -3\lambda^2-5\lambda-16 & 3\lambda^2-7\lambda+8 \\ \lambda-3 & \lambda^2-\lambda-1 & -\lambda^2+4\lambda-7 \\ -2\lambda-1 & 7 & 2\lambda^2-2\lambda-1 \end{bmatrix}$

$R_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 81\lambda+46 & -12\lambda-16 & -85\lambda-23 \\ 4\lambda-1 & 15\lambda-9 & 12\lambda-5 \\ -9\lambda-8 & -7\lambda & 17\lambda-2 \end{bmatrix}$

$Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 3\lambda^2+5\lambda+31 & -\lambda^2-\lambda-4 & 2\lambda^2-4\lambda+3 \\ \lambda-14 & \lambda^2 & -2\lambda^2+6\lambda-6 \\ -3\lambda-2 & 3 & 2\lambda^2-2\lambda-2 \end{bmatrix}$

$R_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 71\lambda+46 & -12\lambda-8 & -\lambda+11 \\ -26\lambda-30 & 11\lambda+6 & 4\lambda-4 \\ -15\lambda-30 & 2\lambda+4 & 16\lambda-16 \end{bmatrix}$

10. Comprobar en el Problema 9(*b*) que $R_1(\lambda) = A_R(C)$ y $R_2(\lambda) = A_L(C)$ siendo $B(\lambda) = \lambda I - C$.

11. Dadas las matrices $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 3\lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda^2-3\lambda+2 \end{bmatrix}$ y $C(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & \lambda \\ \lambda-3 & \lambda+1 \end{bmatrix}$

(*a*) hallar $A(\lambda) = B(\lambda)\cdot C(\lambda)$

(*b*) hallar $Q(\lambda)$ y $R(\lambda)$ de grado igual o mayor que uno, de forma que $A(\lambda) = Q(\lambda)\cdot B(\lambda) + R(\lambda)$.

Sol. $\begin{bmatrix} \lambda^3+5\lambda^2-7\lambda-1 & \lambda^3+3\lambda^2+5\lambda+1 \\ \lambda^3-5\lambda^2+11\lambda-10 & \lambda^3-\lambda^2-3\lambda+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+4 & \lambda+3 \\ \lambda-6 & \lambda-1 \end{bmatrix} B(\lambda) + \begin{bmatrix} -9\lambda+1 & -\lambda-9 \\ 13\lambda-6 & 9\lambda+10 \end{bmatrix}$

12. Siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, hallar como en el Problema 4,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 17 & 24 \\ 12 & 17 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^{-2} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-3} = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

13. Demostrar que si A y B son dos matrices semejantes y $g(\lambda)$ es un polinomio escalar cualquiera, $g(A)$ y $g(B)$ son semejantes. *Ind.* Demostrar, en primer lugar, que A^k y B^k son semejantes para todo valor de k entero y positivo.

14. Demostrar que si $B = \text{diag}\,(B_1, B_2, \ldots, B_m)$ y $g(\lambda)$ es una matriz polinómica escalar cualquiera se verifica:

$$g(B) = \text{diag}\,(g(B_1), g(B_2), \ldots, g(B_m))$$

15. Demostrar el Teorema III.
Ind. Comprobar que $\lambda I - B$ divide a $A(\lambda) - A_R(B)$.

16. Una matriz C es *raíz* de la matriz polinómica escalar $B(\lambda)$ de la forma (23.9) si $B(C) = 0$. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que la matriz C sea raíz de $B(\lambda)$ es que la matriz característica de C divida a $B(\lambda)$.

17. Demostrar que si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios o raíces características de A, y $f(A)$ una matriz polinómica escalar en A, los valores propios de $f(A)$ son $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$.
Ind. Escribir $\lambda - f(x) = c(x_1 - x)(x_2 - x)\ldots(x_s - x)$ de forma que $|\lambda I - f(A)| = c^n|x_1 I - A|\cdot|x_2 I - A| \ldots |x_s I - A|$. Por otra parte, $|x_i I - A| = (x_i - \lambda_1)(x_i - \lambda_2)\ldots(x_i - \lambda_n)$ y $c(x_1 - \lambda_j)(x_2 - \lambda_j)\ldots(x_s - \lambda_j) = \lambda - f(\lambda_j)$.

18. Hallar los valores propios de $f(A) = A^2 - 2A + 3$, siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

19. Obtener el teorema del Problema 5 como corolario del Problema 17.

20. Demostrar que si X es un vector propio de la matriz A del Problema 17, también lo es de $f(A)$.

21. Dada la matriz $A(t) = [a_{ij}(t)]$ con $a_{ij}(t)$ polinomios reales en la variable t escribir

$$A(t) = \begin{bmatrix} t^2+t+1 & t^4+2t^3+3t^2+5 \\ t^3-4 & t^3-3t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t^4 + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} t^3 + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

y demostrar, derivando el segundo miembro como si fuera un polinomio de coeficientes constantes, que

$$\frac{d}{dt}A(t) = \left[\frac{d}{dt}a_{ij}(t)\right]$$

22. Deducir las fórmulas:

(*a*) $\frac{d}{dt}\{A(t) + B(t)\}$; (*b*) $\frac{d}{dt}\{cA(t)\}$, siendo c una constante o bien $c = [c_{ij}]$; (*c*) $\frac{d}{dt}\{A(t)\cdot B(t)\}$; (*d*) $\frac{d}{dt}A^{-1}(t)$.

Ind. En (*c*), escribir $A(t)\cdot B(t) = C(t) = [c_{ij}(t)]$ y derivar $c_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, b_{kj}(t)$. En (*d*), aplicar $A(t)\cdot A^{-1}(t) = I$.

Capítulo 24

Forma normal de Smith

LAS TRANSFORMACIONES ELEMENTALES en una matriz polinómica $A(\lambda)$ o matriz λ, definida sobre $F[\lambda]$ son las siguientes:

(1) Permutación de las filas i y j, que se representa por H_{ij}; permutación de las columnas i y j, que se representa por K_{ij}.

(2) Multiplicación de la fila i por una constante k distinta de cero, que se representa por $H_i(k)$; multiplicación de la columna i por una constante k distinta de cero, que se representa por $K_i(k)$.

(3) Suma de la fila i con el producto de otra fila j por $f(\lambda)$, un polinomio cualquiera de $F[\lambda]$, que se representa por $H_{ij}(f(\lambda))$; la suma de la columna i con el producto de otra columna j por $f(\lambda)$, que se representa por $K_{ij}(f(\lambda))$.

Estas transformaciones elementales las hemos estudiado en el Capítulo 5, excepto (3), en la que se ha sustituido la palabra escalar por polinómica. Como allí, también representaremos con el mismo símbolo tanto las transformaciones elementales como las matrices elementales que se obtienen aplicando aquéllas a la matriz I. Asimismo, una transformación de fila (columna) aplicada a $A(\lambda)$ se efectúa multiplicándola por la izquierda (derecha) por una matriz $H(K)$ apropiada.

Paralelamente a los teoremas del Capítulo 5 se verifican los siguientes:

I. Toda matriz elemental definida sobre $F[\lambda]$ posee inversa, que es, a su vez, una matriz elemental de $F[\lambda]$.

II. Si $|A(\lambda)| = k \neq 0$, siendo k un elemento perteneciente a F, $A(\lambda)$ se puede expresar en forma de un producto de matrices.

III. La característica de una matriz polinómica o matriz λ es un invariante con respecto a las transformaciones elementales.

Dos matrices polinómicas, $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$, cuadradas y de orden n, cuyos elementos pertenecen a $F[\lambda]$, se llaman *equivalentes* si existen las matrices $P(\lambda) = H_s \ldots H_2 \cdot H_1$ y $Q(\lambda) = K_1 \cdot K_2 \ldots K_t$ tales que

(24.1) $$B(\lambda) = P(\lambda) \cdot A(\lambda) \cdot Q(\lambda)$$

Por tanto,

IV. Dos matrices λ de orden $m \times n$ que sean equivalentes tienen la misma característica.

CONJUNTO CANONICO. En los Problemas 1 y 2 se demuestra el teorema siguiente:

V. Sean $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ dos matrices equivalentes de característica r; el máximo común divisor de todos los menores cuadrados de orden s de $A(\lambda)$, siendo $s \leq r$, es también el máximo común divisor de todos los menores cuadrados de orden s de $B(\lambda)$.

En el Problema 3 se demuestra el teorema siguiente:

VI. Toda matriz polinómica $A(\lambda)$ de característica r se puede reducir, mediante transformaciones elementales, a la *forma normal de Smith*

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f_r(\lambda) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{24.2}$$

en donde cada uno de los polinomios $f_i(\lambda)$ es mónico y divisor de $f_{i+1}(\lambda)$, $(i = 1, 2, \dots, r-1)$.

Cuando una matriz polinómica $A(\lambda)$ de característica r se ha reducido a la forma normal (24.2), según el Teorema V, el máximo común divisor de todos los menores cuadrados de orden s de $A(\lambda)$, siendo $s \leq r$, es el máximo común divisor de todos los menores cuadrados de orden s de $N(\lambda)$. Como en $N(\lambda)$ cada $f_i(\lambda)$ es un divisor de $f_{i+1}(\lambda)$, el máximo común divisor de todos los menores cuadrados de orden s de $N(\lambda)$ y, por consiguiente de $A(\lambda)$, es

$$g_s(\lambda) = f_1(\lambda)\cdot f_2(\lambda)\cdot\ldots\cdot f_s(\lambda), \quad (s = 1, 2, \dots, r) \tag{24.3}$$

Supongamos que $A(\lambda)$ se ha reducido a

$$N(\lambda) = \operatorname{diag}(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_r(\lambda), 0, \dots, 0)$$

y a

$$N_1(\lambda) = \operatorname{diag}(h_1(\lambda), h_2(\lambda), \dots, h_r(\lambda), 0, \dots, 0)$$

De (24.3)

$$g_s(\lambda) = f_1(\lambda)\cdot f_2(\lambda)\cdot\ldots\cdot f_s(\lambda) = h_1(\lambda)\cdot h_2(\lambda)\cdot\ldots\cdot h_s(\lambda)$$

Ahora bien, $g_1(\lambda) = f_1(\lambda) = h_1(\lambda)$, $g_2(\lambda) = f_1(\lambda)\cdot f_2(\lambda) = h_1(\lambda)\cdot h_2(\lambda)$ de forma que $f_2(\lambda) = h_2(\lambda)$, ...; en general, si se define $g_0(\lambda) = 1$, entonces

$$g_s(\lambda)/g_{s-1}(\lambda) = f_s(\lambda) = h_s(\lambda), \quad (s = 1, 2, \dots, r) \tag{24.4}$$

con lo cual se verifica el teorema siguiente:

VII. La matriz $N(\lambda)$ definida en (24.2) queda determinada de forma única por la matriz dada $A(\lambda)$.

Por consiguiente, las matrices normales de Smith definidas sobre el cuerpo $F[\lambda]$ forman un conjunto canónico con respecto a la equivalencia.

Ejemplo 1. Sea $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda+3 \\ \lambda^3+2\lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3+3\lambda^2+\lambda \\ \lambda^2+3\lambda+2 & \lambda^2+2\lambda+1 & 3\lambda^2+6\lambda+3 \end{bmatrix}$

Se demuestra fácilmente que el máximo común divisor de los menores de los elementos de una fila de $A(\lambda)$ es $g_1(\lambda) = 1$; que el máximo común divisor de los menores de dos filas de $A(\lambda)$ es $g_2(\lambda) = \lambda$, y $g_3(\lambda) = \frac{1}{2}|A(\lambda)| = \lambda^3 + \lambda^2$. Por tanto, según (24.4),

$$f_1(\lambda) = g_1(\lambda) = 1, \quad f_2(\lambda) = g_2(\lambda)\; g_1(\lambda) = \lambda, \quad f_3(\lambda) = g_3(\lambda)/g_2(\lambda) = \lambda^2+\lambda$$

con lo que la forma normal de Smith de $A(\lambda)$ es

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix}$$

En el Problema 4 se indica otra forma de efectuar la reducción.

FACTORES INVARIANTES. Los polinomios $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_r(\lambda)$ de la forma normal de Smith de $A(\lambda)$ se llaman *factores invariantes* de $A(\lambda)$. Si $f_k(\lambda) = 1$, con $k \leq r$, entonces $f_1(\lambda) = f_2(\lambda) = \dots = f_k(\lambda) = 1$ y, en este caso, se denominan factores invariantes *triviales*.

Consecuencia del Teorema VII es:

VIII. La condición necesaria y suficiente para que dos matrices polinómicas cuadradas de orden n definidas sobre un cuerpo $F[\lambda]$ sean equivalentes es que tengan los mismos factores invariantes.

DIVISORES ELEMENTALES. Sea $A(\lambda)$ una matriz polinómica cuadrada de orden n definida sobre $F[\lambda]$, y supongamos que sus factores invariantes vienen dados por

$$f_i(\lambda) = \{p_1(\lambda)\}^{q_{i1}}\{p_2(\lambda)\}^{q_{i2}}\ldots\{p_s(\lambda)\}^{q_{is}}, \quad (i = 1, 2, \ldots, r) \tag{24.5}$$

siendo $p_1(\lambda), p_2(\lambda), \ldots, p_s(\lambda)$ polinomios mónicos e irreducibles de $F[\lambda]$. Determinados q_{ij} pueden ser nulos, con lo cual, quizá no figuren algunos de los factores anteriores; sin embargo, como $f_i(\lambda)$ es un divisor de $f_{i+1}(\lambda)$, resulta que $q_{i+1,j} \geqq q_{ij}$, $(i = 1, 2, \ldots, r-1;\ j = 1, 2, \ldots, s)$.

Los factores $\{p_j(\lambda)\}^{q_{ij}} \neq 1$ que aparecen en (24.5) se llaman *divisores elementales*, sobre $F[\lambda]$, de $A(\lambda)$.

Ejemplo 2. Supongamos que una matriz polinómica $A(\lambda)$ cuadrada y de orden 10, definida sobre el cuerpo de los números racionales, tiene la forma normal de Smith

$$\left[\begin{array}{ccccc:c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+1) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+1)^2\lambda & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda^2+1)^2\lambda^2(\lambda^2-3) & \\
\hdashline
 & & 0 & & & 0
\end{array}\right]$$

La característica de esta matriz es 5. Los factores invariantes son

$$f_1(\lambda) = 1, \quad f_2(\lambda) = 1, \quad f_3(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+1),$$
$$f_4(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+1)^2\lambda, \quad f_5(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda^2+1)^2\lambda^2(\lambda^2-3)$$

Los divisores elementales son

$$(\lambda-1)^2, \ \lambda-1, \ \lambda-1, \ (\lambda^2+1)^2, \ (\lambda^2+1)^2, \ (\lambda^2+1), \ \lambda^2, \ \lambda, \ \lambda^2-3$$

Obsérvese que los divisores elementales no son necesariamente distintos; cada uno de ellos figura tantas veces como en los factores invariantes.

Ejemplo 3. (*a*) Sobre el cuerpo de los números reales, los factores invariantes de $A(\lambda)$ del Ejemplo 2 son los allí indicados, pero los divisores elementales son

$$(\lambda-1)^2, \ \lambda-1, \ \lambda-1, \ (\lambda^2+1)^2, \ (\lambda^2+1)^2, \ (\lambda^2+1), \ \lambda^2, \ \lambda, \ \lambda-\sqrt{3}, \ \lambda+\sqrt{3}$$

ya que $\lambda^2 - 3$ se puede descomponer en factores.

(*b*) Sobre el cuerpo de los números complejos, los factores invariantes lo siguen siendo, pero los divisores elementales son

$$(\lambda-1)^2, \ \lambda-1, \ \lambda-1, \ (\lambda+i)^2, \ (\lambda+i)^2, \ \lambda+i, \ (\lambda-i)^2,$$
$$(\lambda-i)^2, \ \lambda-i, \ \lambda^2, \ \lambda, \ \lambda-\sqrt{3}, \ \lambda+\sqrt{3}$$

Los factores invariantes de una matriz polinómica o matriz λ determinan tanto su característica como sus divisores elementales; recíprocamente, la característica y los divisores elementales determinan los factores invariantes.

Ejemplo 4. Los divisores elementales de la matriz polinómica $A(\lambda)$ cuadrada, de orden 6 y característica 5, son

$$\lambda^3, \ \lambda^2, \ \lambda, \ (\lambda-1)^2, \ (\lambda-1)^2, \ \lambda-1, \ (\lambda+1)^2, \ \lambda+1$$

Hallar los factores invariantes y escribir la forma canónica de Smith.

Para hallar $f_5(\lambda)$ se determina el mínimo común múltiplo de los divisores elementales, es decir,

$$f_5(\lambda) = \lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

Para hallar $f_4(\lambda)$ se prescinde de los divisores elementales utilizados en $f_5(\lambda)$ y se calcula el mínimo común múltiplo de los restantes, es decir,

$$f_4(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

Repitiendo el proceso se llega a $f_3(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$. Una vez que se han terminado los divisores elementales, $f_2(\lambda) = f_1(\lambda) = 1$.

La forma canónica de Smith es, por consiguiente,

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como los factores invariantes de una matriz λ son invariantes respecto de las transformaciones elementales, también lo serán los divisores elementales. Por tanto,

IX. La condición necesaria y suficiente para que dos matrices polinómicas cuadradas de orden n definidas sobre un cuerpo $F[\lambda]$ sean equivalentes sobre dicho cuerpo es que tengan la misma característica e iguales divisores elementales.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demostrar que si $P(\lambda)$ es un producto de matrices elementales, el máximo común divisor de todos los menores cuadrados de orden s de $P(\lambda) \cdot A(\lambda)$ es también el máximo común divisor de todos los menores cuadrados de orden s de $A(\lambda)$.

Solo hay que considerar $P(\lambda) \cdot A(\lambda)$, siendo $P(\lambda)$ cada uno de los tres tipos de matrices elementales H.

Sea $R(\lambda)$ un menor cuadrado de orden s de $A(\lambda)$ y $S(\lambda)$ un menor cuadrado de orden s de $P(\lambda) \cdot A(\lambda)$ que ocupe la misma posición que $R(\lambda)$. Supongamos que $P(\lambda) = H_{ij}$; su efecto sobre $A(\lambda)$ es, o bien (i) no modificar $R(\lambda)$, o bien (ii) permutar dos filas de $R(\lambda)$, o bien (iii) permutar una fila de $R(\lambda)$ con otra que no pertenezca a $R(\lambda)$. En el caso (i), $S(\lambda) = R(\lambda)$; en (ii), $S(\lambda) = -R(\lambda)$, en (iii), $S(\lambda)$ es, prescindiendo del signo, otro menor cuadrado de $A(\lambda)$.

Sea ahora $P(\lambda) = H_i(k)$; entonces, $S(\lambda) = R(\lambda)$ o bien $S(\lambda) = kR(\lambda)$.

Finalmente, si $P(\lambda) = H_{ij}(f(\lambda))$, su efecto sobre $A(\lambda)$ es, o bien (i) no modificar $R(\lambda)$, o bien (ii) sumar a una fila de $R(\lambda)$ el producto de otra de $R(\lambda)$ por $f(\lambda)$, o bien (iii) sumar a una fila de $R(\lambda)$ el producto de $f(\lambda)$ por otra fila que no pertenece a $R(\lambda)$. En los casos (i) e (ii), $S(\lambda) = R(\lambda)$; en el caso (iii),

$$S(\lambda) = R(\lambda) \pm f(\lambda) \cdot T(\lambda)$$

en donde $T(\lambda)$ un menor cuadrado de orden s de $A(\lambda)$.

Por tanto, un menor cualquiera, cuadrado y de orden s, de $P(\lambda) \cdot A(\lambda)$ es combinación lineal de menores cuadrados de orden s de $A(\lambda)$. Si $g(\lambda)$ es el máximo común divisor de todos los menores cuadrados de orden s de $A(\lambda)$, y $g_1(\lambda)$ es el máximo común divisor de todos los menores cuadrados de orden s de $P(\lambda) \cdot A(\lambda)$, entonces $g(\lambda)$ es un divisor de $g_1(\lambda)$. Sea $B(\lambda) = P(\lambda) \cdot A(\lambda)$.

Ahora bien, $A(\lambda) = P^{-1}(\lambda) \cdot B(\lambda)$ y $P^{-1}(\lambda)$ es un producto de matrices elementales. Por tanto, $g_1(\lambda)$ es un divisor de $g(\lambda)$, con lo cual, $g_1(\lambda) = g(\lambda)$.

2. Demostrar que si $P(\lambda)$ y $Q(\lambda)$ son productos de matrices elementales, el máximo común divisor de todos los menores cuadrados de orden s de $P(\lambda) \cdot A(\lambda) \cdot Q(\lambda)$ es también el máximo común divisor de todos los menores cuadrados de orden s de $A(\lambda)$.

Sean $B(\lambda) = P(\lambda) \cdot A(\lambda)$ y $C(\lambda) = B(\lambda) \cdot Q(\lambda)$. Como $C'(\lambda) = Q'(\lambda) \cdot B'(\lambda)$ y $Q'(\lambda)$ es un producto de matrices elementales, el máximo común divisor de todos los menores cuadrados de orden s de $C'(\lambda)$ es el máximo común divisor de todos los menores cuadrados de orden s de $B'(\lambda)$. Pero el máximo común divisor de todos los menores cuadrados de orden s de $C'(\lambda)$ es el máximo común divisor de todos los menores cuadrados de $C(\lambda)$, y lo mismo se verifica con $B'(\lambda)$ y $B(\lambda)$. En consecuencia, el máximo común divisor de todos los menores cuadrados de orden s de $C(\lambda) = P(\lambda) \cdot A(\lambda) \cdot Q(\lambda)$ es el máximo común divisor de todos los menores cuadrados de orden s de $A(\lambda)$.

3. Demostrar que toda matriz polinómica $A(\lambda) = [a_{ij}(\lambda)]$ de característica r se puede reducir, mediante transformaciones elementales, a la forma normal de Smith

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f_r(\lambda) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

en donde cada $f_i(\lambda)$ es un polinomio mónico que divide a $f_{i+1}(\lambda)$, $(i = 1, 2, \dots, r-1)$.

El teorema se verifica para $A(\lambda) = 0$. Suponiendo, pues, que $A(\lambda) \neq 0$ habrá un elemento $a_{ij}(\lambda) \neq 0$ que sea el de menor grado. Mediante transformaciones del tipo 2 se puede conseguir que este elemento sea mónico y, permutando convenientemente algunas filas y columnas, se logra que pase a ocupar la posición (1.1) de la matriz, convirtiéndose en el nuevo $a_{11}(\lambda)$.

(*a*) Supongamos que $a_{11}(\lambda)$ divide a todos los demás elementos de $A(\lambda)$. Mediante una transformación del tipo (3), $A(\lambda)$ se puede reducir a la forma

(i) $$\begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 \\ 0 & B(\lambda) \end{bmatrix}$$

siendo $f_1(\lambda) = a_{11}(\lambda)$.

(*b*) Supongamos que $a_{11}(\lambda)$ no divide a todos los elementos de $A(\lambda)$. Sea $a_{1j}(\lambda)$ un elemento de la primera fila que no sea divisible por $a_{11}(\lambda)$. Según el Teorema I, Capítulo 23,

$$a_{1j}(\lambda) = q(\lambda)\, a_{11}(\lambda) + r_{1j}(\lambda)$$

en donde $r_{1j}(\lambda)$ es de grado menor que el de $a_{11}(\lambda)$. Restemos de la columna j el producto de $q(\lambda)$ por la primera columna, de manera que el elemento de la primera fila y primera columna sea ahora $r_{1j}(\lambda)$. Mediante una transformación del tipo 2 sustituimos este elemento por otro que sea mónico y, permutando columnas, se lleva a la posición (1.1) pasando a ser un nuevo $a_{11}(\lambda)$. Si este $a_{11}(\lambda)$ divide a todos los elementos de $A(\lambda)$, estamos en el caso (*a*) y se obtiene (i). Si no es así, se repite el procedimiento anterior un número finito de veces hasta llegar a una matriz en la que todo elemento de la primera fila y primera columna sea divisible por el elemento que ocupe la posición (1.1).

Si este elemento divide a todos los de $A(\lambda)$, procedemos como en (*a*) para obtener (i). En caso contrario, supongamos que $a_{ij}(\lambda)$ no sea divisible por $a_{11}(\lambda)$. Sean $a_{i1}(\lambda) = q_{i1}(\lambda) \cdot a_{11}(\lambda)$ y $a_{1j}(\lambda) = q_{1j}(\lambda) \cdot a_{11}(\lambda)$. De la fila i restamos el producto de $q_{i1}(\lambda)$ por la primera fila, con lo cual se sustituyen $a_{i1}(\lambda)$ por 0 y $a_{ij}(\lambda)$ por $a_{ij}(\lambda) - q_{i1}(\lambda) \cdot a_{1j}(\lambda)$. Sumando ahora la fila i con la primera, el elemento $a_{11}(\lambda)$ no varía, pero $a_{1j}(\lambda)$ se sustituye por

$$a_{ij}(\lambda) - q_{i1}(\lambda) \cdot a_{1j}(\lambda) + a_{1j}(\lambda) = a_{ij}(\lambda) + q_{1j}(\lambda)\{1 - q_{i1}(\lambda)\}\, a_{11}(\lambda)$$

Como éste no es divisible por $a_{11}(\lambda)$, dividimos por él y obtendremos, como antes, una nueva sustitución (el resto) para $a_{11}(\lambda)$. Repitiendo el proceso un número finito de veces llegaremos a un polinomio mónico $a_{11}(\lambda)$ que dividirá a todos los elementos y, por tanto, se obtiene (i).

A continuación, haciendo lo mismo con $B(\lambda)$, resulta

$$\begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & C(\lambda) \end{bmatrix}$$

que es la forma normal de Smith.

Como $f_1(\lambda)$ es un divisor de todos los elementos de $B(\lambda)$, y $f_2(\lambda)$ es el máximo común divisor de los elementos de $B(\lambda)$, $f_1(\lambda)$ divide a $f_2(\lambda)$. Análogamente se deduce que $f_i(\lambda)$ es un divisor de $f_{i+1}(\lambda)$.

4. Reducir

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda+3 \\ \lambda^3+2\lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3+3\lambda^2+\lambda \\ \lambda^2+3\lambda+2 & \lambda^2+2\lambda+1 & 3\lambda^2+6\lambda+3 \end{bmatrix}$$

a su forma normal de Smith.

En este caso, no es necesario seguir el procedimiento completo del Problema 3. El elemento $f_1(\lambda)$ de la forma normal de Smith es el máximo común divisor de los elementos de $A(\lambda)$; se deduce fácilmente que éste es 1. En primer lugar, se procede como en el Problema 3 para obtener (i), llevando el elemento a la posición (1.1). A continuación, restando la segunda columna de la primera se obtiene,

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda+1 & \lambda+3 \\ \lambda^2 & \lambda^3+\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3+3\lambda^2+\lambda \\ \lambda+1 & \lambda^2+2\lambda+1 & 3\lambda^2+6\lambda+3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda+1 & \lambda+3 \\ 0 & \lambda & \lambda^3+\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda^2+2\lambda \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^3+\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda^2+2\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B(\lambda) \end{bmatrix}$$

El máximo común divisor de los elementos de $B(\lambda)$ es λ. Por tanto,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^3+\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda^2+2\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda^2+2\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix}$$

que es la forma pedida.

5. Reducir

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda-1 & \lambda+2 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda^2-2\lambda & \lambda^2-3\lambda+2 & \lambda^2+\lambda-3 \end{bmatrix}$$

A su forma normal de Smith.

Tendremos,

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda+2 \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda-2 & \lambda^2-3\lambda+2 & \lambda^2+\lambda-3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda+2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda-1 \\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

en donde se han aplicado las transformaciones elementales $K_{12}(-1)$; $H_{21}(-\lambda)$, $H_{31}(-\lambda+2)$; $K_{21}(-\lambda+1)$, $K_{31}(-\lambda-2)$; $H_{23}(-1)$; $K_{23}(1)$; $H_{32}(\lambda+1)$, $H_2(-1)$; $K_{32}(-\lambda-1)$, $K_3(-1)$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

6. Demostrar que $H_{ij}K_{ij} = H_i(k)K_i(1/k) = H_{ij}(f(\lambda)) \cdot K_{ji}(-f(\lambda)) = I$.

7. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que una matriz polinómica $A(\lambda)$, cuadrada y de orden n, se pueda descomponer en un producto de matrices elementales es que $A(\lambda)$ sea una constante distinta de cero.

8. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que una matriz polinómica $A(\lambda)$, cuadrada y de orden n, se pueda reducir a la matriz I mediante transformaciones elementales es que $|A(\lambda)|$ sea constante y distinta de cero.

9. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que una matriz polinómica $A(\lambda)$ definida sobre un cuerpo $F[\lambda]$ posea inversa, con elementos pertenecientes a dicho $F[\lambda]$, es que $A(\lambda)$ se pueda descomponer en un producto de matrices elementales.

10. Hallar las matrices $P(\lambda)$ y $Q(\lambda)$ de forma que $P(\lambda)\cdot A(\lambda)\cdot Q(\lambda) = I$ y obtener

$$A(\lambda)^{-1} = Q(\lambda)\cdot P(\lambda)$$

siendo

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & \lambda \\ 2 & \lambda+2 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

Ind. Véase Problema 6, Capítulo 5. ***Sol.*** $\begin{bmatrix} 1 & \lambda+2 & -\lambda-1 \\ \lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-1 & -\lambda^2-\lambda+1 \\ -\lambda & -\lambda^2-3\lambda-2 & \lambda^2+2\lambda+1 \end{bmatrix}$

11. Reducir las matrices siguientes a su forma normal de Smith:

$$(a)\quad \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \lambda-1 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+2\lambda & \lambda^2-1 \\ 2\lambda^2-2\lambda & \lambda^2-2\lambda & 2\lambda^2-3\lambda+2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$(b)\quad \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & \lambda^3+\lambda & 2\lambda^3-\lambda^2+\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2+1 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ \lambda^2 & \lambda^3 & 2\lambda^3-\lambda^2+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+1 \end{bmatrix}$$

$$(c)\quad \begin{bmatrix} \lambda+1 & 2\lambda-2 & \lambda-2 & \lambda^2 \\ \lambda^2+\lambda+1 & 2\lambda^2-2\lambda+1 & \lambda^2-2\lambda & \lambda^3 \\ \lambda^2-\lambda-2 & 3\lambda^2-7\lambda+4 & 2\lambda^2-5\lambda+4 & \lambda^3-7\lambda^2 \\ \lambda^3+\lambda^2 & 2\lambda^3-2\lambda^2 & \lambda^3-2\lambda^2 & \lambda^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4-\lambda^3 \end{bmatrix}$$

$$(d)\quad \begin{bmatrix} \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda^2+\lambda-1 & \lambda^2+\lambda \\ \lambda^2+\lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^3 & \lambda^2-1 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2 & \lambda^3+\lambda-1 & \lambda^2 \\ \lambda^3+\lambda^2 & \lambda^3 & \lambda^4 & \lambda^3+\lambda^2-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-1 \end{bmatrix}$$

$$(e)\quad \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & \lambda^2+3\lambda+3 & \lambda^2+4\lambda-2 & \lambda^2+3 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & \lambda+2 & \lambda-2 \\ 3\lambda+1 & 4\lambda+3 & 2\lambda+2 & 3\lambda+2 \\ \lambda^2+2\lambda & \lambda^2+6\lambda+4 & \lambda^2+6\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda+3 \end{bmatrix} \sim I_4$$

$$(f)\quad \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

12. Hallar los divisores elementales de las matrices del Problema 11 sobre los cuerpos de los números racionales, reales y complejos.

13. Siendo los polinomios siguientes factores invariantes no triviales de una matriz, hallar sus divisores elementales sobre el cuerpo de los números reales.

(*a*) $\lambda^2-\lambda,\ \lambda^3-\lambda^2,\ \lambda^6-2\lambda^5+\lambda^4$

(*b*) $\lambda+1,\ \lambda^2-1,\ (\lambda^2-1)^2,\ (\lambda^2-1)^3$

(*c*) $\lambda,\ \lambda^3+\lambda,\ \lambda^7-\lambda^6+2\lambda^5-2\lambda^4+\lambda^3-\lambda^2$

(*d*) $\lambda,\ \lambda^3+\lambda,\ \lambda^5+2\lambda^3+\lambda,\ \lambda^6+\lambda^5+2\lambda^4+2\lambda^3+\lambda^2+\lambda$

Sol. (*a*) $\lambda^4,\ \lambda^2,\ \lambda,\ (\lambda-1)^2,\ \lambda-1,\ \lambda-1$

(*b*) $\lambda+1,\ \lambda+1,\ (\lambda+1)^2,\ (\lambda+1)^3,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^3$

(*c*) $\lambda,\ \lambda,\ \lambda^2,\ \lambda^2+1,\ (\lambda^2+1)^2,\ \lambda-1$

(*d*) $\lambda,\ \lambda,\ \lambda,\ \lambda,\ \lambda^2+1,\ (\lambda^2+1)^2,\ (\lambda^2+1)^2,\ \lambda+1$

14. Siendo los polinomios siguientes divisores elementales de una matriz de característica seis, hallar sus factores invariantes.

(*a*) $\lambda,\ \lambda,\ \lambda+1,\ \lambda+2,\ \lambda+3,\ \lambda+4$

(*b*) $\lambda^3,\ \lambda^2,\ \lambda,\ (\lambda-1)^2,\ \lambda-1$

(*c*) $(\lambda-1)^3,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^2,\ \lambda-1,\ (\lambda+1)^2$

(*d*) $\lambda^5,\ \lambda^3,\ \lambda,\ (\lambda+2)^5,\ (\lambda+2)^4,\ (\lambda+2)^2$

Sol. (*a*) $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \lambda,\ \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)$

(*b*) $1,\ 1,\ 1,\ \lambda,\ \lambda^2(\lambda-1),\ \lambda^3(\lambda-1)^2$

(*c*) $1,\ 1,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^3(\lambda+1)^2$

(*d*) $1,\ 1,\ 1,\ \lambda(\lambda+2)^2,\ \lambda^3(\lambda+2)^4,\ \lambda^5(\lambda+2)^5$

15. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} Dx_1 + (D+1)x_2 & = & 0 \\ (D+2)x_1 - (D-1)x_3 & = & t \\ (D+1)x_2 + (D+2)x_3 & = & e^t \end{cases}$$

siendo $x_1,\ x_2,\ x_3$ incógnitas reales, funciones de una variable real t y $D = \dfrac{d}{dt}$.

Ind. En notación matricial, el sistema dado se escribe en la forma

$$AX = \begin{bmatrix} D & D+1 & 0 \\ D+2 & 0 & -D+1 \\ 0 & D+1 & D+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ e^t \end{bmatrix} = H$$

Los polinomios en D de A se combinan como lo hacen los polinomios en λ de una matriz polinómica; comenzar, pues, como en el Problema 6, Capítulo 5, y aplicar ordenadamente las transformaciones elementales siguientes:

$K_{12}(-1),\ H_1(-1),\ K_{21}(D+1),\ H_{21}(-D-2),\ H_{31}(D+1),\ K_{23}(D),\ H_{23}(-4),\ K_2(\tfrac{1}{2}),\ K_{32}(5D+7),\ H_{32}(-\tfrac{1}{2}D),$
$H_3(2),\ K_3(1/5)$ En estas condiciones

$$PAQ = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5D+6 & 1 & -4 \\ -5D^2-8D-2 & -D & 4D+2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(D+1) & \frac{1}{10}(5D^2+12D+7) \\ -1 & -\frac{1}{2}D & -\frac{1}{10}(5D^2+7D) \\ 0 & \frac{1}{2}D & \frac{1}{10}(5D^2+7D+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & D^2+\frac{9}{5}D+\frac{4}{5} \end{bmatrix} = N_1$$

que es la forma normal de Smith de A.

Aplicar la transformación lineal $X = QY$ para reducir $AX = H$ a $AQY = H$ y de $PAQY = N_1Y = PH$ obtener

$$y_1 = 0,\quad y_2 = t-4e^t,\quad (D^2+\tfrac{9}{5}D+\tfrac{4}{5})y_3 = 6e^t-1 \quad \text{y} \quad y_3 = K_1e^{-4t/5}+K_2e^{-t}+\frac{5}{3}e^t-\frac{5}{4}$$

Finalmente, aplicar $X = QY$ para obtener la solución pedida:

$$x_1 = 3C_1e^{-4t/5}+\frac{1}{2}t-\frac{3}{8},\qquad x_2 = 12C_1e^{-4t/5}+C_2e^{-t}-\frac{1}{2},\qquad x_3 = -2C_1e^{-4t/5}+\frac{1}{3}e^t+\frac{1}{4}$$

Capítulo 25

Polinomio mínimo de una matriz

LA MATRIZ CARACTERISTICA $\lambda I - A$ de una matriz cuadrada A de orden n definida sobre un cuerpo F es una matriz polinómica o matriz λ regular que tiene factores invariantes y divisores elementales. Aplicando (24.4) es fácil de demostrar el teorema siguiente:

I. Si D es una matriz diagonal, los divisores elementales de $\lambda I - D$ son los elementos de su diagonal principal.

En el Problema 1 se demuestra el teorema:

II. La condición necesaria y suficiente para que dos matrices cuadradas, A y B, de orden n definidas sobre un cuerpo F sean semejantes sobre dicho cuerpo es que sus matrices características tengan los mismos factores invariantes o bien la misma característica y los mismos divisores elementales en $F[\lambda]$.

De estos dos Teoremas (I y II) se deduce:

III. La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada A de orden n definida sobre un cuerpo F sea semejante a una matriz diagonal es que la matriz característica $\lambda I - A$ tenga divisores elementales lineales sobre $F[\lambda]$.

INVARIANTES DE SEMEJANZA. Son los factores invariantes de la matriz característica $\lambda I - A$.
Sean $P(\lambda)$ y $Q(\lambda)$ dos matrices regulares de manera que $P(\lambda)\cdot(\lambda I - A)\cdot Q(\lambda)$ es una forma normal de Smith.

$$\operatorname{diag}(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_n(\lambda))$$

Esto es, $|P(\lambda)\cdot(\lambda I - A)\cdot Q(\lambda)| = |P(\lambda)|\cdot|Q(\lambda)|\phi(\lambda) = f_1(\lambda)\cdot f_2(\lambda)\cdot\ldots f_n(\lambda)$.

Como $\phi(\lambda)$ y $f_i(\lambda)$ son mónicos, $|P(\lambda)|\cdot|Q(\lambda)| = 1$ y, por tanto,

IV. El polinomio característico de una matriz cuadrada A de orden n es el producto de los factores invariantes de su matriz característica $\lambda I - A$ o el de los invariantes de semejanza de A.

POLINOMIO MINIMO. Según el teorema de Cayley-Hamilton (Capítulo 23), toda matriz cuadrada A de orden n satisface su ecuación característica $\phi(\lambda) = 0$ de grado n. Un polinomio mónico $m(\lambda)$ de grado mínimo de forma que $m(A) = 0$ se llama *polinomio mínimo* de A, y $m(\lambda) = 0$ *ecuación mínima* de A. El polinomio $m(\lambda)$ también se denomina *función mínima* de A.

El procedimiento más elemental para hallar el polinomio mínimo de $A \neq 0$ comprende los siguientes pasos:

(i) Si $A = a_0 I$, entonces $m(\lambda) = \lambda - a_0$;
(ii) Si $A \neq aI$ para todo valor a, pero $A^2 = a_1 A + a_0 I$, entonces $m(\lambda) = \lambda^2 - a_1\lambda - a_0$;
(iii) Si $A^2 \neq aA + bI$ para todo valor de a y b, pero $A^3 = a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I$, entonces

$$m(\lambda) = \lambda^3 - a_2\lambda^2 - a_1\lambda - a_0$$

y así sucesivamente.

Ejemplo 1. Hallar el polinomio mínimo de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Evidentemente, $A - a_0 I = 0$ es imposible. Sea

$$A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + a_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando los dos primeros elementos de la primera fila de cada matriz se obtiene $\begin{cases} 9 = a_1 + a_0 \\ 8 = 2a_1 \end{cases}$; de donde $a_1 = 4$ y $a_0 = 5$. Después de comprobar (y no antes) para cada elemento de A^2, llegamos a la conclusión de que $A^2 = 4A + 5I$; por tanto, el polinomio mínimo pedido es $\lambda^2 - 4\lambda - 5$.

En el Problema 2 se demuestra el teorema siguiente:

V. Si A es una matriz cuadrada de orden n definida sobre un cuerpo F y $f(\lambda)$ es un polinomio cualquiera de F, la condición necesaria y suficiente para que $f(A) = 0$ es que el polinomio mínimo $m(\lambda)$ de A sea divisor de $f(\lambda)$.

En el Problema 3 se demuestra el teorema:

VI. El polinomio mínimo $m(\lambda)$ de una matriz cuadrada A de orden n es aquel invariante de semejanza $f_n(\lambda)$ de A que tiene el mayor grado posible.

Como los invariantes de semejanza $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_{n-1}(\lambda)$ dividen todos ellos a $f_n(\lambda)$, resultan los teoremas siguientes:

VII. El polinomio característico $\phi(\lambda)$ de A es igual al producto del polinomio mínimo de A por ciertos factores mónicos de $m(\lambda)$.

VIII. La condición necesaria y suficiente para que la matriz característica de una matriz cuadrada A de orden n tenga divisores elementales distintos es que el polinomio mínimo $m(\lambda)$ de A se descomponga únicamente en factores lineales distintos.

MATRICES NO DEROGATORIAS. Una matriz cuadrada A de orden n cuyos polinomios característico y mínimo son idénticos se llama matriz *no derogatoria*; en caso contrario se denomina *derogatoria*.

IX. La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada A de orden n sea no derogatoria es que A tenga un único invariante de semejanza no trivial.

Se demuestra también el teorema siguiente:

X. Si $m_1(\lambda)$ y $m_2(\lambda)$ son los polinomios mínimos de B_1 y B_2, respectivamente, el polinomio mínimo $m(\lambda)$ de la suma directa $D = \text{diag}(B_1, B_2)$ es el mínimo común múltiplo de $m_1(\lambda)$ y $m_2(\lambda)$.

Este resultado se generaliza sin dificultad a la suma directa de m matrices.

XI. Sean $g_1(\lambda), g_2(\lambda), \ldots, g_m(\lambda)$ polinomios mónicos, irreducibles y distintos, pertenecientes a $F[\lambda]$ y sea A_j una matriz no derogatoria de forma que $|\lambda I - A_j| = \{g_j(\lambda)\}^{a_j}$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Entonces, $B = \text{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ tiene a $\phi(\lambda) = \{g_1(\lambda)\}^{a_1} \cdot \{g_2(\lambda)\}^{a_2} \ldots \{g_m(\lambda)\}^{a_m}$ como polinomio característico y mínimo.

MATRIZ ASOCIADA. Sea A una matriz no derogatoria cuyo invariante de semejanza no trivial es

(25.1) $$g(\lambda) = f_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

Se define la *matriz asociada* («companion») a $g(\lambda)$ por

(25.2) $$C(g) = [-a], \quad \text{si} \quad g(\lambda) = \lambda + a$$

y para $n > 1$

$$(25.3) \qquad C(g) \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-3} & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

En el Problema 4 se demuestra el teorema siguiente:

XII. La matriz asociada $C(g)$ a un polinomio $g(\lambda)$ tiene a $g(\lambda)$ como polinomio característico y mínimo simultáneamente.

(Algunos autores prefieren definir $C(g)$ por la traspuesta de la matriz dada en (25.3). Aquí emplearemos ambas formas.)

Véase Problema 5.

Es fácil de demostrar que:

XIII. Si A es una matriz no derogatoria cuyo invariante de semejanza no trivial es $f_n(\lambda) = (\lambda - a)^n$,

$$(25.4) \qquad J = [a], \;\text{ si } n = 1, \qquad \text{y} \qquad J = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix}, \;\text{ si } n > 1$$

tiene a $f(\lambda)$ como polinomio característico y mínimo.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que dos matrices cuadradas A y B de orden n definidas sobre un cuerpo F sean semejantes sobre dicho cuerpo es que sus matrices características tengan los mismos factores invariantes o los mismos divisores elementales en $F[\lambda]$.

Supongamos que A y B son semejantes. Teniendo en cuenta (i), Problema 1, Capítulo 20, se deduce que las matrices características $\lambda I - A$ y $\lambda I - B$ son equivalentes. Según los Teoremas VIII y IX del Capítulo 24 tendrán los mismos factores invariantes y los mismos divisores elementales.

Recíprocamente, supongamos que las matrices $\lambda I - A$ y $\lambda I - B$ tienen los mismos factores invariantes o divisores elementales. Según el Teorema VIII del Capítulo 24 existen las matrices regulares $P(\lambda)$ y $Q(\lambda)$ de forma que

$$P(\lambda)\cdot(\lambda I - A)\cdot Q(\lambda) \;=\; \lambda I - B$$

o bien

$$\text{(i)} \qquad P(\lambda)\cdot(\lambda I - A) \;=\; (\lambda I - B)\cdot Q^{-1}(\lambda)$$

Sea

$$\text{(ii)} \qquad P(\lambda) \;=\; (\lambda I - B)\cdot S_1(\lambda) + R_1$$

$$\text{(iii)} \qquad Q(\lambda) \;=\; S_2(\lambda)\cdot(\lambda I - B) + R_2$$

$$\text{(iv)} \qquad Q^{-1}(\lambda) \;=\; S_3(\lambda)\cdot(\lambda I - A) + R_3$$

en donde R_1, R_2 y R_3 son independientes de λ. Sustituyendo en (i) resulta,

$$(\lambda I - B)\cdot S_1(\lambda)\cdot(\lambda I - A) + R_1(\lambda I - A) \;=\; (\lambda I - B)\cdot S_3(\lambda)\cdot(\lambda I - A) + (\lambda I - B)R_3$$

o bien

$$\text{(v)} \qquad (\lambda I - B)\{S_1(\lambda) - S_3(\lambda)\}(\lambda I - A) \;=\; (\lambda I - B)R_3 - R_1(\lambda I - A)$$

Por tanto, $S_1(\lambda) - S_3(\lambda) = 0$ y

(vi) $$(\lambda I - B)R_3 = R_1(\lambda I - A)$$

ya que, en caso contrario, el primer miembro de (v) sería al menos de segundo grado, mientras que el segundo sería a lo sumo de primer grado.

Aplicando (iii), (iv) y (v)

$$\begin{aligned}
I &= Q(\lambda)\cdot Q^{-1}(\lambda)\\
&= Q(\lambda)\{S_3(\lambda)\cdot(\lambda I - A) + R_3\}\\
&= Q(\lambda)\cdot S_3(\lambda)\cdot(\lambda I - A) + \{S_2(\lambda)\cdot(\lambda I - B) + R_2\}R_3\\
&= Q(\lambda)\cdot S_3(\lambda)\cdot(\lambda I - A) + S_2(\lambda)\cdot(\lambda I - B)R_3 + R_2R_3\\
&= Q(\lambda)\cdot S_3(\lambda)\cdot(\lambda I - A) + S_2(\lambda)\cdot R_1\cdot(\lambda I - A) + R_2R_3
\end{aligned}$$

es decir,

(vii) $$I - R_2R_3 = \{Q(\lambda)\cdot S_3(\lambda) + S_2(\lambda)\cdot R_1\}(\lambda I - A)$$

Ahora bien, $Q(\lambda)\cdot S_3(\lambda) + S_2(\lambda)R_1 = 0$; por tanto, $I = R_2R_3$ ya que, en caso contrario, el primer miembro de (vii) sería de grado cero en λ mientras que el grado del segundo sería por lo menos uno. En consecuencia, $R_3 = R_2^{-1}$ y, según (vi),

$$\lambda I - B = R_1(\lambda I - A)R_2 = \lambda R_1R_2 - R_1AR_2$$

Como A, B, R_1 y R_2 son independientes de λ, $R_1 = R_2^{-1}$; por tanto, $\lambda I - B = \lambda I - R_2^{-1}AR_2$ y, en consecuencia, las matrices A y B son semejantes, como se quería demostrar.

2. Demostrar que si A es una matriz cuadrada cualquiera definida sobre un cuerpo F y $f(\lambda)$ es un polinomio de $F[\lambda]$, la condición necesaria y suficiente para que $f(A) = 0$ es que el polinomio mínimo $m(\lambda)$ de A sea divisor de $f(\lambda)$.

Según el algoritmo de la división, Capítulo 22,

$$f(\lambda) = q(\lambda)\cdot m(\lambda) + r(\lambda)$$

con lo que

$$f(A) = q(A)\cdot m(A) + r(A) = r(A)$$

Supongamos que $f(A) = 0$; entonces, $r(A) = 0$. Ahora bien, si $r(\lambda) \neq 0$ su grado es menor que el de $m(\lambda)$, en contra de la hipótesis de que $m(\lambda)$ es el polinomio mínimo de A. Por consiguiente, $r(\lambda) = 0$, con lo que $m(\lambda)$ es divisor de $f(\lambda)$.

Recíprocamente, supongamos que $f(\lambda) = q(\lambda)\cdot m(\lambda)$; entonces, $f(A) = q(A)\cdot m(A) = 0$.

3. Demostrar que el polinomio mínimo $m(\lambda)$ de una matriz cuadrada A de orden n es aquel invariante de semejanza $f_n(\lambda)$ de A que tiene el mayor grado posible.

Llamando $g_{n-1}(\lambda)$ al máximo común divisor de los menores cuadrados de orden $(n-1)$ de la matriz característica $\lambda I - A$ se tiene,

$$|\lambda I - A| = \phi(\lambda) = g_{n-1}(\lambda)\cdot f_n(\lambda)$$

con lo que

$$\text{adj}(\lambda I - A) = g_{n-1}(\lambda)\cdot B(\lambda)$$

siendo el máximo común divisor de los elementos de $B(\lambda)$ la unidad.

Ahora bien, $(\lambda I - A)\cdot \text{adj}(\lambda I - A) = \phi(\lambda)\cdot I$ de modo que

$$(\lambda I - A)\cdot g_{n-1}(\lambda)\cdot B(\lambda) = g_{n-1}(\lambda)\cdot f_n(\lambda)\cdot I$$

o

(i) $$(\lambda I - A)\cdot B(\lambda) = f_n(\lambda)\cdot I$$

Por tanto, $\lambda I - A$ es divisor de $f_n(\lambda)\cdot I$ y, según el Teorema V, Capítulo 23, $f_n(A) = 0$.

Según el Teorema V, $m(\lambda)$ divide a $f_n(\lambda)$. Supongamos

(ii) $$f_n(\lambda) = q(\lambda)\cdot m(\lambda)$$

Como $m(A) = 0$, $\lambda I - A$ es un divisor de $m(\lambda)\cdot I$, es decir,

$$m(\lambda)\cdot I = (\lambda I - A)\cdot C(\lambda)$$

Por tanto, aplicando (i) y (ii),

$$(\lambda I - A)\cdot B(\lambda) = f_n(\lambda)\cdot I = q(\lambda)\cdot m(\lambda)\cdot I = q(\lambda)\cdot(\lambda I - A)\cdot C(\lambda)$$

de donde

$$B(\lambda) = q(\lambda)\cdot C(\lambda)$$

Ahora bien, $q(\lambda)$ divide a todos los elementos de $B(\lambda)$; luego $q(\lambda) = 1$ y, de (ii),

$$f_n(\lambda) = m(\lambda)$$

como se quería demostrar.

4. Demostrar que la matriz asociada $C(g)$ a un polinomio $g(\lambda)$ tiene a este $g(\lambda)$ como polinomio mínimo y característico.

La matriz característica de (25.3) es

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & \lambda+a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Sumando a la primera columna la segunda multiplicada por λ, la tercera por $\lambda^2, \ldots$, la última por λ^{n-1}, se obtiene:

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ g(\lambda) & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & \lambda+a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Puesto que $|G(\lambda)| = g(\lambda)$, el polinomio característico de $C(g)$ es $g(\lambda)$. Además, como el menor de los elementos $g(\lambda)$ de $G(\lambda)$ es ± 1, el máximo común divisor de todos los menores cuadrados de orden $(n-1)$ de $G(\lambda)$ es la unidad. En consecuencia, $C(g)$ es una matriz no derogatoria y su polinomio mínimo es $g(\lambda)$.

5. La matriz asociada de $g(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^3 - \lambda^2 + 6\lambda - 5$ es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -6 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{o bien} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

6. Escribir la matriz asociada de los polinomios siguientes:

(*a*) $\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 1$ (*d*) $\lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda$

(*b*) $(\lambda^2 - 4)(\lambda + 2)$ (*e*) $\lambda^2(\lambda^2 + 1)$

(*c*) $(\lambda - 1)^3$ (*f*) $(\lambda + 2)(\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8)$

Sol. (*a*) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (*b*) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ (*c*) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

(*d*) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (*e*) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (*f*) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 16 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. Demostrar que toda matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ de orden 2 en la que $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} \neq 0$ es una matriz no derogatoria.

8. Reducir $G(\lambda)$ del Problema 4 a diag $(1, 1, \ldots, 1, g(\lambda))$.

9. Dadas las matrices A siguientes hallar (i) los polinomios mínimo y característico, (ii) los factores propios no triviales y los divisores elementales sobre el cuerpo de los números racionales.

(*a*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (*b*) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ (*c*) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (*d*) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (*e*) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(*f*) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ (*g*) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -3 \\ -1 & -6 & -3 & -6 \\ -3 & -3 & -4 & -3 \\ 2 & 6 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ (*h*) $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -6 & 3 & 8 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 4 & -1 & -6 \\ 4 & -2 & 4 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Sol. (*a*) $\phi(\lambda) = m(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$; f. p. $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$; d. e. $(\lambda-1)$, $(\lambda-2)$, $(\lambda-3)$

(*b*) $\phi(\lambda) = m(\lambda) = \lambda^3$; f. p. = d. e. = λ^3

(*c*) $\phi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$; f. p. $\lambda-1$, $(\lambda-1)(\lambda-2)$
$m(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$; d. e. $\lambda-1$, $\lambda-1$, $\lambda-2$

(*d*) $\phi(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-5)$; f. p. $\lambda+1$, $(\lambda+1)(\lambda-5)$
$m(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-5)$; d. e. $\lambda+1$, $\lambda+1$, $\lambda-5$

(*e*) $\phi(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2$; f. p. λ, $\lambda^2 - 4\lambda$
$m(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda$; d. e. λ, λ, $\lambda-4$

(*f*) $\phi(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2(\lambda-1)$; f. p. $\lambda+1$, $\lambda^3-\lambda$
$m(\lambda) = \lambda(\lambda^2-1)$; d. e. λ, $\lambda+1$, $\lambda+1$, $\lambda-1$

(*g*) $\phi(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)^2$; f. p. λ, $\lambda(\lambda+1)^2$
$m(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2$; d. e. λ, λ, $(\lambda+1)^2$

(*h*) $\phi(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-2)^2$; f. p. $\lambda-2$, $\lambda^2-\lambda-2$, $\lambda^2-\lambda-2$
$m(\lambda) = \lambda^2-\lambda-2$; d. e. $\lambda-2$, $\lambda-2$, $\lambda-2$, $\lambda+1$, $\lambda+1$

10. Demostrar los Teoremas VII y VIII.

11. Demostrar el Teorema X.

Ind. $m(D) = \text{diag}\,(m(B_1), m(B_2)) = 0$ requiere que $m(B_1) = m(B_2) = 0$; luego, $m_1(\lambda)$ y $m_2(\lambda)$ dividen a $m(\lambda)$.

12. Demostrar el Teorema XI.

13. Si A es una matriz cuadrada de orden n y k es el menor entero positivo tal que $A^k = 0$, la matriz A se llama *nilpotente* de índice k. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que la matriz A sea nilpotente de índice k es que sus valores propios, o raíces características, sean todos nulos.

14. Demostrar: (*a*) Los valores propios o raíces características de una matriz cuadrada A de orden n que sea idempotente son ceros o unos.
(*b*) La característica de A es igual al número de valores propios iguales a la unidad.

15. Dadas las matrices cuadradas de orden n; A, B, C, D, definidas sobre un cuerpo F siendo C y D regulares, demostrar que existen las matrices regulares P y Q de forma que $PCQ = A$, $PDQ = B$ si, y solo si, $R(\lambda) = \lambda C - A$ y $S(\lambda) = \lambda D - B$ tienen los mismos factores invariantes o los mismos divisores elementales.

Ind. Seguir la demostración del Problema 1 sustituyendo la semejanza por la equivalencia.

16. Demostrar que si el polinomio mínimo $m(\lambda)$ de una matriz regular A es de grado s, la inversa A^{-1} se puede expresar por un polinomio de grado $s - 1$ en A.

17. Empleando el polinomio mínimo hallar la inversa de la matriz A del Problema 9(*h*).

18. Demostrar que todo divisor lineal $\lambda - \lambda_i$ de $\phi(\lambda)$ es divisor de $m(\lambda)$.
Ind. Se demuestra a partir del Teorema VII o se hace la hipótesis contraria y se escribe $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)q(\lambda) + r$, $r \neq 0$. Entonces, $(A - \lambda_i I)q(A) + rI = 0$, con lo que $A - \lambda_i I$ posee inversa.

19. Siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ demostrar que el polinomio mínimo no es igual al producto de los factores distintos de $\phi(\lambda)$.

20. Demostrar que si $g(\lambda)$ es un polinomio cualquiera en λ, la condición necesaria y suficiente para que $g(A)$ sea una matriz singular es que el máximo común divisor de $g(\lambda)$ y $m(\lambda)$, es decir, el polinomio mínimo de A, sea distinto de la unidad, $d(\lambda) \neq 1$.
Ind. (i) Suponer $d(\lambda) \neq 1$ y aplicar el Teorema V, Capítulo 22.
(ii) Suponer $d(\lambda) = 1$ y aplicar el Teorema IV, Capítulo 22.

21. Teniendo en cuenta el Problema 20 demostrar que si $g(A)$ es una matriz regular, $[g(A)]^{-1}$ se puede expresar en forma de polinomio en A de grado menor que el de $m(\lambda)$.

22. Demostrar que si el polinomio mínimo $m(\lambda)$ de A, definido sobre un cuerpo F, es irreducible en $F[\lambda]$ y es de grado s en λ, el conjunto de todos los polinomios en A cuyos coeficientes pertenecen a F y son de grado menor que s forman un cuerpo.

23. Siendo A y B dos matrices cuadradas y $m(\lambda)$ y $n(\lambda)$ los polinomios mínimos de AB y BA, respectivamente, demostrar:
(*a*) $m(\lambda) = n(\lambda)$ cuando A y B no son ambas singulares.
(*b*) $m(\lambda)$ y $n(\lambda)$ difieren al menos en un factor λ cuando A y B son ambas singulares.

Ind. $B \cdot m(AB) \cdot A = (BA) \cdot m(BA) = 0$ y $A \cdot n(BA) \cdot B = (AB) \cdot n(AB) = 0$.

24. Siendo A una matriz de orden $m \times n$, B de orden $n \times m$, con $m > n$, y $\phi(\lambda)$ y $\psi(\lambda)$ los polinomios característicos de AB y BA, respectivamente, demostrar que $\phi(\lambda) = \lambda^{m-n}\psi(\lambda)$.

25. Sea X_i un vector propio asociado a un valor propio simple de A; demostrar que si A y B son dos matrices permutables, X_i es un vector propio de B.

26. Siendo A y B dos matrices permutables enunciar un teorema relativo a los vectores propios de B cuando todos los valores propios de A sean simples.

Capítulo 26

Formas canónicas en la semejanza

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. En el Capítulo 25 hemos demostrado que las matrices características de dos matrices semejantes cuadradas y de orden n, A y $R^{-1}AR$ definidas sobre un cuerpo F, tienen los mismos factores invariantes y los mismos divisores elementales. En este capítulo vamos a tratar del conjunto de todas las matrices $R^{-1}AR$ que (i) tengan la estructura más simple y (ii) pongan de manifiesto sus factores invariantes o bien sus divisores elementales. Estas matrices, que son cuatro, se llaman *formas canónicas* de A. Corresponden a la matriz canónica $N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ definida anteriormente, con respecto a la equivalencia, para todas las matrices de orden $m \times n$ y característica r.

FORMA CANONICA RACIONAL. Sea A una matriz cuadrada de orden n definida sobre un cuerpo F y supongamos, en primer lugar, que su matriz característica solo tiene un factor invariante no trivial $f_n(\lambda)$. La matriz asociada $C(f_n)$ a $f_n(\lambda)$, como se vio en el Capítulo 25, es semejante a A. Por definición, ésta es la *forma canónica racional* S de todas las matrices semejantes a A.

Supongamos ahora que la forma normal de Smith de la matriz $\lambda I - A$ es

(26.1) $$\operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1, f_j(\lambda), f_{j+1}(\lambda), \ldots, f_n(\lambda))$$

con el factor invariante no trivial $f_i(\lambda)$ de grado s_i, $(i = j, j+1, \ldots, n)$. Por definición, la *forma canónica racional* de todas las matrices semejantes a A es

(26.2) $$S = \operatorname{diag}(C(f_j), C(f_{j+1}), \ldots, C(f_n))$$

Para demostrar que A y S tienen los mismos invariantes de semejanza obsérvese que $C(f_i)$ es semejante a $D_i = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1, f_i(\lambda))$ y que, por tanto, S es semejante a la matriz $\operatorname{diag}(D_j, D_{j+1}, \ldots, D_n)$. Mediante una sucesión de permutaciones de dos filas y de las mismas dos columnas se deduce que S es semejante a la matriz

$$\operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1, f_j(\lambda), f_{j+1}(\lambda), \ldots, f_n(\lambda))$$

Hemos demostrado, pues, el teorema siguiente:

I. Toda matriz cuadrada A es semejante a la suma directa (26.2) de las matrices asociadas a los factores invariantes no triviales de $\lambda I - A$.

Ejemplo 1. Sean los invariantes de semejanza no triviales de la matriz A, definida sobre el cuerpo de los números racionales,

$$f_8(\lambda) = \lambda + 1, \quad f_9(\lambda) = \lambda^3 + 1, \quad f_{10}(\lambda) = \lambda^6 + 2\lambda^3 + 1$$

Entonces,

$$C(f_8) = [-1], \quad C(f_9) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C(f_{10}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$S = \operatorname{diag}\left(C(f_8), C(f_9), C(f_{10})\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que es la forma expresada en el Teorema I.

Nota. El orden en el que se deben disponer las matrices según la diagonal es indiferente. Asimismo,

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es otra forma obtenida utilizando la traspuesta de cada una de las matrices asociadas.

SEGUNDA FORMA CANONICA. Supongamos que los factores invariantes no triviales de la matriz característica de A sean los polinomios $f_i(\lambda)$ que aparecen en (26.1) y supongamos que los divisores elementales sean potencias de t polinomios irreducibles distintos de $F[\lambda]$: $p_1(\lambda), p_2(\lambda) \ldots, p_t(\lambda)$. Sea

$$f_i(\lambda) = \{p_1(\lambda)\}^{q_{1i}}\{p_2(\lambda)\}^{q_{2i}} \ldots \{p_t(\lambda)\}^{q_{ti}}; \quad (i = j, j+1, \ldots, n) \tag{26.3}$$

en donde alguno de los exponentes q puede ser nulo. La matriz asociada $C(p_k^{q_{ki}})$ a un factor cualquiera tiene como único invariante de semejanza no trivial a $\{p_k(\lambda)\}^{q_{ki}}$; por tanto, $C(f_i)$ es semejante a la matriz

$$\operatorname{diag}\left(C(p_1^{q_{1i}}), C(p_2^{q_{2i}}), \ldots, C(p_t^{q_{ti}})\right)$$

En consecuencia,

II. Toda matriz cuadrada A definida sobre un cuerpo F es semejante a la suma directa de las matrices asociadas a los divisores elementales, sobre dicho cuerpo, de $\lambda I - A$.

Ejemplo 2. Los divisores elementales de la matriz A del Ejemplo 1, sobre el cuerpo de los números racionales, son $\lambda + 1$, $\lambda + 1$, $(\lambda + 1)^2$, $\lambda^2 - \lambda + 1$, $(\lambda^2 - \lambda + 1)^2$. Sus matrices asociadas respectivas son y la forma canónica del Teorema II es

$$[-1], \quad [-1], \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

y la forma canónica del Teorema II es

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

FORMA CANONICA DE JACOBSON. Sea A la matriz de la sección anterior cuyos divisores elementales de su matriz característica son potencias de polinomios irreducibles de $F[\lambda]$. Consideremos un divisor elemental $\{p(\lambda)\}^q$. Si $q = 1$, tomamos $C(p)$, la matriz asociada; si $q > 1$, formamos la matriz

$$C_q(p) = \begin{bmatrix} C(p) & M & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C(p) & M & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C(p) & M \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C(p) \end{bmatrix} \tag{26.4}$$

siendo M una matriz del mismo orden que $C(p)$ y que tiene el elemento 1 en el extremo inferior izquierdo y todos los demás son nulos. La matriz $C_q(p)$ de (26.4), teniendo en cuenta que $C_1(p) = C(p)$, se llama *matriz hiperasociada* («hypercompanion») a $\{p(\lambda)\}^q$. Obsérvese que en (26.4) hay una línea continua de elementos unidad justamente encima de la diagonal principal.

Cuando se utilice la otra matriz asociada $C'(p)$, la matriz hiperasociada a $\{p(\lambda)\}^q$ es

$$C_q(p) = \begin{bmatrix} C'(p) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ N & C'(p) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & N & C'(p) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C'(p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N & C'(p) \end{bmatrix}$$

en donde N es una matriz del mismo orden que $C'(p)$ y que tiene el elemento 1 en el extremo superior derecho y todos los demás son nulos. En este caso existe una fila continua de elementos unidad justamente debajo de la diagonal principal.

Ejemplo 3. Sea $\{p(\lambda)\}^q = (\lambda^2 + 2\lambda - 1)^4$ Entonces, $C(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, y

$$C_q(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

En el Problema 1 se ha demostrado que $C_q(p)$ tiene a $\{p(\lambda)\}^q$ como único invariante de semejanza no trivial. Por consiguiente, $C_q(p)$ es semejante a $C(p^q)$ y se puede sustituir por ello en la forma canónica del Teorema II.

III. Toda matriz cuadrada A definida sobre un cuerpo F es semejante a la suma directa de las matrices hiperasociada a los divisores elementales, sobre dicho cuerpo, de $\lambda I - A$.

Ejemplo 4. En la matriz A del Ejemplo 2 las matrices hiperasociadas a los divisores elementales $\lambda + 1, \lambda + 1$ y $\lambda^2 - \lambda + 1$ son sus matrices asociadas; la matriz hiperasociada a $(\lambda + 1)^2$ es $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ y la correspondiente a $(\lambda^2 - \lambda + 1)^2$ es $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Por tanto, la forma canónica del Teorema III es

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Algunas veces se emplea el término «racional» al hablar de la forma canónica del Teorema I. Esto se debe a que para obtener la forma canónica solo hay que efectuar operaciones racionales sobre el cuerpo de los elementos de A. Pero esto es cierto también para las formas canónicas (definidas más adelante) de los Teoremas II y III. Por ello, la forma canónica del Teorema III también se denomina forma canónica racional.

FORMA CANONICA DE JORDAN. Supongamos que los divisores elementales de la matriz característica de A sean potencias de polinomios lineales. La forma canónica del Teorema III es, entonces, la suma directa de las matrices hiperasociadas del tipo

$$C_q(p) = \begin{bmatrix} a_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_i \end{bmatrix} \tag{26.5}$$

correspondiente al divisor elemental $\{p(\lambda)\}^q = (\lambda - a_i)^q$. (Véase Problema 2.)

Este caso particular de la forma canónica del Teorema III recibe el nombre de forma canónica de Jordan o clásica. [Obsérvese que $C_q(p)$ de (26.5) es del tipo J de (25.4).]

IV. Sea $\mathfrak{F}$ el cuerpo sobre el cual el polinomio característico de una matriz A se descompone en factores lineales. Entonces, la matriz A es semejante, sobre dicho cuerpo, a la suma directa de las matrices hiperasociadas de la forma (26.5), correspondiendo cada una de las matrices a un divisor elemental $(\lambda - a_i)^q$.

Ejemplo 5. Supongamos que los divisores elementales, sobre el cuerpo de los números complejos, de $\lambda I - A$ son $\lambda - i, \lambda + i, (\lambda - i)^2, (\lambda + i)^2$.

La forma canónica de Jordan correspondiente a A es

$$\begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

Del Teorema IV se deduce este otro teorema:

V. La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada A de orden n sea semejante a una matriz diagonal es que los divisores elementales de $\lambda I - A$ sean polinomios lineales, es decir, que el polinomio mínimo de A se descomponga en un producto de polinomios lineales distintos.

Véanse Problemas 2-4

UNA REDUCCION A LA FORMA CANONICA RACIONAL. Vamos a demostrar ahora que la reducción de una matriz cuadrada de orden n a su forma canónica se puede llevar a cabo, al menos teóricamente, sin necesidad de conocer previamente los factores invariantes de $\lambda I - A$. Un tratamiento algo diferente de éste se puede ver en Dickson, L. E., *Modern Algebraic Theories*, Benj. H. Sanborn, 1926. También se puede consultar *American Mathematical Monthly*, vol. 48 (1940), Browne, E. T.

Necesitamos establecer, ante todo, las definiciones siguientes:

Sea A una matriz cuadrada de orden n, X un vector de orden n sobre un cuerpo F y $g(\lambda)$ el polinomio normalizado de $F[\lambda]$ de grado mínimo de forma que $g(A)\cdot X = 0$; en estas condiciones diremos que el vector X, respecto de A, *pertenece* a $g(\lambda)$.

Si respecto de A el vector X pertenece a $g(\lambda)$ de grado p, los vectores linealmente independientes $X, AX, A^2X, \ldots, A^{p-1}X$ constituyen una *sucesión* o cadena de la que X es su primer término.

Ejemplo 6. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. Los vectores $X = [1, 0, 0]'$ y $AX = [2, 1, 1]'$ son linealmente independientes, mientras que $A^2X = X$. Como $(A^2 - I)X = 0$, X pertenece al polinomio $\lambda^2 - 1$. Para $Y = [1, 0, -1]'$, $AY = [-1, 0, 1]' = -Y$; entonces, $(A + I)Y = 0$ y, por tanto, Y pertenece al polinomio $\lambda + 1$.

Si $m(\lambda)$ es el polinomio mínimo de una matriz cuadrada A de orden n, entonces $m(A)\cdot X = 0$ para todo vector X de orden n. Por consiguiente, la sucesión en este caso no puede tener más términos que el que indica el grado de $m(\lambda)$. El polinomio mínimo de la matriz del Ejemplo 6 es $\lambda^2 - 1$.

Sea S la forma canónica racional de la matriz cuadrada A de orden n definida sobre un cuerpo F. Entonces, existe una matriz regular R, sobre dicho cuerpo, de forma que

$$R^{-1}AR = S = \operatorname{diag}(C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n) \tag{26.6}$$

en donde, por convenio, se ha sustituido $C(f_i)$ de (26.2) por C_i. Supondremos que C_i, o matriz asociada al factor invariante

$$f_i(\lambda) = \lambda^{s_i} + c_{i,s_i}\lambda^{s_i-1} + \ldots + c_{i2}\lambda + c_{i1}$$

tiene la forma

$$C_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -c_{i1} \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -c_{i2} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -c_{i3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -c_{i,s_i-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -c_{is_i} \end{bmatrix}$$

De (26.6) se deduce

$$AR = RS = R\,\mathrm{diag}(C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n) \tag{26.7}$$

Descompongamos R en los bloques columna $R_j, R_{j+1}, \ldots, R_n$, de manera que R_i y C_i, $(i = j, j+1, \ldots, n)$, tengan el mismo número de columnas. De (26.7),

$$\begin{aligned} AR &= A[R_j, R_{j+1}, \ldots, R_n] = [R_j, R_{j+1}, \ldots, R_n]\,\mathrm{diag}(C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n) \\ &= [R_jC_j, R_{j+1}C_{j+1}, \ldots, R_nC_n] \end{aligned}$$

y

$$AR_i = R_iC_i, \qquad (i = j, j+1, \ldots, n)$$

Representemos por $R_{i1}, R_{i2}, \ldots, R_{is_i}$ los s_i vectores columna de R_i, y formemos el producto

$$R_iC_i = [R_{i1}, R_{i2}, \ldots, R_{is_i}]C_i = [R_{i2}, R_{i3}, \ldots, R_{is_i}, -\sum_{k=1}^{s_i} R_{ik}c_{ik}]$$

Como

$$AR_i = A[R_{i1}, R_{i2}, \ldots, R_{is_i}] = [AR_{i1}, AR_{i2}, \ldots, AR_{is_i}] = R_iC_i$$

se obtiene

$$R_{i2} = AR_{i1}, \qquad R_{i3} = AR_{i2} = A^2R_{i1}, \qquad \ldots, \qquad R_{is_i} = A^{s_i-1}R_{i1} \tag{26.8}$$

y

$$-\sum_{k=1}^{s_i} c_{ik}R_{ik} = AR_{is_i} \tag{26.9}$$

Sustituyendo en (26.9) las expresiones (26.8) resulta

$$-\sum_{k=1}^{s_i} c_{ik}A^{k-1}R_{i1} = A^{s_i}R_{i1}$$

o bien

$$(A^{s_i} + c_{is_i}A^{s_i-1} + \ldots + c_{i2}A + c_{i1}I)R_{i1} = 0 \tag{26.10}$$

Teniendo en cuenta la definición de C_i, (26.10) se puede escribir en la forma

$$f_i(A)\cdot R_{i1} = 0 \tag{26.11}$$

Llamando X_i a R_{i1}, (26.11) se reduce a $f_i(A)\cdot X_i(A) = 0$; entonces, como $X_i, AX_i, A^2X_i, \ldots, A^{s_i-1}X_i$ son linealmente independientes, los vectores X_i pertenecen al factor invariante $f_i(\lambda)$. Por consiguiente, los vectores columna de R_i son los vectores de la sucesión que tienen a X_i perteneciente a $f_i(\lambda)$, como primer término.

Resumiendo: Las n columnas linealmente independientes de R, que satisfacen a (26.2), son las $n - j + 1$ sucesiones

$$X_i, AX_i, \ldots, A^{s_i-1}X_i \qquad (i = j, j+1, \ldots, n)$$

cuyos primeros términos pertenecen, respectivamente, a los factores invariantes $f_j(\lambda), f_{j+1}(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)$ y cuyos números de términos satisfacen la condición $0 < s_j \leq s_{j+1} \leq \ldots \leq s_n$.

VI. En una matriz cuadrada A de orden n, definida sobre un cuerpo F, se tiene:

(i) X_n es el primer término de una sucesión $\mathcal{C}_n$ del mayor número de términos posible para todos los vectores de orden n sobre F;

(ii) X_{n-1} es el primer término de una sucesión $\mathcal{C}_{n-1}$ del mayor número de términos posible (uno cualquiera de ellos es linealmente independiente de los que le preceden y de los de $\mathcal{C}_n$) para todos los vectores de orden n sobre F que son linealmente independientes de los vectores de $\mathcal{C}_n$;

(iii) X_{n-2} es el primer término de una sucesión $\mathcal{C}_{n-2}$ del mayor número de términos posible (uno cualquiera de ellos es linealmente independiente de los que le preceden y de los de $\mathcal{C}_n$ y $\mathcal{C}_{n-1}$) para todos los vectores de orden n sobre F que son linealmente independientes de los vectores de $\mathcal{C}_n$ y $\mathcal{C}_{n-1}$;

y así sucesivamente. Entonces, para

$$R = [X_j, AX_j, \ldots, A^{s_j-1}X_j;\ X_{j+1}, AX_{j+1}, \ldots, A^{s_{j+1}-1}X_{j+1};\ \ldots;\ X_n, AX_n, \ldots, A^{s_n-1}X_n]$$

$R^{-1}AR$ es la forma canónica racional de A.

Ejemplo 7. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Tomemos $X = [1, 0, 0]'$; entonces, $X, AX = [1, 1, 1]'$, $A^2X = [3, 5, 6]'$, son linealmente independientes, mientras que $A^3X = [14, 25, 30]' = 5A^2X - X$. Por tanto, $(A^3 - 5A^2 + I)X = 0$ y X pertenecen a $f_3(\lambda) = m(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 1 = \phi(\lambda)$. Tomando

$$R = [X, AX, A^2X] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

se obtiene

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad AR = [AX, A^2X, A^3X] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 14 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 30 \end{bmatrix}$$

y

$$R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = S$$

En este caso A es una matriz no derogatoria cuyo polinomio mínimo $m(\lambda)$ es irreducible sobre el cuerpo de los números racionales. Todo vector de tercer orden sobre este cuerpo pertenece a $m(\lambda)$ (véase Problema 11), y encabeza una sucesión de tres términos. La matriz R, cuyos vectores columna son los de una sucesión cualquiera, es tal que $R^{-1}AR = S$.

Ejemplo 8. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Tomemos $X = [1, -1, 0]'$; entonces, $AX = X$ y X pertenece a $\lambda - 1$. Ahora bien, $\lambda - 1$ no puede ser el polinomio mínimo $m(\lambda)$ de A. Es, sin embargo, un divisor de $m(\lambda)$ (véase Problema 11), y *podría* ser un invariante de semejanza de A.

Tomando ahora $Y = [1, 0, 0]'$, los vectores Y, $AY = [2, 1, 2]'$, $A^2Y = [11, 8, 8]'$ son linealmente independientes, mientras que $A^3Y = [54, 43, 46]' = 5A^2Y + 3AY - 7Y$. Por tanto, Y pertenece a $m(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 - 3\lambda + 7 = \phi(\lambda)$. El polinomio $\lambda - 1$ no es un invariante de semejanza; en efecto, a menos que el primer vector elegido perteneciese a un polinomio que fuese la función mínima, el razonamiento sería falso. El alumno puede comprobar que

$$R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

cuando $R = [Y, AY, A^2Y] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$.

Véanse Problemas 5-6.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demostrar que $\{p(\lambda)\}^q$ es el único invariante de semejanza no trivial de $C_q(p)$.

Sea $C_q(p)$ de orden s. El menor del elemento de la última fila y primera columna de $\lambda I - C_q(p)$ es ± 1 de forma que el máximo común divisor de todos los menores cuadrados de orden $(s-1)$ de $\lambda I - C_q(p)$ es la unidad. Los factores invariantes de $\lambda I - C_q(p)$ son $1, 1, \ldots, 1, f_s(\lambda)$. Ahora bien, $f_s(\lambda) = \{p(\lambda)\}^q$ ya que

$$\phi(\lambda) = |\lambda I - C_q(p)| = |\lambda I - C(p)|^q = \{p(\lambda)\}^q$$

2. Si el factor invariante no trivial y el divisor elemental es $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1$, la forma canónica (*a*) es la correspondiente a los Teoremas I y II y (*b*) la del Teorema III.

$$(a)\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -6 & -4 \end{bmatrix} \qquad (b)\quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Si $\lambda+2,\ \lambda^2-4,\ \lambda^3+3\lambda^2-4\lambda-12$ son los factores invariantes y $\lambda+2,\ \lambda+2,\ \lambda+2,\ \lambda-2,\ \lambda-2,\ \lambda+3$ los divisores elementales, la forma canónica (*a*) es la correspondiente al Teorema I y (*b*) la de los Teoremas II y III.

$$(a)\quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad (b)\quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

4. Sobre el cuerpo de los números racionales, si $\lambda+2,\ \lambda+2,\ (\lambda^2+2\lambda-1)^2,\ (\lambda^2+2\lambda-1)^3$ son los divisores elementales y $(\lambda+2)(\lambda^2+2\lambda-1)^2,\ (\lambda+2)(\lambda^2+2\lambda-1)^3$ los factores invariantes, la forma canónica (*a*) corresponde a la del Teorema III, (*b*) a la del Teorema I y (*c*) a la del Teorema II.

$$(a)\quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(b)\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 & -10 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -11 & 12 & 17 & -14 & -21 & -8 \end{bmatrix}$$

$$
(c)\quad \begin{bmatrix}
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 4 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 9 & 4 & -9 & -6
\end{bmatrix}
$$

5. Sea $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 & -1 & -6 & -2\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & -1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Tomemos $X = [1, 0, 0, 0, 0, 0]'$.

Entonces, X, $AX = [-2, 1, 1, 1, 1, 1]'$, $A^2X = [1, 0, -1, 0, 0, -1]'$, $A^3X = [-3, 1, 1, 1, 1, 2]'$ son linealmente independientes, mientras que $A^4X = [1, 0, -2, 0, 0, -2]' = 2A^2X - X$; X pertenece a $\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1$. Supondremos que $m(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1$ y sustituimos X_6 por X.

El vector $Y = [0, 0, 0, 1, 0, 0]'$ es linealmente independiente de los términos de la sucesión que empieza por X_6 y $AY = [-1, 0, 1, -1, 1, 0]'$ es linealmente independiente de Y y de los términos de la sucesión. Ahora bien, $A^2Y = Y$, con lo cual, Y pertenece a $\lambda^2 - 1$. Como los dos polinomios completan el conjunto de factores invariantes no triviales, sustituimos X_5 por Y.

$$
R = [X_5, AX_5, X_6, AX_6, A^2X_6, A^3X_6] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

forma canónica racional de A.

Nota. El vector $Z = [0, 1, 0, 0, 0, 0]'$ es linealmente independiente de los términos de la sucesión que empieza por X_6 y $AZ = [3, 0, -2, 1, -2, 0]'$ es linealmente independiente de Z y de los términos de la sucesión. Sin embargo, $A^2Z = [-1, 1, 0, 0, 0, 1]' = -AX_6 + A^3X_6 + Z$; luego $(A^2 - 1)(Z - AX_6) = 0$ y $W = Z - AX_6 = [2, 0, -1, -1, -1, -1]'$ pertenece a $\lambda^2 - 1$. Tomando éste como X_5 se puede formar otra matriz R con la que se obtiene la forma canónica racional.

6. Sea $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1\\ -1 & -4 & -2 & -1 & 1\\ -1 & -4 & -1 & -2 & 1\\ -2 & -2 & -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. Tomemos $X = [1, 0, 0, 0, 0]'$.

Entonces X, $AX = [-2, 1, -1, -1, -2]'$, $A^2X = [1, 1, -1, -1, 0]'$ son linealmente independientes, mientras que $A^3X = [-1, 2, -2, -2, 0]' = 2A^2X - 3X$ y, por tanto, X pertenece a $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3$. Supondremos que éste es el polinomio mínimo $m(\lambda)$ y sustituimos X por X_5.

Restando en A la cuarta columna de la primera se obtiene $[-1, 0, 0, 1, 0]'$; por consiguiente, si $Y = [1, 0, 0, -1, 0]'$, $AY = -Y$, con lo cual, Y pertenece a $\lambda + 1$. Restando la cuarta columna de A de la tercera se obtiene $[0, 0, -1, 1, 0]'$; luego, si $Z = [0, 0, 1, -1, 0]'$, $AZ = -Z$, con lo cual, Z pertenece a $\lambda + 1$. Como Y, Z y los términos de la sucesión que empieza por X_5 son *linealmente independientes*, sustituimos Y por X_4 y Z por X_3. Cuando

$$R = [X_3, X_4, X_5, AX_5, A^2X_5] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R^{-1}AR = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

es la forma canónica racional de A.

PROBLEMAS PROPUESTOS

7. Hallar sobre el cuerpo de los números racionales la matriz canónica de los Teoremas I, II, III de cada una de las matrices (*a*)-(*h*) del Problema 9 del Capítulo 25. ¿Puede cambiar una cualquiera de estas matrices al ampliar el cuerpo numérico?

Sol. parcial. (*a*) I, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix}$; II, III, $\text{diag}(1, 2, 3)$

(*b*) I, II, III, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(*e*) I, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; II, III $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(*f*) I, $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; II, III, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(*g*) I, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$; II, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$; III; $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(*h*) I, $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; II, III, $\text{diag}(2, 2, 2, -1, -1)$

8. ¿En qué condiciones son idénticas (*a*) las formas canónicas de los Teoremas I y II?, (*b*) ¿las formas canónicas de los Teoremas II y III? y (*c*) ¿en qué condiciones la forma canónica del Teorema II es diagonal?

9. Identificar la forma canónica $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Comprobar con la solución del Problema 8(*b*).

10. Siendo (*a*) $\lambda + 1$, $\lambda^3 + 1$, $(\lambda^3 + 1)^2$ y (*b*) $\lambda^2 + 1$, $\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4$, $\lambda^6 + 6\lambda^4 + 9\lambda^2 + 4$ los factores invariantes no triviales de la matriz regular A hallar las formas canónicas de los Teoremas I, II, III, sobre el cuerpo de los números racionales, y la del Teorema IV.

Sol. (*a*)

$$\text{I,}\quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{II,}\quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{III,}\quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{IV,}\quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \qquad \text{siendo } \alpha, \beta = \tfrac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}).$$

11. Demostrar: Respecto a una matriz cuadrada A de orden n, si el vector X pertenece a $g(\lambda)$, entonces $g(\lambda)$ es divisor del polinomio mínimo $m(\lambda)$ de A.

Ind. Hacer la hipótesis contraria y considerar $m(\lambda) = h(\lambda) \cdot g(\lambda) + r(\lambda)$.

12. En el Ejemplo 6 demostrar que X, AX e Y son linealmente independientes y, a continuación, reducir A a su forma canónica racional.

13. En el Problema 6:

(*a*) Tomar $Y = [0, 1, 0, 0]'$, linealmente independiente de la sucesión que empieza por X_5, y obtener $X_4 = Y - (3A - 2I)X_5$ que pertenece a $\lambda + 1$.

(*b*) Tomar $Z = [0, 0, 1, 0]'$, linealmente independiente de X_4 y de la sucesión de X_5, y obtener $X_3 = Z - X_5$ que pertenece a $\lambda + 1$.

(*c*) Hallar $R^{-1}AR$ utilizando los vectores X_3 y X_4 de (*b*) y (*a*) para escribir R.

14. Hallar R de forma que $R^{-1}AR$ sea la forma canónica racional de A, siendo esta la matriz del Problema 9(*a*)-(*h*), Capítulo 25.

15. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -6x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 \\ \dfrac{dx_4}{dt} = -3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

en donde las incógnitas x_i son funciones de la variable real t.

Ind. Sea $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]$; se define $\dfrac{dX}{dt} = \left[\dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{dx_2}{dt}, \dfrac{dx_3}{dt}, \dfrac{dx_4}{dt}\right]'$, y se escribe de nuevo el sistema en la forma

$$\text{(i)} \qquad \frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = AX + H$$

Como la transformación lineal regular $X = RY$ reduce (i) a

$$\frac{dY}{dt} = R^{-1}ARY + R^{-1}H$$

elegir R de forma que $R^{-1}AR$ sea la forma canónica racional de A. El vector elemental E_1 de cuarto orden, perteneciente a $\lambda^3 - \lambda$, es el primer término de la sucesión $X_1 = E_1, AX_1, A^2X_1$, mientras que E_4, perteneciente a $\lambda + 1$, da lugar a $X_2 = E_4 - X_1 + 2AX_1$. Ahora bien, con

$$R = [X_1, AX_1, A^2X_1, X_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & -6 & 4 & -12 \\ 0 & -3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dY}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ y_1 + y_3 \\ y_2 \\ -y_4 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$Y = \begin{bmatrix} C_1 + \frac{1}{2}t^2 \\ C_2e^t + C_3e^{-t} - t \\ -C_1 + C_2e^t - C_3e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 - 1 \\ C_4e^{-t} \end{bmatrix} \text{de donde } X = RY = \begin{bmatrix} 2C_1 + C_2e^t + 3(C_3+C_4)e^{-t} + t^2 - 2t + 1 \\ 2C_1 + 2C_2e^t + 2(3C_3+4C_4)e^{-t} + t^2 - 4t + 2 \\ -4C_1 - 2C_2e^t - 2(5C_3+6C_4)e^{-t} - 2t^2 + 6t - 4 \\ -2C_1 - C_2e^t - 5(C_3+C_4)e^{-t} - t^2 + 3t - 2 \end{bmatrix}$$

INDICE

Indice de símbolos

LIBROS DE LA SERIE SCHAUM PUBLICADOS EN ESPAÑOL

MATEMÁTICAS/ESTADÍSTICA

Álgebra elemental • Álgebra elemental moderna • Álgebra superior • Análisis de Fourier
Análisis vectorial • Cálculo diferencial e integral • Cálculo superior • Ecuaciones diferenciales
Ecuaciones diferenciales modernas • Espacio de estado y sistema lineal • Estadística
Estadística aplicada a la administración • Geometría analítica • Geometría descriptiva
Geometría diferencial • Geometría plana • Geometría proyectiva • Manual de fórmulas y tablas matemáticas • Matemáticas aplicadas a la ciencia y la tecnología • Matemáticas financieras • Matemáticas finitas • Matemáticas superiores para ingenieros y científicos • Matemáticas básicas para electricidad y electrónica • Matrices • Probabilidad y estadística • Teoría de conjuntos y temas afines • Teoría de grupos • Topología • Transformadas de Laplace • Trigonometría
Variables complejas • Variables reales • Vibraciones mecánicas.

ECONOMÍA/ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS

Contabilidad I • Contabilidad II • Contabilidad intermedia I • Contabilidad intermedia II
Contabilidad de costos • Desarrollo económico • Economía internacional
Macroeconomía • Microeconomía • Publicidad • Métodos cuantitativos en administración.

INGENIERÍA

Acústica • Análisis estructural • Análisis estructural avanzado • Circuitos eléctricos
Circuitos electrónicos • Comunicación electrónica • Dinámica de los fluidos • Dinámica de Lagrange
Diseño de concreto armado • Diseño de máquinas • Ecuaciones básicas de las ciencias de la ingeniería
Líneas de transmisión • Materiales de construcción • Mecánica de los fluidos e hidráulica
Mecánica del medio continuo • Mecánica para ingenieros (Estática y Dinámica), 2a ed. • Mecánica teórica
Resistencia de materiales • Retroalimentación y sistemas de control
Termodinámica • Transferencia de calor.

CIENCIAS NATURALES

Ciencias físicas • Física aplicada • Física general • Física moderna • Fisicoquímica
Genética • Óptica • Química general • Química orgánica.

COMPUTACIÓN

Análisis numérico • Ciencia de las computadoras • Programación BASIC
Programación FORTRAN • Principios digitales.

CIENCIAS SOCIALES

Introducción a la psicología • Psicología del niño.

EDUCACIÓN MEDIA - SECUNDARIA - PREPARATORIA - VOCACIONAL - PRE-UNIVERSITARIA - C.O.U.

Fundamentos de física, I y II • Fundamentos de matemática, I y II • Fundamentos de química general
Fundamentos de química orgánica.

GENERAL

Cómo lograr mejores calificaciones.