CAPÍTULO

2

Ecuaciones e inecuaciones

2.1. Ecuaciones

Si dos expresiones algebraicas unidas por un signo igual contienen al menos una variable, la nueva expresión que resulta se denomina *ecuación algebraica* o, simplemente, *ecuación*.
Un valor de la variable que haga que la ecuación sea una proposición verdadera se denomina una *solución* de la ecuación dada y se dice que tal valor de la variable *satisface* la ecuación. El conjunto de todos los valores que satisfacen una ecuación se llama *conjunto solución* de la ecuación.
Uno de los problemas más comunes en Matemática es *resolver una ecuación*, es decir, encontrar todas las soluciones posibles de la ecuación dada. Para llevar a cabo este proceso, por lo general, se efectúan ciertas operaciones en la ecuación que la transforman en una nueva ecuación mas fácil de resolver. Tales simplificaciones deben realizarse en forma tal que la nueva ecuación tenga las mismas soluciones que la ecuación original, es decir, se debe, en lo posible, obtener *ecuaciones equivalentes* (ecuaciones con idéntico conjunto solución).
Entre las reglas que aseguran equivalencia de ecuaciones están: sumar (o restar) el mismo número de ambos lados, así como multiplicar (o dividir) ambos lados por la misma constante, excepto cero.
Hay operaciones que al aplicarlas a ecuaciones no garantizan que la ecuación resultante sea equivalente a la original, por ejemplo:

- Multiplicar ambos lados de la ecuación por expresiones no numéricas, es decir, expresiones que contengan la variable.

- Suprimir un factor común no numérico de ambos miembros de una ecuación.
- Elevar a la misma potencia, por ejemplo al cuadrado, ambos miembros de una ecuación.

Si no se tiene certeza de obtener equivalencia de ecuaciones con las operaciones realizadas en una ecuación dada con el fin de resolverla, es conveniente verificar todas “las soluciones.ºbtenidas al final de estos procedimientos sustituyéndolas en la ecuación original.
Nota: En esta ocasión, estudiaremos ecuaciones que contienen sólo una variable.

Ecuación lineal: Una ecuación lineal en x es de primer grado y tiene la forma

$$ax + b = 0\ ,\ a \neq 0$$

Toda ecuación lineal tiene exactamente una solución x igual a $-\frac{b}{a}$

Ecuación cuadrática: Una ecuación cuadrática en x es de segundo grado y tiene la forma

$$ax^2 + bx + c = 0\ ,\ a \neq 0$$

Puede tener dos, una o ninguna solución real x, dependiendo de que el discriminante, $\Delta = b^2 - 4ac$, sea mayor, igual o menor que cero, respectivamente.

$$\textbf{Fórmula cuadrática}: \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nota: No sólo existe el método de la fórmula cuadrática para resolver una ecuación como la anterior, también están el de la factorización y el de la completación de cuadrados. Con frecuencia, el método de factorización es el más rápido, pero en algunas ocasiones es difícil reconocer los factores, más aún, muchas expresiones cuadráticas no tienen factores reales, en tales casos es imposible factorizar en $\mathbf{R}$.

Otras ecuaciones: A menudo surgen ecuaciones que a primera vista no parecen ser lineales, ni cuadráticas, pero que pueden reducirse y resolverse como tales, es el caso de las que contienen fracciones, raíces, etc. Es recomendable, al resolver este tipo de ecuaciones, verificar todas las soluciones obtenidas al final de los procedimientos usados, reemplazándolas en la ecuación original, especialmente si la variable está bajo la raíz, va en el denominador de una fracción, etc. Ecuaciones con valor absoluto, logarítmicas y polinómicas de grado mayor que dos se verán más adelante.

2.1.1. Ejemplos

1. Los estudiantes, frecuentemente, tienden a confundir las expresiones algebraicas con las ecuaciones algebraicas y aplican reglas, en las expresiones algebraicas, permitidas sólo para las igualdades:

   (a) $\dfrac{x+3}{4} - \dfrac{x-4}{2} - \dfrac{3}{8}$

es una expresión algebraica, en cambio

$$\text{(b)} \quad \frac{x+3}{4} - \frac{x-4}{2} - \frac{3}{8} = 0$$

es una ecuación algebraica.

Si se multiplica (a) por 8 se obtiene una nueva expresión algebraica, que es 8 veces la original. En cambio, la multiplicación por 8 en (b) es tan útil que permite (después de reducir términos semejantes) obtener la solución de la ecuación, a saber, $x = \frac{19}{2}$,

2. Resolver $\frac{9}{5}(3-x) = \frac{3}{4}(x-3)$

   Solución:

$$\begin{aligned} \frac{9}{5}(3-x) &= \frac{3}{4}(x-3) \\ 36(3-x) &= 15(x-3) \\ 51x - 153 &= 0, \qquad \text{ecuación lineal con a} = 51,\ \text{b} = -153 \\ x &= \frac{153}{51} = 3 \qquad \text{es la solución} \end{aligned}$$

   Notar que $\frac{9}{5}(3-x) = -\frac{9}{5}(x-3)$

   Luego la ecuación puede escribirse: $-\frac{9}{5}(x-3) = \frac{9}{5}(x-3)$

   Acá, la división por $x-3$ no es posible, ya que esta expresión puede ser cero.

3. Resolver $(2x+3)(3x-1) = -4$

   Solución: Se debe abordar con precaución los ejercicios de este tipo. Es muy frecuente cometer el error de suponer que uno de los factores es igual a -4.

$$\begin{aligned} (2x+3)(3x-1) &= -4 \\ (2x+3)(3x-1)+4 &= 0 \\ (6x^2+7x-3)+4 &= 0 \\ 6x^2+7x+1 &= 0 \\ (6x+1)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

   Luego $x = -\frac{1}{6}$ y $x = -1$ son las soluciones.

   La ecuación $6x^2+7x+1=0$ también se puede resolver usando la fórmula cuadrática con $a=6,\ b=7$ y $c=1$

4. Resolver la ecuación fraccionaria (hay x en el denominador):

$$\frac{3x+4}{x+2} - \frac{3x-5}{x-4} = \frac{12}{x^2-2x-8}$$

Solución: Se tiene que $x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$, es el M.C.D.

Multiplicando ambos lados por el M.C.D. queda:

$$\begin{array}{rcl} (x-4)(3x+4) - (x+2)(3x-5) & = & 12; , \quad \text{de donde} \\ -9x - 6 & = & 12 \\ -9x - 18 & = & 0 , \quad \text{ecuación lineal} \\ x & = & -2 \end{array}$$

Notar que la ecuación original no está definida para $x = -2$, luego no tiene solución.

5. Resolver la ecuación radical (hay x bajo una raíz):

$$\sqrt{x^2+33} - x = 3$$

Solución:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{x^2+33} & = & x + 3 \qquad ()^2 \\ x^2 + 33 & = & (x+3)^2 \\ x^2 + 33 & = & x^2 + 6x + 9 \\ x & = & 4 \end{array}$$

Se debe chequear si $x = 4$ satisface la ecuación original, en este caso sí, luego $x = 4$ es solución de la ecuación dada.

Nota: Las ecuaciones a menudo son útiles en la solución de problemas aplicados en diversos campos. En general, tales problemas se establecen en forma verbal; antes de que se utilicen las herramientas algebraicas correspondientes es necesario traducir a símbolos matemáticos las declaraciones verbales. Si una o unas ecuaciones modelan el problema no basta sólo el resolverlas, además hay que determinar que soluciones de la o las ecuaciones planteadas satisfacen todas las condiciones del enunciado del problema. Por ejemplo:

6. Se quiere agregar una misma longitud al largo y al ancho de un marco rectangular de modo que abarque un área de 10m^2. Si inicialmente tiene 4m de largo y 2m de ancho, determinar tal incremento.

Solución: Sea x la cantidad a agregar. Luego el nuevo largo y ancho son: $4+x$ y $2+x$, respectivamente. Como se desea un área $A = 10$, se tiene:

$$A = 10 = (4+x)(2+x)$$

Esta es la ecuación que modela el problema. Sólo resta resolverla y ver que soluciones de ella son soluciones al problema.

$$\begin{array}{rcl} 10 & = & (4+x)(2+x) \\ 10 & = & x^2 + 6x + 8 \\ 0 & = & x^2 + 6x - 2 \\ 0 & = & (x - 3 - \sqrt{11})(x + 3 + \sqrt{11}) \end{array}$$

Las soluciones de la ecuación son:

$$x_1 = -3 + \sqrt{11} \quad , \quad x_2 = -3 - \sqrt{11}$$

Sólo x_1 es solución al problema ya que x representa una longitud y por lo tanto debe ser positiva.

7. Una empresa fabrica un producto que tiene costos variables de \$6 por unidad y costos fijos de \$80. Cada unidad tiene un precio de venta de \$10. Determinar el número de unidades que deben vender para que la compañía obtenga utilidades de \$60 y calcular el margen por unidad.

   Solución: Se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Utilidades} &= \text{Ingresos totales} - \text{Costos totales} \\ \text{Ingresos totales} &= \text{Cantidad vendida} \times \text{precio de venta} \\ \text{Costos totales} &= \text{Costos variables} + \text{Costos fijos} \end{aligned}$$

   Sea $q =$ número de unidades que deben ser vendidas.
   Luego el modelo para el problema es:

$$60 = 10q - (6q + 80)$$

   Resolviendo esta ecuación lineal se tiene que:

$$\begin{aligned} 60 &= 10q - (6q + 80) \\ &= 4q - 80 \\ \text{de donde se obtiene} \quad q &= 35 \end{aligned}$$

   Luego es necesario vender 35 unidades para obtener utilidades de \$60.

   Por otra parte, la diferencia entre el precio y el costo variable da lo que se conoce en economía como *margen*, que es de particular interés. En este caso el margen por unidad es igual a $10 - 6 = 4$

8. El propietario de un edificio de departamentos que tiene 60 habitaciones puede arrendarlas todas, si fija una renta de \$180 al mes. Al subir la renta, algunas de las habitaciones quedarán vacías; en promedio, por cada incremento de \$5, una habitación quedará vacía sin posibilidad alguna de arrendarla. Encontrar la renta que debería cobrar con el fin de obtener un ingreso total de \$11.475

   Solución: Sea n el número de incrementos de \$5, entonces, el incremento en la renta por habitación es de $\$5n$, lo que significa que el arriendo por habitación es de $\$(180 + 5n)$. El número de habitaciones no arrendadas será entonces n, de modo que el número de las arrendadas será de $60 - n$.

El ingreso total que recibirá, por este concepto, es:

$$\begin{aligned}
\text{ingreso total} &= \text{(renta por habitación)(número de habitaciones arrendadas)}\\
11475 &= (180+5n)(60-n)\\
11475 &= 5(36+n)(60-n) \quad /.(\frac{1}{5})\\
2295 &= (36+n)(60-n)\\
2295 &= 2160+24n-n^2\\
0 &= n^2-24n+135\\
0 &= (n-9)(n-15)
\end{aligned}$$

Luego $n=9 \quad \text{o} \quad n=15$ son soluciones de la ecuación. De aquí, la renta debería ser fijada en $\$180+45$, es decir, $\$225$, o bien en $\$180+75$, o sea, $\$255$. En el primer caso, 9 de las habitaciones estarán vacías y 51 arrendadas. En el segundo caso (renta de $225), 15 habitaciones estarán vacantes y sólo 45 arrendadas. En ambos casos los ingresos totales serán los mismos.

9. Una compañía vitivinícola requiere producir 10.000 litros de jerez mezclando vino blanco, que tiene un contenido de alcohol del 10 %, con brandy, el cual tiene un contenido de alcohol del 35 % por volumen. El jerez debe tener un contenido de alcohol del 15 %. Determinar las cantidades de vino blanco y de brandy que deben mezclarse para obtener el resultado deseado.

Solución: Sean x los litros de brandy usados en la producción de los 10.000 litros de jerez. Luego, el volumen de vino blanco usado será de $(10000-x)$ litros. Puesto que el brandy contiene 35 % de alcohol, la cantidad de alcohol en x litros de brandy es $\frac{35}{100}x$.

De manera similar, el vino contiene 10 % de alcohol, de modo que $(10000-x)$ litros de vino contienen $\frac{1}{10}(10000-x)$ litros de alcohol. Por lo tanto la cantidad total de alcohol en la mezcla será de

$$\frac{35}{100}x+\frac{1}{10}(10000-x) \quad \text{litros}$$

La mezcla debe contener 15 % de alcohol, por lo que los 10.000 litros deberían contener $\frac{15}{100}(10000)=1500$ litros de alcohol. Por lo tanto, se tiene la ecuación:

$$\frac{35}{100}x+\frac{1}{10}(10000-x)=1500$$

Resolviendo se obtienen las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned}
\frac{35}{100}x+1000-\frac{1}{10}x &= 1500\\
\frac{35}{100}x-\frac{1}{10}x &= 500\\
35x-10x &= 50000\\
25x &= 50000\\
x &= 2000
\end{aligned}$$

Por lo tanto se requiere de 2000 litros de brandy al 35 % y 8000 litros de vino blanco al 10 % para obtener 10.000 litros de jerez al 15 %.

2.1.2. Ejercicios

1. Resolver las ecuaciones siguientes:

   (a) $\dfrac{5x-6}{2} = x - \dfrac{2-x}{3}$ (b) $x^2 + (x+1)^2 = (2x-1)(x+3)$

   (c) $2x(x+1) = x^2 - 1$ (d) $(3x+1)(2x-1) - 2x^2 = (2x-3)^2 + (6x+5)$

   (e) $\frac{x^2}{3} + 2x = x$ (f) $\frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{4}(3x-1)\right] = \frac{2x}{3} - \frac{1}{2}$

   (g) $\dfrac{3x}{2-x} - 3 = -\dfrac{6}{x-2}$ (h) $\sqrt{x-4} = 8x - 3$

2. En una clase de matemáticas para la administración hay 52 estudiantes. Si el número de varones es 7 más que el doble de mujeres, determine el número de mujeres en la clase.

3. A una compañía grabadora le cuesta \$5.600.000 preparar un álbum de discos, esto es un costo fijo por una sola vez y que cubre la grabación el diseño del álbum y otros. Los costos variables que incluyen manufactura, mercadotecnia y derechos son de \$260 por disco. Si el álbum se vende en las discotecas a \$400 cada uno. ¿Cuántos discos se deben vender para que la compañía recupere su inversión?

4. Los miembros de una fundación desean invertir \$18.000 en dos tipos de títulos que pagan dividendos anuales del 9 % y 6 %, respectivamente. ¿Cuánto deberán invertir a cada tasa si el ingreso debe ser equivalente al que produciría al 8 % la inversión total?

5. Un químico tiene dos soluciones de ácido sulfúrico, una al 20 % y otra al 80 %. ¿Cuánto debe usarse de cada solución para obtener 100 litros al 62 %?

6. Tres personas deciden compartir por igual el costo de un velero, sin embargo, encuentran que si se asocia otra persona, en las mismas condiciones, el costo del velero para cada uno de los tres socios originales se reduciría en \$300.000 ¿Cuál es el costo del velero?

7. Le cuesta a un fabricante \$2.000, costo fijo por una sola vez, comprar las herramientas a fin de producir cierto artículo doméstico. Si los costos variables que incluyen material y la mano de obra de cada artículo producido son de \$60, entonces el fabricante puede vender todo lo que produce a \$90 cada uno. Determinar cuántos artículos debería producir para obtener una utilidad de \$1.000

8. Un comerciante de automóviles usados compra dos automomóviles en \$2.900.000. Vende uno con una ganancia del 10 % y el otro perdiendo el 5 % y aún obtuvo una ganancia de \$185.000 por la transacción completa. Encontrar el costo de cada automóvil.

9. Cada semana, una conpañía puede vender x unidades de su producto a un precio de p dólares cada uno, en donde $p = 600 - 5x$. Si le cuesta a la compañía $(800 + 75x)$ dólares producir x unidades

   a) ¿Cuántas unidades debería vender la compañía a la semana si desea generar un ingreso de \$17.500?

   b) ¿Cuántas unidades debería producir y vender cada semana para lograr utilidades semanales de \$5.500?

   c) ¿Qué precio por unidad debería fijar la compañía para obtener ingresos semanales por \$18.000?

   d) ¿A qué precio por unidad generaría la compañía una utilidad semanal de \$5.750?

10. El número de unidades de un producto que un fabricante puede vender a la semana depende del precio que les fije. Suponiendo que al precio de p pesos, x artículos pueden venderse a la semana, donde $x = 300(6-p)$. Cada unidad tiene un costo de fabricación de \$3. Determinar el valor de p que producirá una utilidad semanal de \$600

11. Un tubo puede llenar un depósito en 5 horas menos que otro; juntos lo llenan en 5 horas. ¿Cuánto tiempo tardará cada uno en llenar el depósito?, dar la respuesta con dos decimales.

12. La presión del agua de mar bajo la superficie aumenta 14,7 libras/pulgada^2 por cada 33 pies de profundidad, o sea, $p = 14,7 + 14,7(d/33)$, donde p es la presión en libras por pulgada al cuadrado a una profundidad de d pies bajo la superficie. ¿A qué profundidad se encuentra un buzo si observa que la presión es 165 libras/pulgada^2?

13. ¿Cuántos litros de ácido clorhídrico deben agregarse a 12 litros de una solución al 30 % para obtener una solución al 40 %?

14. Una persona tiene \$335 en fichas dentro de un monedero. Si hay tres veces más fichas de \$10 que de \$25 y tres fichas de \$5 menos que de \$10, ¿Cuántas de cada valor hay en el monedero?

15. Una máquina autómatica nueva puede hacer un trabajo en 1 hora menos que otra más antigua. Juntas pueden realizar el mismo trabajo en 1,5 horas. ¿Cuánto tiempo tardará cada una en efectuar dicho trabajo?

16. Una torre petrolera de perforación tiene una quinta parte en la arena, veinte pies en el agua y dos terceras partes en el aire. Determinar la altura total de la torre.

2.1.3. Respuesta a los ejercicios de número impar

- 1) (a) $x = 2$, (c) $x = -1$, (e) $x = 0$, $x = -3$, (g) No tiene solución
- 3) 40.000 discos.
- 5) 30 al 20 %, 70 al 80 %
- 7) 100 artículos.
- 9) a) 50 ó 70 unidades; c) 300 dólares.
- 11) 13,09 y 8,09 horas.
- 13) 2 litros al 100 %
- 15) 15 de $10, 5 de $25, 12 de $5
- 17) 150 pies

2.2. Inecuaciones

En general, se llama *desigualdad* a un planteamiento que establece que una expresión es menor, menor o igual, mayor, mayor o igual que otra.
Cuando una desigualdad contiene variables recibe el nombre de *inecuación*.
Un problema de particular interés es el de *resolver* una inecuación, es decir, encontrar todos los posibles valores de la variable que la satisfacen.
Tal como ocurre en las ecuaciones no hay métodos generales para resolver una inecuación, todo depende de la habilidad del estudiante para utilizar las propiedades de las desigualdades.

Algunas reglas para operar con desigualdades

1. Ley de tricotomía: Sean $a,\ b \in \mathbf{R}$, entonces exactamente una de las relaciones siguientes es válida: $a < b, \quad a = b, \quad a > b$
2. Ley transitiva: Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$
3. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$
4. (a) Si $a < b,\ c > 0$, entonces $ac < bc$
   (b) Si $a < b,\ c < 0$, entonces $ac > bc$
5. Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$

6. Si $ab > 0$, entonces a y b son positivos, o ambos son negativos.
7. Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$
8. Si $0 < a < b$, entonces $0 < b^{-1} < a^{-1}$

Nota: En esta oportunidad estudiaremos inecuaciones que contienen sólo una variable.

Inecuaciones lineales: Por inecuación lineal o de primer grado se entiende cualquier expresión que tiene alguna de las formas siguientes:

$$ax + b < 0, \quad ax + b \leqslant 0, \quad ax + b > 0, \quad ax + b \geqslant 0$$

donde $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ y x es una variable real.

Inecuaciones cuadráticas: Una inecuación cuadrática o de segundo grado es cualquier expresión en la forma de una desigualdad del tipo:

$$ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \leqslant 0, \quad ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c \geqslant 0$$

donde $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ y x es una variable real.
Como es de suponer, gran parte de las desigualdades de primer y de segundo grado no tienen ninguna de las formas anteriores, pero se pueden reducir a ellas.

Valor absoluto: Para $x \in \mathbf{R}$ se define el *valor absoluto de* x de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto: Para a, b números reales cualesquiera se tiene:

1. $|a| \geqslant 0$; $\quad |a| = 0$ siempre y cuando $a = 0$
2. $\sqrt{a^2} = |a|$
3. $|a| = |-a|$
4. $|ab| = |a||b|$
5. $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$
6. $|a + b| \leqslant |a| + |b|$, desigualdad triangular.
7. Para $a > 0$, $\quad |x| < a$ es equivalente a $-a < x < a$
8. Para $a > 0$, $\quad |x| > a$ es equivalente a $x < -a \lor x > a$

Otras inecuaciones: En los ejemplos de esta sección se muestran inecuaciones que sin ser lineales ni cuadráticas pueden resolverse como tales. Esto, por ejemplo, ocurre en las inecuaciones que contienen fracciones, valor absoluto, etc.

2.2.1. Ejemplos

1. Resolver la inecuación: $3x - 1 < x + 5$

   Solución:
$$\begin{array}{rcll} 3x - 1 & < & x + 5 & / + (-x + 1) \\ -x + 1 + 3x - 1 & < & -x + 1 + x + 5 & \\ 2x & < & 6 & / \cdot (\frac{1}{2}) \\ x & < & 3 & \end{array}$$

   El conjunto solución: $S = \{x \in \mathbf{R} \ / \ x < 3\} =]-\infty, 3[$

2. Resolver: $-3 < 7 - 2x \leqslant 7$

   Solución: Se trata de resolver las inecuaciones lineales siguientes:
$$-3 < 7 - 2x, \quad \text{y} \quad 7 - 2x \leqslant 7$$

   Esto se puede realizar en forma simultánea como sigue:
$$\begin{array}{rccll} -3 & < & 7 - 2x & \leqslant 7 & / + (-7) \\ -3 - 7 & < & 7 - 2x - 7 & \leqslant 7 - 7 & \\ -10 & < & -2x & \leqslant 0 & / \cdot (-\frac{1}{2}) \\ -10/(-2) & > & -2x/(-2) & \geqslant 0 & \\ 5 & > & x & \geqslant 0 & \end{array}$$

   El conjunto solución $S = \{x \in \mathbf{R} \ / \ 5 > x \geqslant 0\} = [0, 5[$

3. La inecuación $\dfrac{x+1}{2x-3} \geqslant 1$ no es de primer ni de segundo grado, pero puede resolverse como una de primer grado.

   Notar que *no* se puede multiplicar por $2x - 3$ pues este número puede ser positivo o negativo. Un procedimiento correcto es:
$$\begin{array}{rcll} \dfrac{x+1}{2x-3} & \geqslant & 1 & / + (-1) \\[2ex] \dfrac{x+1}{2x-3} - 1 & \geqslant & 0 & \\[2ex] \dfrac{-x+4}{2x-3} & \geqslant & 0 & \end{array}$$

   Una fracción es positiva si el numerador y denominador tienen el mismo signo. Analizaremos el signo de ellos. El numerador se anula (es cero) en el 4, el denominador se anula en el $\frac{3}{2}$. Estos puntos son "claves"para el análisis del signo de la fracción.

   Los puntos claves dividen a la recta real en tres tramos. Se analiza el signo de la expresión en cada tramo según el siguiente esquema:

	$-\infty < x < 3/2$	$3/2 < x < 4$	$4 < x < +\infty$
	0	2	5
$-x+4$	$+$	$+$	$-$
$2x-3$	$-$	$+$	$+$
$\frac{-x+4}{2x-3}$	$-$	$+$	$-$
	no sirve	sirve	no sirve

Si es necesario, se elige un número de cada tramo para verificar el signo de la expresión, en este caso se eligieron el 0, 2 y 5, respectivamente.

La expresión es positiva en $]3/2,\,4[$ además vale 0 en 4, luego el conjunto solución es: $S =]3/2,\,4]$

4. La inecuación $x^2+3x-4<0$ es de segundo grado. La expresión del lado izquierdo es una función polinomial que se puede factorizar, luego:

$$\begin{array}{rcl} x^2+3x-4 & < & 0 \\ (x+4)(x-1) & < & 0 \end{array}$$

Un producto es negativo (<0) si cada factor es de distinto signo. Analizaremos el signo de ellos. El primer factor se anula en el -4, el segundo factor se anula en el 1. Estos puntos son "claves"para el análisis del signo del producto.

	$-\infty < x < -4$	$-4 < x < 1$	$1 < x < +\infty$
	-5	0	2
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$(x+4)(2x-3)$	$+$	$-$	$+$
	no sirve	sirve	no sirve

Los números elegidos en cada tramo para verificar el signo de la expresión son el -5, 0 y 2, respectivamente.

La expresión es negativa en $]-4,\,1[$, además vale 0 en -4 y en 1, pero éste caso no se contempla, luego el conjunto solución es: $S =]-4,\,1[$

5. La inecuación $x^2+1>0$ es de segundo grado. El polinomio $p(x)=x^2+1$ no es factorizable sobre $\mathbf{R}$, en consecuencia, $p(x)$ es siempre positivo o siempre negativo. Pero x^2 es siempre positivo o bien 0, de modo que, x^2+1 es siempre positivo. Así, la solución de $x^2+1>0$ es $]-\infty,+\infty[=\mathbf{R}$

6. La inecuación $x^2+1<0$ no tiene solución, luego el conjunto solución $S=\emptyset$. A esta conclusión se llega a través del análisis del ejemplo anterior.

7. La ecuación $|x| = a$ tiene dos, una o no tiene solución dependiendo si $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$, respectivamente. En el primer caso las soluciones son $x = +a$ y $x = -a$, y en el segundo caso $x = 0$.

8. La inecuación $|x| < a$ tiene por solución el conjunto $]-a, a[$ siempre que $a > 0$, y si $a \leqslant 0$, entonces el conjunto solución es el conjunto vacío.

9. La inecuación $|x| > a$ tiene por solución el conjunto $]-\infty, -a\,[\, \cup\,]\,a, +\infty[$ siempre que $a \geqslant 0$, y el conjunto $\mathbf{R}$ si $a < 0$.

10. Resolver: $|x-3| > 2x+1$

    Solución: Un procedimiento es ver donde la expresión que contiene valor absoluto se anula, en este caso en 3. Este punto es un punto clave, divide a la recta real en dos tramos. Se determinan expresiones equivalentes a la dada en cada tramo según el siguiente esquema:

	(1) $-\infty < x < 3$	(2) $3 < x < +\infty$
$\lvert x-3\rvert$	$-(x-3)$	$x-3$
$2x+1$	$2x+1$	$2x+1$
$\lvert x-3\rvert > 2x+1$	$-(x-3) > 2x+1$	$x-3 > 2x+1$
	(3)	(4)

    Luego, hay que resolver los sistemas formados por las inecuaciones lineales (1) y (3), (2) y (4), y chequear los puntos claves. Así el conjunto solución de la inecuación dada es:

$$S = (S_1 \cap\,]-\infty, 3\,[\,) \cup (\, S_2 \cap\,]3, +\infty[) =]-\infty, 2/3\,[\quad \text{(¡Verificarlo!)}$$

    donde: $S_1 =]-\infty, 2/3\,[$, $S_2 =]-\infty, -4\,[$ son, respectivamente, los conjuntos soluciones de las inecuaciónes lineales (3) y (4).

11. Resolver: $|x-3| \geqslant |2x+1|$

    Solución: Acá los puntos claves son el 3 y $-\frac{1}{2}$. Luego la recta real queda dividida en tres tramos. Se procede a reescribir, en cada tramo, la expresión dada:

	(1) $-\infty < x < -1/2$	(2) $-1/2 < x < 3$	(3) $3 < x < +\infty$
$\lvert x-3\rvert$	$-(x-3)$	$-(x-3)$	$x-3$
$\lvert 2x+1\rvert$	$-(2x+1)$	$2x+1$	$2x+1$
$\lvert x-3\rvert \geqslant \lvert 2x+1\rvert$	$-(x-3) \geqslant -(2x+1)$	$-(x-3) \geqslant 2x+1$	$x-3 \geqslant 2x+1$
	(4)	(5)	(6)

Luego para resolver $|x-3| \geqslant |2x+1|$ hay que chequear puntos claves y resolver los siguientes sistemas de inecuaciones lineales: (1) con (4), (2) con (5) y (3) con (6). El conjunto solución de la inecuación dada es:

$$S = (S_1 \cap]-\infty, -1/2\,]) \cup (S_2 \cap [-1/2,\ 3]) \cup (S_3 \cap [\,3, +\infty[)$$

donde S_1, S_2 y S_3 son los conjuntos solución, respectivamente, de las inecuaciones lineales (4), (5) y (6). Verificar que $S = [-4,\ 2/3]$

Otra forma de resolver el ejercicio anterior es haciendo uso de la propiedad que: Para todo número real a, $a^2 = |a|^2$, luego elevando al cuadrado la relación dada queda:

$$\begin{aligned} |x-3|^2 &\geqslant |2x+1|^2 \\ x^2-6x+9 &\geqslant 4x^2+4x+1 \\ -3x^2-10x+8 &\geqslant 0 \quad / \cdot (-1) \\ 3x^2+10x-8 &\leqslant 0 \\ (x+4)(3x-2) &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Los puntos claves para los signos de los factores $x+4$ y $3x-2$ son -4 y $\frac{2}{3}$, respectivamente

	$-\infty < x < -4$	$-4 < x < 2/3$	$2/3 < x < +\infty$
	-10	0	10
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$3x-2$	$-$	$-$	$+$
$(x+4)(3x-2)$	$+$	$-$	$+$
	no sirve	sirve	no sirve

La expresión es negativa (< 0) en $]-4,\ 2/3[$, y se anula en -4 y en $2/3$, luego $S = [-4,\ 2/3]$.

Nota: Las inecuaciones son importantes en la matemática de la economía, en ciertas teorías como la del juego, en programación lineal, etc.

Cuando una inecuación modela un problema, la solución debe ser aceptable según las características de ese, luego debe considerarse con algunas restricciones inevitables, por ejemplo, de espacio, costo, vida de materiales, poder de trabajo de un hombre, tiempo, número de individuos, etc., tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

12. Un constructor debe decidir si ha de arrendar o comprar una máquina excavadora. Si la arrendara, tendría que pagar \$600 al mes (sobre una base anual), y el costo diario (gasolina, aceites y el conductor) sería de \$60 por cada día que se utilizara. Si la comprara, su costo fijo anual sería de \$4000, y los costos diarios de operación y mantenimiento serían de \$80 por día. ¿Cuál es el número mínimo de días al año, que tendría que utilizar la máquina para justificar el arrendarla en vez de comprarla?.

Solución: Sea d el número de días que se utiliza la máquina al año. Si se arrienda, los costos anuales totales estarían formados por los pagos de renta, que serían de (12)(600) y los cargos diarios de $60d$. Si se compra la máquina, el costo anual es de $4000 + 80d$. Se desea que:

$$\begin{aligned} \text{costo}_{\text{renta}} &< \text{costo}_{\text{compra}} \\ 12(600) + 60d &< 4000 + 80d \\ 7200 + 60d &< 4000 + 80d \\ 3200 &< 20d \\ 160 &< d \end{aligned}$$

Por ello, el constructor debe utilizar la máquina cuando menos 161 días para justificar su alquiler. Notar que aquí, por razones prácticas, los valores posibles para d son números enteros mayores o iguales que 161.

2.2.2. Ejercicios

1. Escribir, usando notacioń de intervalos, los conjuntos siguientes.

   (a) $\{x \in \mathbf{R} \ / \ -4 \leqslant x \leqslant 5\}$ (b) $\{x \in \mathbf{R} \ / \ -9 \leqslant x \leqslant -1\}$
   (c) $\{x \in \mathbf{R} \ / \ x \leqslant -2\}$ (d) $\{x \in \mathbf{R} \ /3x + 5 \leqslant x\} \bigcap \{x \in \mathbf{R} \ /x \geqslant -3\}$
   (e) $\{x \in \mathbf{R} \ / \ 5x \leqslant 3 \ \text{ o } \ 2x \geqslant 7\}$ (f) $\{x \in [2, 5] \ / \ 5x - 3 \geqslant 0 \ \text{ y } \ 3x - 12 \leqslant 4\}$
   (g) $\{x \in \mathbf{R} \ / \ x^2 + x - 0,75 > 0\}$ (h) $\{x \in \mathbf{R} \ / \ |x + 3| \leqslant 5\}$
   (i) $\{x \in \mathbf{R} \ / \ |\frac{1}{x}| \leqslant \frac{1}{2}\}$ (j) $\{x \in \mathbf{R} \ / \ x^2 - 4 > |x - 5| \ \}$

2. Estudiar el signo de las expresiones siguientes, es decir, para que valores de x son positivas, negativas o nulas.

   (a) $(x - 2)(2x + 8)$ (b) $x^2 - 2x - 8$ (c) $|3x^2 - 3x - 18|$

3. Para qué valores de x son válidas cada una de las proposiciones siguientes

   (a) $|x + 9| = -(x + 9)$ (b) $|x - 13| = x - 13$
   (c) $|3x - 15| = 15 - 3x$ (d) $|x - 7| + |2 - x| < 0$

4. Resolver las inecuaciones siguientes. Expresar el conjunto solución en notación de intervalos y en notación de desigualdades.

   (a) $4x + 8 \geqslant -1$ (b) $\dfrac{x-1}{4} - 1 > \dfrac{x}{2}$ (c) $2(1 - x) \geqslant 5x$

   (d) $-6 < \frac{2}{5}(3 - 4x) \leqslant 4$ (e) $\dfrac{x+4}{1-x} \leqslant 6$ (f) $x^2 - x - 10 \leqslant 2$

   (g) $2x^2 - 6x - 4 \geqslant -9$ (h) $\dfrac{1}{x-5} + \dfrac{2+x}{3-x} < 0$ (i) $|4 - 6x| \geqslant 2$

   (j) $\dfrac{|x^2 + 5x|}{x-3} > 0$ (k) $\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{x-2} \geqslant 1$ (l) $\dfrac{|x^2 - 1|}{|x|} \leqslant 3$

5. Determinar todos los valores $x \in \mathbf{R}$ tales que $\dfrac{3}{x^2 - 4x + 3} \geqslant 0$.

6. Representar gráficamente el conjunto solución de : $\dfrac{|x+1|}{2x-1} \geqslant 1$.
7. Un fabricante puede vender todo lo que produce al precio de \$150 por unidad. Los costos de materiales y mano de obra por unidad son de \$80 y, además, existen costos fijos de \$40.000 por semana. ¿Cuántas unidades deberá producir si desea obtener utilidades semanales de al menos \$30.000?
8. La producción y venta de cada ejemplar de un periódico tiene un costo de \$25. El editor recibe \$20 por ejemplar por concepto de ventas y, si además, recibe ingresos por publicidad equivalente al 30 % de los ingresos de las ventas que sobrepasan las 20.000 copias.
   a) ¿Cuántos ejemplares deberá vender si al menos no desea tener pérdidas?
   b) ¿Cuántos ejemplares deberá vender si desea por lo menos tener una ganancia de \$100.000 por edición del periódico?
9. Utilizando desigualdades, representar mediante símbolos los siguientes enunciados:
   a) El número de horas de observación que se requiere para hacer un buen análisis, no es menor que 2,5 ni mayor que 4.
   b) La cantidad de exámenes que se realizan en cierto laboratorio, diariamente, difieren de 105 en menos de 3.
10. En un experimento de química, una solución de ácido clorhídrico se mantuvo a no más de 35°C y a no menos de 30°C. Si C representa la temperatura en °C, y $C = \frac{5}{9}(F-32)$ (F temperatura en °F), determinar la variación de temperatura en °F. Expresar la respuesta en notación de intervalo.
11. Un carpintero hizo un cierto número de mesas. Vende 70 de ellas y le quedan por vender más de la mitad. Hace, luego, 6 mesas adicionales y vende 36, quedándole menos de 42 mesas que vender. Determinar la cantidad de mesas que el carpintero fabricó.
12. Al ascender, el aire seco se expande y al hacerlo se enfría a razón de unos $5,5^0$F por cada 1.000 pies, hasta casi 40.000 pies de altura. Si la temperatura del suelo es de 70^0F, entonces la temperatura T, a una altura h, está dada aproximadamente por la siguiente fórmula: $T = 70 - 0,0055h$. ¿A qué altura variará la temperatura entre -40 y 26^0F?
13. Un campesino desea delimitar un terreno rectangular de tal modo de ocupar, en su totalidad, 200 yardas disponibles de cerca. Encontrar las dimensiones posibles del terreno si su área debe ser de al menos 2100 yardas cuadradas.
14. En cierto estanque especial para crianza de peces se introducen n de ellos. Si se sabe que la ganancia de peso promedio de cada pez es de $8600 - 3n$ gramos, determinar las restricciones de n si la ganancia total en peso de todos los peces debe ser mayor que 28.800 gramos.

2.2.3. Respuesta a los ejercicios de número impar

- 1) (a) $[-4, 5]$, (c)$]-\infty, -2]$, (e) $]-\infty, \frac{3}{5}] \cup [\frac{7}{2}, +\infty[$, (g) $]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$, (i) $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$
- 3) (a) $]-\infty, -9]$, (c) $]-\infty, 5]$
- 5) $]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$
- 7) Al menos 1.000 unidades.
- 9) (a) $2,5 \leqslant H \leqslant 4$, H = cantidad horas de observación.
  9) (b) $|C - 105| < 3$, C = cantidad de exámenes.
- 11) 141 mesas.
- 13) 30 y 70 yardas.