Hugo Alberto Rincón Mejía

Álgebra lineal

Facultad de Ciencias, UNAM
2013

Rincón Mejía, Hugo Alberto
Álgebra lineal / Hugo Alberto Rincón Mejía. -- 2a reimp. -- UNAM, Facultad de Ciencias, 2011.
x, 444 p. ; 22 cm. -- (Temas de matemáticas)(Las prensas de las ciencias)
Bibliografía: p. 429
Incluye índice
ISBN 978-968-36-9263-4

1. Algebra lineal – Estudio y enseñanza (Superior). 2. Algebra lineal – Problemas, ejercicios, etc. I. Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ciencias. II. t. III. Ser.

512.5-scdd20 Biblioteca Nacional de México

Álgebra lineal

1ª edición, 2001
1ª reimpresión, 2006
2ª reimpresión, 2011
3ª reimpresión, 2013

Facultad de Ciencias.
Ciudad Universitaria. Delegación Coyoacán
C. P. 04510, México, Distrito Federal
editoriales@ciencias.unam.mx

ISBN: 978-968-36-9263-4

Diseño de portada: Laura Uribe

Impreso y hecho en México

A mis padres,

Hugo Armando Rincón Orta y
Angelina Aurelia Mejía Arzate,

con todo mi cariño, por haber esperado demasiado de mí.

Introducción

Este texto contiene el material de los cursos Álgebra Lineal I y Álgebra Lineal II como los he impartido a lo largo de varios años. Tiene algunas características especiales:

- Comienza con operaciones asociativas, monoides y tablas de multiplicar. Esto es porque pienso que la definición de *espacio vectorial* puede resultar muy complicada para un alumno, y de esta manera se evita que se pierdan las consecuencias de cada axioma.

- En el capítulo de *espacios vectoriales*, no sólo se demuestra la existencia de bases, sino que se da una demostración de que las bases para un espacio vectorial tienen el mismo cardinal.

  La demostración es una aplicación del Lema de Zorn, y se puso mucho cuidado en presentar el argumento de manera clara en todos sus detalles.

- Se presentan dos capítulos acerca de espacios con producto interior. El primer capítulo incluye la teoría que los estudiantes de Física necesitan con urgencia, mientras que el último capítulo usa la teoría de espacios invariantes. En este capítulo se estudian los operadores normales, autoadjuntos y unitarios que son tan importantes para los estudiantes de Física cuántica.

- Se presentan ejemplos detallados de cálculos de formas canónicas y se hace énfasis en la teoría de la diagonalización simultánea. Como aplicación se presentan las cadenas de Markov y se caracteriza la situación en que las potencias de una matriz cuadrada convergen.

Agradezco la ayuda que me han prestado algunos de mis estudiantes. Entre éstos puedo recordar a Ricardo Hernández Barajas, Alina Madrid Rincón, Antonieta Campa, Patricia Pellicer Covarrubias, Alejandro Alvarado García y Saúl

Juárez Ordóñez. Especialmente agradezco a Rolando Gómez Macedo, por la lectura cuidadosa que realizó, señalando una buena cantidad de errores tipográficos y de notación.

Agradezco la gran ayuda prestada por los matemáticos Julio César Guevara y Guilmer González Flores, quienes revisaron cuidadosamente el libro y me señalaron una gran cantidad de diagramas, dibujos y detalles de estilo que había que corregir.

Este libro se benefició grandemente del interés que puso en él la M. en C. Ana Irene Ramírez Galarza con quien estoy profundamente agradecido.

A pesar de todo, es inevitable que permanezcan errores en el libro, de los cuales sólo yo soy responsable. Agradeceré a las personas que hagan favor de señalármelos.

Para terminar, quisiera manifestar el gusto que me da trabajar en la Facultad de Ciencias, donde los profesores entregan lo mejor de sí mismos a sus alumnos, sin regatear esfuerzos y sin ambición de lucro.

Trabajar en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias ha sido uno de los eventos más afortunados que me han ocurrido. Aprovecho esa oportunidad para manifestar mi aprecio y reconocimiento a mis compañeros del grupo de Álgebra, quienes casi todos fueron mis maestros.

Agradezco al profesor César Rincón Orta, su ejemplo, sus enseñanzas, su paciencia y el afecto inagotable que me ha brindado siempre. Gracias, tío.

Índice general

Capítulo 1

Operaciones asociativas

1.1. Semigrupos y monoides

Para mayor información sobre estos temas, recomendamos al lector los libros de Jacobson [3] y Rotman [7], aunque como lo que necesitaremos es bastante poco, esperamos que baste con lo que se presenta aquí.

Definición 1 *Una operación* $*$ *en un conjunto* X *es una función* $*: X \times X \to X$.

Muchas veces escribiremos $a * b$ en lugar de escribir $*((a,b))$.

Definición 2 *Decimos que la operación* $*: X \times X \to X$ *es asociativa si*

$$x * (y * z) = (x * y) * z, \quad \forall x, y, z \in X.$$

En este caso la pareja ordenada $(X, *)$ *se llama* semigrupo.

Ejemplo 1 *Son semigrupos:*

1. $(\mathbb{N}, +)$,
2. $(\mathbb{N}, *)$, *donde* $*$ *denota la multiplcación usual,*
3. $(\wp(X), \cap)$,
4. $(\wp(X), \cup)$,
5. $(\{f : X \to X \mid f \text{ es una función}\}, \circ)$
   Son semigrupos.

Ejemplo 2 *1.* $(\mathbb{Z}, -)$ *no es un semigrupo:*

$$1 = 1 - 0 = 1 - (1 - 1) \neq (1 - 1) - 1 = -1.$$

2. Consideremos la operación de diferencia de conjuntos en

$$\wp(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\},$$

observando que

$$\begin{aligned} \{0,1\} &= \{0,1\} \backslash \emptyset = \\ &= \{0,1\} \setminus (\{0,1\} \setminus \{0,1\}) \neq (\{0,1\} \setminus \{0,1\}) \setminus \{0,1\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Concluímoa que $(\wp(\{0,1\}), \backslash)$ *no es un semigrupo.* ■

1.1.1. Tablas de multiplicar

Definición 3 *Sea* $*$ *una operación en un conjunto finito* $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, *la tabla de multiplicar de* $*$, *es el arreglo cuadrado*

$*$	a_1	a_2	$\cdots$	a_i	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n
a_1	$a_1 * a_1$			$a_1 * a_i$		$a_1 * a_j$		$a_1 * a_n$
a_2								
$\vdots$								
a_i	$a_i * a_1$					$a_i * a_j$		
$\vdots$								
a_j	$a_j * a_1$			$a_j * a_i$				
$\vdots$								
a_n	$a_n * a_1$					$a_n * a_j$		$a_n * a_n$

Ejemplo 3 *En el conjunto* $\{0,1\}$ *se pueden definir* 16 *operaciones. Para convencernos de ello, calculemos la cardinalidad de*

$$\left\{ \{0,1\} \times \{0,1\} \xrightarrow{f} \{0,1\} \mid f \text{ es una función} \right\}.$$

Notemos lo siguiente: cada uno de los cuatro elementos de $\{0,1\} \times \{0,1\}$*tiene que ir a dar a* 0 *ó a* 1 *bajo una función de las de arriba. Entonces debe ser claro que hay* $2 * 2 * 2 * 2 = 16$ *elementos en el conjunto de funciones cuya cardinalidad estamos calculando.*
De estas 16 *operaciones hay* 8 *asociativas. Mencionamos algunas:*

1.

$*$	0	1
0	0	0
1	0	0

es asociativa.

2. Por la misma razón,

$*$	0	1
0	1	1
1	1	1

es asociativa.

3. La disyunción lógica

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	0

es asociativa.

4. La conjunción lógica

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

es asociativa.

5. Definamos $*$ por: $x * y = y \quad \forall x, y \in \{0, 1\}$. Es claro que las dos maneras de poner paréntesis en

$$x * y * z,$$

nos produce el mismo resultado: z. La tabla correspondiente es

$*$	0	1
0	0	1
1	0	1

.

6. Dualmente,

$*$	0	1
0	0	0
1	1	1

.

Hasta este momento hemos escrito 6 de las 8 operaciones asociativas que se pueden definir en $\{0,1\}$.

Ejercicio 1 *Encuentre las otras dos operaciones asociativas que se pueden definir en* $\{0,1\}$.

Para mostrar una operación que no es asociativa en el conjunto $\{0,1\}$, tomemos la tabla de la implicación, " $\Rightarrow$ ":

$\Rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

.

No es asociativa pues, $0 \Rightarrow (0 \Rightarrow 0) = 0 \Rightarrow 1 = 1$, pero $(0 \Longrightarrow 0) \Longrightarrow 0 = 1 \Longrightarrow 0 = 0$.

Definición 4 *Sea $*$ una operación asociativa en S.*

1. *$e \in S$ es un neutro izquierdo para $*$, si $e * x = x$, $\forall x \in S$.*

2. *$e \in S$ es un neutro derecho para $*$, si $x * e = x$, $\forall x \in S$.*

3. *$e \in S$ es un neutro para $*$, si e es un neutro izquierdo y derecho para $*$.*

Observación 1 *Si e es un neutro izquierdo para $*$ y f es un neutro derecho para la misma operación, entonces $e = f$.*

Demostración. $e = e * f = f$. La primera igualdad se da porque f es neutro derecho y la segunda porque e es neutro izquierdo. ■

Observación 2 *Si e, f son dos neutros izquierdos distintos para una operación $*$, entonces $*$ no tiene neutro.*

Ejemplo 4 *Un semigrupo con dos neutros izquierdos:*

$*$	*0*	*1*
0	*0*	*1*
1	*0*	*1*

.

Nótese que no hay neutro derecho.

1.1.2. Monoides con cancelación

Definición 5 *Una terna* $(M, *, e)$ *es un monoide si* $(M, *)$ *es un semigrupo y* e *es neutro para* $*$.

Definición 6 *Sea* $(M, *, e)$ *un monoide y supongamos que*

$$a * b = e, \quad a, b \in M,$$

diremos que a *es inverso por la izquierda de* b *y que* b *es inverso por la derecha de* a.

Observación 3 *Si* x *es inverso por la izquierda de* a *y* z *es inverso derecho de* a, $a \in M$, *entonces* $x = z$.

Demostración. $z = e * z = (x * a) * z = x * (a * z) = x * e = x$. ■

1. En un monoide el inverso de un elemento (si existe) es único.
2. Si x, z son inversos izquierdos de a, entonces a no tiene inverso derecho (y por lo tanto no tiene inverso).

Demostración. Se sigue inmediatamente de la Observación anterior. ■

Ejemplo 5 *Consideremos el monoide* $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \circ, Id_{\mathbb{N}}\right)$.
La función $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que* $\sigma(k) = k + 1$, *tiene inverso izquierdo porque es inyectiva, no tiene inverso derecho porque no es suprayectiva.*
La función

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & k & \longmapsto & \begin{cases} k-1 & si\ k > 0 \\ n & si\ k = 0 \end{cases} \end{array}$$

es un inverso izquierdo para σ, *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *La función* σ *tiene una infinidad de inversos izquierdos en el monoide* $\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \circ, Id_{\mathbb{N}}\right)$, *y claro, no puede tener inverso.* ■

Ejercicio 2 *Diga como se reflejan en una tabla de multiplicar los siguientes hechos:*

1. La operación es conmutativa (es decir $a * b = b * a$, para cada a y b).
2. El elemento a es cancelable por la izquierda.
3. El elemento a es cancelable por la derecha.
4. a tiene inverso por la derecha.
5. e es neutro izquierdo para la operación.

1.2. Grupos

Definición 7 *Un grupo es un monoide* $(M,*,e)$ *en el que cada elemento tiene inverso.*

Definición 8 *si la operación en un grupo* $(M,*,e)$ *es conmutativa, diremos que el grupo es conmutativa (o abeliano)*

Observación 4

1. *En un grupo cada elemento tiene un único inverso.*
2. *En un grupo* $a * x = e$ *implica que* a *es el inverso de* x *(y que* x *es el inverso de* a*).*

Demostración. Se sigue de la Observación 3. ■

Ejercicio 3 *Sea* X *un conjunto, denotemos* $Biy(X)$ *el conjunto de biyecciones de* X *a* X*. Demuestre que* $(Biy(X), \circ, Id_X)$ *es un grupo.*

Ejemplo 6 *Tomemos* $X = \{0,1,2\}$*. Hay* 6 *biyecciones en el conjunto anterior.*

$$\begin{array}{rcr} \{0,1,2\} & \xrightarrow{\Phi} & \{0,1,2\} \\ 0 & \longmapsto & 0 \\ 1 & \longmapsto & 2 \\ 2 & \longmapsto & 1 \end{array}$$

es una, y

$$\begin{array}{rcr} \{0,1,2\} & \xrightarrow{\Psi} & \{0,1,2\} \\ 0 & \longmapsto & 1 \\ 1 & \longmapsto & 2 \\ 2 & \longmapsto & 0 \end{array}$$

es otra.
Obsérvese que $\Phi \circ \Psi \neq \Psi \circ \Phi$.

Ejercicio 4 *Muestre que si* $|X| \geqslant 3$ *entonces* $(Biy(X), \circ, Id_X)$ *es un grupo no conmutativo.*

Recordemos que en un monoide M, un inverso izquierdo y un inverso derecho de $a \in M$ tienen que coincidir.

En particular, en un grupo $(G,*,e)$ el inverso de cada elemento es único, de hecho podemos demostrar lo siguiente:

Teorema 1 *En un grupo $(G, *, e)$ son equivalentes*

1. b es el inverso de a.

2. a es el inverso de b.

3. $a * b = e$.

4. $b * a = e$.

Demostración. 1) $\Leftrightarrow$ 2) b es el inverso de a

$$\Leftrightarrow ((a * b = e) \wedge (b * a = e)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((b * a = e) \wedge (a * b = e)) \Leftrightarrow$$

a es el inverso de b.

2) $\Rightarrow$ 3) Es claro.

3) $\Rightarrow$ 4) Por c), b es inverso derecho de a. Como G es un grupo, a tiene un inverso z (que es inverso por los dos lados). Entonces $b = z$ y así b es inverso izquierdo de a.

4) $\Rightarrow$ 1) Análogo al argumento de arriba. ■

Corolario 1 *En un grupo $(G, *, e)$ valen las siguientes afirmaciones:*
1) Denotemos por a^{-1} al inverso de a. La función $(\_)^{-1} : G \rightarrow G$ es inyectiva y suprayectiva (de hecho, es autoinversa).
2) $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.
3) $\left((x)^{-1}\right)^{-1} = x$.

Demostración. 1) Simplemente notemos que $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$ implica que a es el inverso de a^{-1}. Es decir, $\left((a)^{-1}\right)^{-1} = a$.

2) Se sigue de que $x * y * y^{-1} * x^{-1} = x * e * x^{-1} = e$.

3) Visto en 1). ■

Notación 1 *Es común que la operación para un grupo se denote con $+$, en este caso, el neutro se denota* 0, *y el inverso de a se denota $-a$, en lugar de a^{-1}.*

1.2.1. Subgrupos y restricción de funciones.

Definición 9 *Si $X \subseteq A$ se define la función inclusión*

$$\begin{array}{rccc} i_X^A : & X & \rightarrow & A \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

de esta manera podemos pensar la inclusión de un conjunto en otro como una función.

Definición 10 *Sea $X \subseteq A$ y sea $f : A \rightarrow B$ una función. En este caso podemos tomar la composición de i_X^A con f, es decir,*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ X \arrow[u, "i_X^A"] \arrow[ur, "f \circ i_A^X"'] & \end{tikzcd}$$

Llamaremos $f_{|X}$ a la composición $f \circ i_X^A$. $f_{|X}$ se llama la restricción de f a X.

Observación 5 *Si $*$ es una operación en S, y X es un subconjunto de S, entonces $X \times X$ es un subconjunto de $S \times S$ y entonces podemos considerar*

$$*_{|X \times X} : X \times X \rightarrow S$$

$$\begin{tikzcd} S \times S \arrow[r, "*"] & S \\ X \times X \arrow[u, "i_{X \times X}^{S \times S}"] \arrow[ur, "*_{|X \times X}"'] & \end{tikzcd}$$

Notemos que $*_{|X \times X} : X \times X \rightarrow S$ no es una operación en X, puesto que el codominio no es X.

Sin embargo, si nosotros tuviéramos que

$$\forall x, y \in X, x * y \in X,$$

podríamos tomar $*_{|X \times X} : X \times X \rightarrow X$.

En este caso diremos que X es un subconjunto de S cerrado bajo $*$.

Observación 6 *Sea $*$ operación en S, y sea X un subconjunto de S cerrado bajo $*$. Entonces:*

1. $*$ asociativa $\Rightarrow *_{|X\times X}$ es asociativa.

2. $*$ conmutativa $\Rightarrow *_{|X\times X}$ es conmutativa.

Definición 11 *Sea $(G,*,e)$ un grupo y S un subconjunto de G, diremos que S es un subgrupo de G si*

$$\left(S, *_{|S\times S}, f\right)$$

es un grupo.

Ejercicio 5 *Son equivalentes para un subconjunto S de G, con $(G,*,e)$ grupo:*

1. S es un subgrupo de G.

   a) S es cerrado bajo $*$.

   b) $e \in S$.

   c) $s \in S \Rightarrow s^{-1} \in S$.

Ejercicio 6 *Demuestre que*

1. La intersección de dos subgrupos de un grupo G es un subgrupo de G.

2. La intersección de una familia $\{H_\alpha\}_{\alpha\in X}$ de subgrupos de G es un subgrupo de G.

Ejercicio 7 *Si X es un subconjunto de un grupo G, entonces la intersección de la familia de subgrupos que contienen a X es el menor subgrupo que contiene a X. Se llama el subgrupo generado por X, y lo denotaremos $\langle X\rangle$.*

Ejemplos 7 *1. El subgrupo generado por el neutro de un grupo $(G,*,e)$ es $\{e\}$.*

   a*)* $\{e\}$ *es cerrado bajo* $*$.

   b*)* $e \in \{e\}$.

   c*)* $e^{-1} = e \in \{e\}$.
   Entonces $\{e\}$ es un subgrupo que contiene a e. Es claro que es el subgrupo que genera $\{e\}$ (no puede haber otro subgrupo más pequeño que contenga e).

2. El subgrupo de $(\mathbb{Z},+,0)$ generado por -2 es $2\mathbb{Z}$.

a) *$-2 \in 2\mathbb{Z}$.*

b) *$2\mathbb{Z}$ es cerrado bajo la suma.*

c) *$0 \in 2\mathbb{Z}$,*

d) *$-2k = 2(-k) \in 2\mathbb{Z}$.*
Entonces $2\mathbb{Z}$ es un subgrupo de $\mathbb{Z}$ que contiene a -2. Si H es un subgrupo de $\mathbb{Z}$ que contiene a -2, debe de contener también a $0-(-2)=2$, a $-2-2=-4$, a $0-(-4)=4$,..., a $2k$, a $0-2k=-2k$, a $-2k-2$, a $0-(-2k-2)=2(k+1)$,... Es decir, H debe contener a $2\mathbb{Z}$. Por lo tanto $2\mathbb{Z}$ es el menor subgrupo de $\mathbb{Z}$ que contiene a -2.

3. *El subgrupo de $\mathbb{Z}$ generado por n es $n\mathbb{Z}$.*
Es análogo al anterior.

4. *Todos los subgrupos de $\mathbb{Z}$ son de la forma $n\mathbb{Z}$, con $n \in \mathbb{N}$.*

a) *Un subgrupo H de $\mathbb{Z}$ tiene que contener por lo menos al neutro 0. Si $H = \{0\}$ entonces $H = 0\mathbb{Z}$.*

b) *Si $H \neq 0\mathbb{Z}$, tomemos un entero m distinto de 0 que pertenezca a H. Si $m < 0$, notemos que $0 - m = -m > 0$ es un elemento de H. Así que H contiene enteros positivos. Otra manera de decir esto es: $H \cap \mathbb{Z}^{+} \neq \varnothing$. Usemos el principio del buen orden para convencernos de que podemos tomar el menor entero positivo que pertenece a H. Entonces $n \in H$ y por lo tanto*

$$n\mathbb{Z} \subseteq H.$$

c) *Tomemos un elemento de H, x digamos, y apliquemos el algoritmo de la división a x y n:*

$$\begin{array}{rl} & \;\; q \\ n & \big\lceil\, x \\ & \;\; r \qquad 0 \leqslant r < n \end{array} ,$$

*como $x = qn + r$, entonces $r = x - qn = x + (-q)\,n \in H$. De aquí vemos que r **tiene** que ser 0, pues de nos ser así, r sería un elemento de H más pequeño que el más pequeño $\overset{\triangledown}{\circ}$). Como $r = 0$ entonces $x = qn \in nH$.*

5. *El subgrupo de $\mathbb{Z}$ generado por $\{n, m\}$ es*

$$n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \{nz_1 + mz_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\} = (n;m)\,\mathbb{Z}$$

donde $(n;m)$ denota el máximo común divisor de n y m.

a) *Primero convenzámonos de que* $\{nz_1 + mz_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\}$ *es un subgrupo de* $\mathbb{Z}$ *que contiene tanto a* n *como a* m. *(Es cerrado bajo la suma, contiene al* 0, *es cerrado bajo tomar inversos, y contiene a* n *y a* m.

b) *Supongamos ahora que* H *es un subgrupo de* $\mathbb{Z}$ *que contiene a* n, *y a* m. *Entonces también debe contener al subgrupo generado por* n, *es decir* $n\mathbb{Z} \subseteq H$. *Lo mismo puede decirse de* $m\mathbb{Z}$. *Como* H *es cerrado bajo la suma entonces* $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} \subseteq H$. *Por lo tanto,* $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}$ *es el subgrupo generado por* $\{n, m\}$.

c) *Ahora,* $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, *para algún natural* d. *Es fácil comprobar que es el máximo común divisor de* n *y* m.

6.

$$n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = [n; m]\,\mathbb{Z}$$

donde $[n; m]$ *en denota el mínimo común múltiplo de* n *y* m.

Teorema 2 *Si* $g \in G$, *entonces* $\langle g \rangle = \{g^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.[1]

Demostración. 1. $e = g^0 \in \{g^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$
2. $g^z * g^w = g^{z+w} \in \{g^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$, (ejercicio).
3. $(g^z)^{-1} = g^{-z} \in \{g^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$, (ejercicio).
Luego, $\{g^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo de G que contiene a $g = g^1$. Por lo tanto $\langle g \rangle \leqslant \{g^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

Por otra parte, se demuestra por inducción, que $g^z \in \langle g \rangle, \forall z \in \mathbb{Z}$. Esto nos da la igualdad entre $\{g^z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ y $\langle g \rangle$. ■

Observación 7 *Si* $X \subseteq G$, *entonces*

$$\langle X \rangle = \left\{a_1^{k_1} a_2^{k_2} a_3^{k_3} ... a_n^{k_n} \mid n \in \mathbb{N},\ a_i \in X, k_i \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Ejemplo 8 *Las simetrías del cuadrado son un subgrupo de* $Biy\{1, 2, 3, 4\}$.

Ejercicio 8 *Si* G *es un grupo, entonces*

[1] g^z se define de la manera siguiente:

1. $g^0 = e$, el neutro.
2. $g^{k+1} = g^k * g$
3. $g^{-k} = \left(g^{-1}\right)^k$ $k > 0$.

1. $\forall g \in G, \forall z, w \in \mathbb{Z},\ g^z * g^w = g^{z+w}$.

2. $\forall g \in G, \forall z \in \mathbb{Z},\ g^{-z} = (g^z)^{-1}$.

3. $\forall g \in G, \forall z, w \in \mathbb{Z},\ (g^z)^w = g^{zw}$.

Definición 12 *Sea V un conjunto de puntos en el plano euclidiano, una función $f : V \to V$ es una simetría de V si respeta las distancias entre puntos de V.*

Observación 8 *Sea V **finito,** como en la definición anterior, entonces una simetría de V es una biyección:*

Demostración. Si $x \neq y$ son elementos de V, entonces su distancia es distinta de 0, por lo tanto $d(f(x), f(y)) = d(x, y) \neq 0$. En particular, $x \neq y$. Por lo tanto f es inyectiva. Como f es inyectiva, y V es finito, entonces f es biyectiva. ■

Observación 9 *Si V es un subconjunto finito del plano, entonces*

$$\{f : V \to V \mid f \text{ es simetría}\}$$

es un subgrupo de $Biy(V)$.

Demostración. 1. La composición de dos simetrías es una simetría:
Supongamos que f, g son dos simetrías de V, y que $x, y \in V$. Entonces

$$dist\left((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)\right) = dist\left(g(f(x)), g(f(y))\right) =$$
$$= dist\left(f(x), f(y)\right) = dist(x, y).$$

2. La función identidad Id_V es una simetría.

3. Si f es una simetría, entonces f^{-1} también lo es:
sean $x,\ y \in V$, entonces $x = f(u),\ y = f(v)$ (recordemos que f es suprayectiva). Entonces

$$dist\left(f^{-1}(x), f^{-1}(y)\right) = dist\left(f^{-1}(f(u)), f^{-1}(f(v))\right) =$$
$$= dist(u, v) = dist(f(u), f(v)) = dist(x, y).$$

■

En particular, si $1, 2, 3, 4,$ son los vértices de un cuadrado, las simetrías del conjunto de vértices del cuadrado son los elementos de un subgrupo de $Biy\{1, 2, 3, 4\}$.

Contemos el número de simetrías del cuadrado: el número posible de imágenes de 1 es 4. La imagen del 3 queda determinada por la imagen de 1. 2 tiene que ir a dar a un vecino de la imagen de 1 (dos posibilidades). Esto ya determina la imagen de 4. En total hay $4 \times 2 = 8$ simetrías del cuadrado.

Observando la figura anterior, vemos que las 8 simetrías del cuadrado son 4 reflexiones (sobre los ejes de simetría) y 4 rotaciones (incluyendo la identidad).

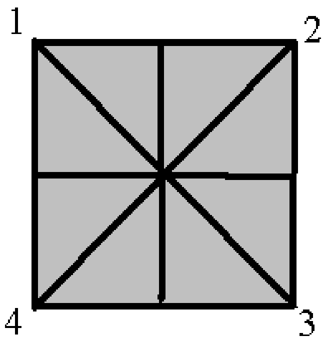


Figura 1.1:

1.3. Anillos

Definición 13 *Un anillo es una quinteta* $(R, +, *, 0, 1)$ *tal que:*

1. $(R, +, 0)$ es un grupo conmutativo.
2. $(R, *, 1)$ es un monoide.
3. $*$ se *distribuye* sobre $+$, por los dos lados, es decir que

$$r * (s + t) = (r * s) + (r * t)\,, \quad \forall r, s, t \in R.$$

y

$$(s + t) * r = (s * r) + (t * r)\,, \quad \forall r, s, t \in R.$$

Cuando en un anillo la operación $*$ es conmutativa, el anillo se llama *anillo conmutativo*.

Hay que notar que la suma en un anillo siempre es conmutativa.

Ejemplos 9 *1.* $(\mathbb{Z}, +.*, 0, 1)$ *es un anillo.*

2. $(\mathbb{Z}_n, +.*, 0, 1)$ *es un anillo.*

3. $(\mathbb{Q}, +.*, 0, 1)$ *es un anillo.*

4. $(\mathbb{R}, +.*, 0, 1)$ *es un anillo.*

Ejemplo 10 *Tomemos un conjunto X. Consideremos $\wp(X)$ definamos en $\wp(X)$ una suma de la manera siguiente: $A + B =: (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (esto se llama la diferencia simétrica de A y de B, y también se denota por $A\Delta B$).*
Definamos ahora el producto de A y de B como su intersección: $A \cap B$.

Proposición 1 *Veremos que $(\wp(X), +, \cap, \emptyset, X)$ es un anillo.*

Demostración. Lo único no trivial que hay que demostrar es que $+$ es asociativa (y que la intersección se distribuye sobre la suma).

Comparemos $A + (B + C)$ con $(A + B) + C = C + (A + B) = C + (B + A)$ (la suma es conmutativa). Veremos que $A + (B + C)$ es inalterado por el intercambio $A \longleftrightarrow C$ y con esto habremos terminado.

En efecto:

$$A + (B + C) = [A \cap B^c \cap C^c] \cup [A \cap C \cap B] \cup [B \cap C^c \cap A^c] \cup [C \cap B^c \cap A^c]$$

Notemos que los uniendos de enmedio son invariantes bajo el intercambio de A con C, mientras que los extremos se mapean uno en el otro, cuando uno intercambia A con C.

La siguiente es una verificación de la igualdad anterior.

$$\begin{gathered}
A + (B + C) = (A \backslash (B + C)) \cup ((B + C) \backslash A) = \\
= (A \cap [(B \backslash C) \cup (C \backslash B)]^c \cup ([(B \backslash C) \cup (C \backslash B)] \cap A^c) = \\
= (A \cap [(B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)]^c) \cup ([(B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)] \cap A^c) = \\
= (A \cap [(B \cap C^c)^c \cap (C \cap B^c)^c]) \cup [(B \cap C^c \cap A^c) \cup (C \cap B^c \cap A^c)] = \\
= (A \cap [(B^c \cup C) \cap (C^c \cup B)]) \cup [(B \cap C^c \cap A^c) \cup (C \cap B^c \cap A^c)] = \\
= ([(A \cap B^c) \cup (A \cap C)] \cap (C^c \cup B)) \cup [(B \cap C^c \cap A^c) \cup (C \cap B^c \cap A^c)] = \\
= [[(A \cap B^c) \cap (C^c \cup B)] \cup [(A \cap C) \cap (C^c \cup B]] \cup [(B \cap C^c \cap A^c) \cup (C \cap B^c \cap A^c)] = \\
= [[(A \cap B^c \cap C^c) \cup \emptyset] \cup [\emptyset \cup (A \cap C \cap B)]] \cup [(B \cap C^c \cap A^c) \cup (C \cap B^c \cap A^c)] = \\
= [(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap C \cap B)] \cup [(B \cap C^c \cap A^c) \cup (C \cap B^c \cap A^c)].
\end{gathered}$$

■

Ejercicio 9 *Complete los detalles de la demostración de que $(\wp(X), +, \cap, \emptyset, X)$ es un anillo.*

1.3.1. Producto de copias de un anillo.

Definición 14 *Sea $(R, +, *, 0, 1)$ un anillo y sea X un conjunto.*
R^X es el conjunto de las funciones de X a R.
Si tenemos dos elementos de R^X, f y g, podemos sumarlas por medio de la definición:

$$\left(f \tilde{+} g\right)(x) =: f(x) + g(x).$$

Del lado izquierdo de la ecuación anterior tenemos la suma que se está definiendo y del lado derecho la suma en el anillo R. Notemos que $\tilde{+}$ es una operación en R^X y que es conmutativa, asociativa con neutro: $\hat{0}$, la función constante y notemos también que la función f tiene inverso aditivo: $-f$. $-f$ calculada en x da $-f(x)$.
Definimos el producto en R^X, de manera similar:

$$(f \tilde{*} g)(x) =: f(x) * g(x).$$

Es una verificación rutinaria la de la asociatividad de $\tilde{*}$, y la distributividad de $\tilde{*}$ sobre $\tilde{+}$. El neutro del producto es la función constante $\hat{1}$.

Teorema 3 *Sea $(R, +, *, 0, 1)$ un anillo. Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

1. $\forall r \in R$, $0 * r = r * 0 = 0$.
2. $\forall r, s \in R$, $((r + s = 0) \Rightarrow (r = -s \wedge s = -r))$.
3. $\forall r \in R$, $(-1) * r = -r = r * (-1)$.
4. $\forall r, s \in R, [(-r) * s = -(r * s) = r * (-s)]$.
5. $(-r) * (-s) = r * s$.

Demostración. 1. $0 + (r * 0) = (r * 0) = r * (0 + 0) = r * 0 + r * 0$. Cancelamos $r * 0$, para obtener $r * 0 = 0$. Análogamente, obtenemos $0 * r = 0$.

2. Esta es una propiedad de los grupos.

3. $(-1) * r + r = (-1) * r + 1 * r = (-1 + 1) * r = 0 * r = 0$. Análogamente, $r * (-1) = -r$.

4. $r * s + (-r) * s = 0 * r = 0$.

Además .$r * (-s) + r * s = r * (-s + s) = r * 0 = 0$.

5. $(-r) * (-s) = -(r * (-s) = -(-(r * s))) = r * s$. ■

Definición 15 *Un anillo $(R, +, *, 0, 1)$ es un*

1. Anillo conmutativo si $*$ es conmutativa.
2. Dominio si $(R\backslash\{0\}, *, 1)$ es un monoide con cancelación..
3. Anillo con división si $(R\backslash\{0\}, *, 1)$ es un grupo.
4. Campo si $(R\backslash\{0\}, *, 1)$ es un grupo abeliano.

Observación 10 *Todo campo es un dominio pero hay dominios que no son campos.*

Demostración. Que un campo es un dominio, se sigue del hecho de que un grupo es un monoide con cancelación.

Por otra parte $(\mathbb{Z}, +, *, 0, 1)$ es un dominio que no es campo. ■

Definición 16 *Una unidad en un anillo R es un elemento con inverso multiplicativo. El conjunto de las unidades para un anillo R, lo denotaremos $R^{\times}$.*

Ejemplo 11 *Consideremos el anillo de los enteros módulo n, $\mathbb{Z}_n$. Entonces*

$$\mathbb{Z}_n^{\times} = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}_n \mid (a;n) = 1\}.$$

En efecto: Si $(a;n) = 1$, entonces hay una combinación entera de a y de n, $az+nw = 1$. De aquí es claro que $\overline{az} = \bar{1}$, por lo que $\bar{z}$ es el inverso multiplicativo de $\bar{a}$.
Recíprocamente, si $\bar{a}$ tiene inverso multiplicativo $\bar{z}$, entonces $\overline{az} = \bar{1}$. Esto equivale a $az \overset{n}{\equiv} 1$, es decir que $n \mid (az-1)$, que se puede expresar como: $\exists w \in \mathbb{Z}$tal que $nw = az - 1$, o sea que

$$1 = az - nw.$$

De aquí vemos que $(a;n) = 1$. ■

Corolario 2 *$\mathbb{Z}_n$ es un campo $\Leftrightarrow$ n es un primo.*

Demostración.

$$\mathbb{Z}_n \text{ es un campo} \Leftrightarrow$$
$$\mathbb{Z}_n\backslash\{\bar{0}\} = \mathbb{Z}_n^{\times} = \{\bar{a} \mid (a;n) = 1\} \Leftrightarrow$$
$$\left\{\bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{n-1}\right\} = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}_n \mid (a;n) = 1\} \Leftrightarrow$$
$$[(k;n) = 1, \forall k \in \mathbb{Z}, \text{ tal que } 1 \leqslant k < n] \;\Leftrightarrow n \text{ es primo.}$$

■

Ejercicio 10 *Demostrar la unicidad de q y de r en el Ejemplo 4*c.

Ejercicio 11 *Una máquina acepta palabras de ocho letras (definidas como sucesiones de ocho letras del alfabeto, inclusive si no tiene significado) e imprime una palabra de ocho letras consistente de las primeras* 5 *letras de la primera palabra seguida de las últimas tres letras de la segunda palabra. Demuestre que el conjunto de las palabras de ocho letras con esta regla de multiplicación es un semigrupo. ¿Sería éste el caso si la máquina imprime las cuatro primeras letras de la primera palabra seguidas de las cuatro últimas de la segunda palabra? ¿Alguno de estos dos sistemas tiene neutro?*

Ejercicio 12 *Sea* $(M, *, 1)$ *un monoide y sea* $m \in M$. *Defínase un nuevo producto* $*_m$ *por* $a *_m b = a * m * b$. *Demuestre que esto define un semigrupo, ¿bajo que condiciones hay neutro?*

Ejercicio 13 *Sea* S *un semigrupo,* u *un objeto que no pertenece a* S. *Tómese* $M = S \cup \{u\}$ *y extendamos el producto en* S *a un producto binario en* M *definiendo* $ua = a = au \ \forall a \in M$. *Demuéstrese que* $(M, *, u)$ *es un monoide.*

Ejercicio 14 *Sea* G *un conjunto finito con una operación binaria* $*$ *y un neutro* e. *Demuéstrese que* G *es un grupo* $\Leftrightarrow$ *su tabla de multiplicar tiene las siguientes propiedades:*

1. *Todo renglón y columna de la tabla contiene cada elemento de* G.
2. *Para cada par de elementos* x, y *de* $G \setminus \{e\}$ *sea* R *un rectángulo en el cuerpo de la tabla que tiene* e *en uno de sus vértices,* x *un vértice en el mismo renglón que* e *y* y *un vértice en la misma columna que* e, *entonces el cuarto vértice depende sólo de la pareja* (x, y) *y no de la posición de* e.

Ejercicio 15 *Encuentre los inversos multiplicativos de* 2, 8, 11, 13, 15 *en* $\mathbb{Z}_{17} \setminus \{\bar{0}\}$ *y en* $\mathbb{Z}_{53} \setminus \{\bar{0}\}$.

Ejercicio 16 *Muestre que si la suma y la multiplicación en un anillo*

$$(R, +, *, 0, 1)$$

son conmutativas, entonces una distributividad implica la otra.

Ejercicio 17 *Mostrar que en un anillo* R, $r * 0 = 0 = 0 * r, \forall r \in R$.

Ejercicio 18 *Suponga que en un anillo* $(R, +, *, 0, 1)$, $0 = 1$. *¿Cuántos elementos tiene* R*? Escriba las tablas de sumar y de multiplicar.*

Ejercicio 19 *¿Qué pasaría si en un anillo además se tuviera que la suma se distribuyera sobre el producto? ¿Puede pasar esto? ¿Cómo sería R?*

Ejercicio 20 *¿Por qué un campo debe tener por lo menos dos elementos?*

Ejercicio 21 *Considere el conjunto*

$$\left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$$

súmense y multiplíquense como reales. ¿Es esto un campo? ¿Quién es el recíproco de un elemento $a + b\sqrt{2} \neq 0$*?*

Ejercicio 22 *Considere el conjunto* $\left\{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ *súmense y multiplíquense como complejos. ¿Es esto un anillo? ¿Quiénes son los elementos con recíproco?*

Ejercicio 23 *Compruebe la regla de los signos en un anillo:*

1. $(-a)(b) = -(ab)$.
2. $(a)(-b) = -(ab)$.
3. $(-a)(-b) = ab$.

Ejercicio 24 *Tomemos el anillo* $(\wp(\mathbb{N}), +, \cap, \emptyset, \mathbb{N})$, *resuelva las ecuaciones:*

1. $X + 2\mathbb{N} = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$.
2. $X + \{0, 1, 2, 9\} = \{0, 3\}$.
3. $X \cap Y = \mathbb{N}$.
4. $X \cap (Y + X) = \emptyset$. *(Aquí, "resolver" quiere decir, encontrar todas las soluciones).*

Capítulo 2

Espacios vectoriales

2.1. Espacios vectoriales y subespacios

Definición 17 *Un espacio vectorial es una quinteta* $(V, \tilde{+}, \bar{0}, F, \cdot : F \times V \to V)$ *tal que:*

1. $\left(V, \tilde{+}, \vec{0}\right)$ *es un grupo abeliano.*
2. $\cdot : F \times V \to V$ *satisface:*
   a) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$, $\forall \vec{v} \in V$.
   b) $(cd) \cdot \vec{v} = c \cdot (d \cdot \vec{v})$, $\forall c, d \in F, \forall \vec{v} \in V$.
   c) $(c + d) \cdot \vec{v} = c\vec{v} \tilde{+} d\vec{v}$, $\forall c,\ d \in F$, $\forall \vec{v} \in V$.
   d) $c \cdot \left(\vec{v} \tilde{+} \vec{w}\right) = c \cdot \vec{v} \tilde{+} c \cdot \vec{w}, \forall c \in F$, $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$.

Los elementos de V se llaman vectores, los de F se llaman escalares, y cuando sea claro como se definieron las operaciones, escribiremos ${}_F V$ en lugar de toda la quinteta ordenada. ${}_F V$ se lee: V es un espacio vectorial sobre el campo F.

Ejemplo 12 $(\mathbb{R}[x], +, \bar{0}, \mathbb{R}, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R})$ *es un espacio vectorial..*

Ejemplo 13 $\left(\mathbb{R}^n, \tilde{+}, \vec{0}, \mathbb{R}, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\right)$ *es un espacio vectorial, con las operaciones definidas de la manera siguiente:*

1. $(a_1, a_2, ..., a_n) \tilde{+} (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$.
2. $c \cdot (a_1, a_2, ..., a_n) = (ca_1, ca_2, ..., ca_n)$.

Teorema 4 *Si V es un espacio vectorial sobre F, entonces*

1. $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$, $\forall \vec{v} \in V$.
2. $a \cdot \vec{0} = \vec{0}$, $\forall a \in F$.
3. $(-1)\,\vec{v} = -\vec{v}$, $\forall \vec{v} \in V$.

Demostración. 1. $\vec{0}\tilde{+}(0 \cdot \vec{v}) = 0 \cdot \vec{v} = (0+0) \cdot \vec{v} = 0 \cdot \vec{v}\tilde{+}0 \cdot \vec{v}$. Cancelando $0 \cdot \vec{v}$, obtenemos $\vec{0} = 0 \cdot \vec{v}$.

2. Sea $a \in F$, entonces $\vec{0}\tilde{+}\left(a \cdot \vec{0}\right) = a \cdot \vec{0} = a \cdot \left(\vec{0}\tilde{+}\vec{0}\right) = a \cdot \vec{0}\tilde{+}a \cdot \vec{0}$. Cancelando $a \cdot \vec{0}$, obtenemos: $\vec{0} = a \cdot \vec{0}$.

3. $1 \cdot \vec{v}\tilde{+}(-1) \cdot \vec{v} = (1 + (-1)) \cdot \vec{v} = 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$. De aquí que $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$. ■

Ejemplo 14 *Sea F un campo y sea X un conjunto. Entonces*

$$F^X = \{f : X \to F \mid f \text{ es una función}\}.$$

Se define la suma de funciones de la manera usual, y el producto de un elemento de F por una función también de la manera usual:

1. $f\tilde{+}g : X \to F$ *es la función tal que* $\left(f\tilde{+}g\right)(x) = f(x) + g(x)$.
2. $c \cdot f : X \to F$ *es la función tal que* $(c \cdot f)(x) = c(f(x))$.

Entonces:

$$\left(F^X, \tilde{+}, \hat{0}, F, \cdot : F \times F^X \to F^X\right)$$

es un espacio vectorial.

Demostración. Que $\left(F^X, \tilde{+}, \hat{0},\right)$ es un grupo conmutativo, se deja como ejercicio.

Propiedades del producto por escalares:

1. $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x), \forall x \in X$. Por lo tanto las funciones $1 \cdot f$ y f coinciden.

2. $[(cd) \cdot f](x) = (cd) \cdot f(x) = c(df(x)) = c((df)(x)) = (c \cdot (d \cdot f))(x)$, $\forall x \in X$, por lo que las funciones $[(cd) \cdot f]$ y $(c \cdot (d \cdot f))$ coinciden.

3. $[(c+d)(f)](x) = (c+d)(f(x)) = cf(x) + df(x) =$

$$= (cf)(x) + (df)(x) = (cf + df)(x), \forall x \in X.$$

Por lo tanto, $(c+d)(f) = (cf + df)$.

4. $\left[c \cdot \left(f\tilde{+}g\right)\right](x) = c\left[\left(f\tilde{+}g\right)(x)\right] = c[f(x) + g(x)] =$

$$= c(f(x)) + c(g(x)) = (c \cdot f)(x) + (c \cdot g)(x) = \left(c \cdot f\tilde{+}c \cdot g\right)(x), \forall s \in X.$$

Por lo tanto $c \cdot \left(f\tilde{+}g\right) = c \cdot f\tilde{+}c \cdot g$. ■

Observación 11 *Tomemos un campo F y tomemos*

$$X = \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., m\},$$

un elemento A en F^X se llama una matriz de $n \times m$ con coeficientes en F.

Por costumbre, uno escribe $A_{i,j}$ en lugar de escribir $A(i, j)$.

También por costumbre, uno suele escribir una matriz A en la forma de un arreglo rectangular:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \cdots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \cdots & A_{2,m} \\ \vdots & & & & \\ A_{n,1} & A_{n,2} & A_{n,3} & & A_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Ejemplos 15 *De acuerdo a las definiciones:*

1. $(A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j} \forall (i, j) \in \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., m\}$.
2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 13 \\ 15 & 12 & 12 \end{pmatrix}$.
3. $(cA)_{i,j} = cA_{i,j}\ \forall (i, j) \in \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., m\}$.
4. $2\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}$.

Definición 18 *Sea $\left(V, \tilde{+}, \hat{0}, F. \cdot : F \times V \to V\right)$ un espacio vectorial, y sea $W \subseteq V$. Diremos que W es un subespacio vectorial de V si*

$$\left(W, \tilde{+}_{|W \times W}, \vec{0}, F, \cdot_{|F \times W} : F \times W \to W\right)$$

es un espacio vectorial. Cuando esto pase, escribiremos $W \leqslant\ _F V$.

Proposición 2 $W \leqslant\ _F V \Leftrightarrow \begin{cases} \textit{i) } W \textit{ es cerrada bajo } \tilde{+} \\ \textit{ii) } \vec{0} \in W. \\ \textit{iii) } \forall a \in F, \forall \vec{w} \in W,\ a \cdot \vec{w} \in W. \end{cases}$

Demostración. $\Rightarrow$)

i) Que $\tilde{+}_{|W \times W}$sea una operación en W significa que $\tilde{+}_{|W \times W} : W \times W \to W$, es decir, que sumando dos elementos de W se obtiene un elemento de W. Esto es lo mismo que decir que W es cerrado bajo $\tilde{+}$.

ii) El neutro de $\tilde{+}_{|W\times W}$debe coincidir con el neutro de $\tilde{+}$ que es $\vec{0}$. Por lo tanto $\vec{0}\in W$.

iii) Que $\cdot_{|F\times W}: F\times W\to W$ es una función con dominio $F\times W$ y codominio W significa exactamente lo mismo que

$$\forall a\in F,\forall\vec{w}\in W,\ a\cdot\vec{w}\in W.$$

$\Leftarrow$)

Supongamos que se cumplen i), ii) y iii).

Por el inciso i), tenemos que $\tilde{+}_{|W\times W}$ es una operación en W.

Por herencia, $\tilde{+}_{|W\times W}$es asociativa y conmutativa.

Lo anterior, junto con ii), nos dicen que $\left(W,\tilde{+}_{|W\times W},\vec{0}\right)$ es un monoide.

Ahora, de la condición iii) y del Teorema 4 tenemos que $-\vec{w}=(-1)\cdot\vec{w}\in W$, $\forall\vec{w}\in W$. Concluímos que $\left(W,\tilde{+}_{|W\times W},\vec{0}\right)$ es un grupo conmutativo Es una cuestión sencilla comprobar que el producto $\cdot_{|F\times W}: F\times W\to W$ satisface las propiedades pedidas a un producto por escalares. Así que $\left(W,\tilde{+}_{|W\times W},\vec{0},F,\cdot_{|F\times W}\right)$ es un espacio vectorial.[1] ■

Ejemplo 16 $\mathcal{C}(\mathbb{R})=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f$ *es continua*$\}$ *es un subespacio de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$*:*

1. *La suma de dos funciones continuas es continua.*
2. *La función constante* $\hat{0}$ *es continua.*
3. *El producto de un escalar por una función continua es continua.*

Recordemos que $F^{(X)}=\{f:X\to F\mid \operatorname{sop}(f)\text{ es finito}\}$. Aquí hay que recordar también que

$$\operatorname{sop}(f)=\{x\in\operatorname{Dom}(f)\mid f(x)\neq 0\}.$$

Entonces

Ejemplo 17 $F^{(X)}\leqslant F^X$ *pues:*

1. *La suma de dos funciones* $f,\ g\in F^X$ *, de soporte finito es de soporte finito, puesto que* $sop\big(f\tilde{+}g\big)\subseteq sop(f)\cup sop(g)$*. (La unión de dos conjuntos finitos es finita, y un subconjunto de un conjunto finito es finito).*

[1] Por ejemplo, $(cd)\cdot\vec{w}=c\cdot(d\cdot\vec{w})$ para cualesquiera escalares c,d y cualquier $\vec{w}\in W$, porque lo anterior se cumple para cualquier vector en V.

2. *La función constante $\hat{0}$ tiene soporte $\emptyset$, que es finito.*

3. *Si c es un escalar y f es una función de soporte finito, entonces $c \cdot f$ tiene soporte finito ya que sop$(c \cdot f) \subseteq$ sop(f) $((cf)(x) \neq 0 \Rightarrow c(f(x)) \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0)$.*

Definición 19 *Si $A \in M_{n\times m}(F)$, su transpuesta es la matriz $A^t \in M_{m\times n}(F)$ tal que $A^t_{i,j} = A_{j,i}$.*

Definición 20 *Decimos que una matriz $A \in M_{n\times n}(F)$ es simétrica si $A = A^t$.*

Ejemplo 18 *Denotemos por $\mathbb{S}_n = \{A \in M_{n\times n}(F) \mid A$ es simétrica$\}$. Entonces $\mathbb{S}_n \leqslant M_{n\times n}(F)$.*

Demostración. 1. Supongamos que A, B son matrices simétricas. Entonces $(A+B)^t_{j,i} = (A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j} = A^t_{i,j} + B^t_{i,j} = A_{j,i} + B_{j,i} = (A+B)_{j,i}$. Por lo tanto $(A+B)^t = A+B$, es decir, $A+B$ también es simétrica.

2. La matriz de ceros es simétrica: $\mathbb{O}_{j,i} = 0 = \mathbb{O}_{i,j}$.

3. Si A es simétrica y c es un escalar, entonces

$$(cA)_{i,j} = cA_{i,j} = cA_{j,i} = (cA)_{j,i} = (cA)^t_{i,j}.$$

■

Ejemplo 19 *Denotemos por $\mathbb{T}_n = \{A \in M_{n\times n}(F) \mid A_{i,j} = 0$ si $i > j\}$, .(el conjunto de las matrices triangulares superiores). Entonces $\mathbb{T}_n \leqslant M_{n\times n}(F)$.*

1. *Supongamos que A, B son matrices triangulares superiores y sea $i > j$. Entonces $(A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j} = 0 + 0 = 0$. Por lo tanto $A+B$ es una matriz triangular superior.*

2. *La matriz de ceros es triangular superior:: $\mathbb{O}_{i,j} = 0$ si $i \geq j$.*

3. *Si A es triangular superior, c es un escalar, e $i > j$ entonces $(cA)_{i,j} = cA_{i,j} = c0 = 0$.*

2.2. El subespacio generado por un conjunto

Teorema 5 *Si $\{W_\alpha\}_{\alpha\in X}$ es una familia de subespacios vectoriales del espacio ${}_FV$, entonces $\cap\{W_\alpha\}_{\alpha\in X}$ también es un subespacio de V.*

Demostración. 1. Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \cap \{W_\alpha\}_{\alpha \in X}$, entonces $\vec{x}, \vec{y} \in W_\alpha$, $\forall \alpha \in X$. Como cada W_α es cerrada bajo la suma, entonces $\vec{x} + \vec{y} \in W_\alpha$, $\forall \alpha \in X$. Por lo tanto $\vec{x} + \vec{y} \in \cap \{W_\alpha\}_{\alpha \in X}$.

2. $\vec{0} \in W_\alpha$, $\forall \alpha \in X$, por lo tanto $\vec{0} \in \cap \{W_\alpha\}_{\alpha \in X}$.

3. $r \in F$, $\vec{x} \in \cap \{W_\alpha\}_{\alpha \in X} \Rightarrow r \in F$, $\vec{x} \in W_\alpha$, $\forall \alpha \in X \Rightarrow r\vec{x} \in W_\alpha$, $\forall \alpha \in X \Rightarrow r\vec{x} \in \cap \{W_\alpha\}_{\alpha \in X}$. ■

Definición 21 *Sean ${}_FV$ un espacio vectorial y X un subconjunto de V, definimos*

$$\mathfrak{L}(X) = \cap \{W \leqslant V \mid X \subseteq W\}.$$

$\mathfrak{L}(X)$ se llama el subespacio de V generado por X, debido a que es el menor subespacio de V que incluye a X.

Teorema 6 *$\mathfrak{L}(X)$ es el menor subespacio de V que incluye a X.*

Demostración. Como $\mathfrak{L}(X) = \cap \{W \leqslant V \mid X \subseteq W\}$ es una intersección de subespacios de V, entonces $\mathfrak{L}(X)$ también lo es, de acuerdo con el Teorema 5.

Por otra parte, si W es un subespacio de V que incluye a X, entonces pertenece a la familia de subespacios que estamos intersectando al definir $\mathfrak{L}(X)$. Por lo tanto $\mathfrak{L}(X) \leqslant W$. ■

Ejemplo 20 *Sea ${}_FV$ y $\vec{v} \in V$. Entonces*

$$\mathfrak{L}(\{\vec{v}\}) = \{c \cdot \vec{v} \mid c \in F\} =: F\vec{v}.$$

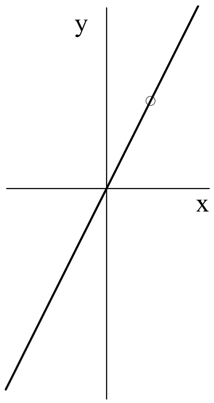
Demostración. $\subseteq$) $\{c \cdot \vec{v} \mid c \in F\} =: F\vec{v}$ es un subespacio de V que contiene a $\vec{v}$:

1. $c\vec{v} + d\vec{v} = (c + d)\vec{v} \in F\vec{v}$. Por lo que $F\vec{v}$ es cerrado bajo la suma.
2. $\vec{0} = 0\vec{v} \in F\vec{v}$.
3. $c \in F, k\vec{v} \Rightarrow c(k\vec{v}) = (ck)\vec{v} \in F\vec{v}$.
4. $\vec{v} = 1\vec{v} \in F\vec{v}$.

Como $F\vec{v}$ es un subespacio vectorial que contiene a $\vec{v}$, debe entonces ser mayor o igual que el menor subespacio que tiene la propiedad, es decir que $\mathfrak{L}(\{\vec{v}\}) \subseteq F\vec{v}$.

$\supseteq$) Por otra parte, como $\vec{v} \in \mathfrak{L}(\{\vec{v}\}) \leqslant V$, cada múltiplo escalar de $\vec{v}$ debe estar en $\mathfrak{L}(\{\vec{v}\})$, es decir, $F\vec{v} \subseteq \mathfrak{L}(\{\vec{v}\})$. ■

Ejemplo 21 $\mathfrak{L}\left(\{(1,2)\}\right) = \{(k, 2k) \mid k \in \mathbb{R}\} \leqslant \mathbb{R}^2$.



Observación 12 $W \leqslant V \Leftrightarrow W = \mathfrak{L}(W)$.

Demostración. $\Leftarrow$) Obvio.
$\Rightarrow$)
Como $W \subseteq W \leqslant V$, entonces $\mathfrak{L}(W) \leqslant W$.
Por definición, un conjunto siempre está incluído en el subespacio que genera. Por lo tanto, $W \subseteq \mathfrak{L}(W)$. ■

Definición 22 *Si* $W_1, W_2 \leqslant V$, $W_1 + W_2 =: \mathfrak{L}(W_1 \cup W_2)$.

Proposición 3 *Si* $W_1, W_2 \leqslant V$, *entonces*
$W_1 + W_2 = \{\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \mid \vec{w}_1 \in W_1,\ \vec{w}_2 \in W_2\}$.

Demostración. Denotemos con S al conjunto

$$\{\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \mid \vec{w}_1 \in W_1, \vec{w}_2 \in W_2\}.$$

Este conjunto es un subespacio de V, que incluye tanto a W_1 como a W_2:
En efecto:
1. Supongamos que $\vec{w}_1,\ \vec{u}_1 \in W_1$ y que $\vec{w}_2,\ \vec{u}_2 \in W_2$, entonces $(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) + (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = (\vec{w}_1 + \vec{u}_1) + (\vec{w}_2 + \vec{u}_2) \in S$.
2. $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} \in S$.
3. $c \cdot (\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = c\vec{w}_1 + c\vec{w}_2 \in S$.

4. $\forall \vec{w} \in W_1$, $\vec{w} = \vec{w} + \vec{0} \in S$. Por lo tanto $W_1 \subseteq S$.
5. $\forall \vec{w} \in W_2$, $\vec{w} = \vec{0} + \vec{w} \in S$. Por lo tanto $W_2 \subseteq S$.

Entonces S es un subespacio de V que incluye a $W_1 \cup W_2$. Por lo tanto

$$\mathfrak{L}(W_1 \cup W_2) \leqslant S.$$

Por otra parte, $\forall \vec{w}_1 \in W_1, \vec{w}_2 \in W_2$, tenemos que ambos elementos pertenecen a $W_1 \cup W_2$, así que $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathfrak{L}(W_1 \cup W_2)$. Por lo tanto $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in \mathfrak{L}(W_1 \cup W_2)$.

Entonces

$$S \subseteq \mathfrak{L}(W_1 \cup W_2).$$

■

Teorema 7 *Si* $X \subseteq {}_FV$ *y* $X \neq \emptyset$ *entonces*

$$\mathfrak{L}(X) = \{\alpha_1\vec{x}_1 + ... + \alpha_n\vec{x} \mid n \in \mathbb{N}, \vec{x}_i \in X, \alpha_i \in F\}.$$

Demostración. Denotemos con $\langle X \rangle$ al conjunto

$$\{\alpha_1\vec{x}_1 + ... + \alpha_n\vec{x} \mid n \in \mathbb{N}, \vec{x}_i \in X, \alpha_i \in F\}.$$

Es claro que $\langle X \rangle$ es cerrado bajo la suma, que contiene a $\vec{0}$ y que es cerrado bajo multiplicación por escalares. Entonces es un subespacio que incluye a X. Por lo tanto $\mathfrak{L}(X) \subseteq \langle X \rangle$

Por otra parte, dados cualesquiera vectores

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, ..., \vec{x}_n \in X$$

y escalares

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n,$$

entonces, como $X \subseteq \mathfrak{L}(X)$, tenemos que

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, ..., \vec{x}_n \in \mathfrak{L}(X),$$

que como es un subespacio, también contiene a los múltiplos

$$a_1\vec{x}_1, a_2\vec{x}_2, a_3\vec{x}_3, ..., a_n\vec{x}_n \text{ de } \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, ..., \vec{x}_n,$$

respectivamente. Como $\mathfrak{L}(X)$ es un subespacio, entonces

$$a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + a_3\vec{x}_3 + ... + a_n\vec{x}_n \in \mathfrak{L}(X),$$

$$\forall a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in F, \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, ..., \vec{x}_n \in X.$$

Por lo tanto $\langle X \rangle \subseteq \mathfrak{L}(X)$. ■

Definición 23 *Dada $\{W_\alpha\}_{\alpha\in X}$ una familia de subespacios de ${}_FV$, definimos*

$$\sum \{W_\alpha\}_{\alpha\in X} =: \mathfrak{L}\left(\cup \{W_\alpha\}_{\alpha\in X}\right).$$

Es decir, la suma de una familia de subespacios es el subespacio de ${}_FV$ generado por la unión de la familia de subespacios.

Teorema 8 *$\sum \{W_\alpha\}_{\alpha\in X}$ es el menor subespacio de V que incluye cada W_α.*

Demostración. Primero notemos que

$$W_\beta \subseteq \cup \{W_\alpha\}_{\alpha\in X} \subseteq \mathfrak{L}\left(\cup \{W_\alpha\}_{\alpha\in X}\right) =: \sum \{W_\alpha\}_{\alpha\in X}.$$

Ahora, si $W_\beta \subseteq Z \leqslant V$, $\forall \beta \in X$, entonces $\cup \{W_\alpha\}_{\alpha\in X} \subseteq Z$, por lo que

$$\mathfrak{L}\left(\cup \{W_\alpha\}_{\alpha\in X}\right) \leqslant Z.$$

De lo anterior, vemos que $\mathfrak{L}\left(\cup \{W_\alpha\}_{\alpha\in X}\right) = \sum \{W_\alpha\}_{\alpha\in X}$ es el menor subespacio que incluye a cada W_α. ■

Observación 13 $X \subseteq Y \subseteq V \Rightarrow \mathfrak{L}(X) \subseteq \mathfrak{L}(Y)$.

Demostración. $\mathfrak{L}(X)$ es el menor subespacio que incluye a X y por otra parte, $X \subseteq Y \subseteq \mathfrak{L}(Y) \leqslant V$. ■

Proposición 4 *Para cada $X, Y \subseteq V$, se tiene que*

$$\mathfrak{L}(X \cup Y) = \mathfrak{L}(X) + \mathfrak{L}(Y) = \mathfrak{L}(\mathfrak{L}(X) \cup \mathfrak{L}(Y)).$$

Demostración. $\mathfrak{L}(X) + \mathfrak{L}(Y) = \mathfrak{L}(\mathfrak{L}(X) \cup \mathfrak{L}(Y))$, es cierta, por definición. Ahora,

$$X \cup Y \subseteq \mathfrak{L}(X) \cup \mathfrak{L}(Y) \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{L}(X) \cup \mathfrak{L}(Y)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathfrak{L}(X \cup Y) \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{L}(X) \cup \mathfrak{L}(Y)).$$

Por otra parte, $X \subseteq X \cup Y \Rightarrow \mathfrak{L}(X) \subseteq \mathfrak{L}(X \cup Y)$. Análogamente, $\mathfrak{L}(Y) \subseteq \mathfrak{L}(X \cup Y)$. Por lo tanto, $\mathfrak{L}(X) \cup \mathfrak{L}(Y) \subseteq \mathfrak{L}(X \cup Y)$, así que

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{L}(X) \cup \mathfrak{L}(Y)) \subseteq \mathfrak{L}(X \cup Y).$$

■

De la proposición anterior basta recordar que $\mathfrak{L}(X \cup Y) = \mathfrak{L}(X) + \mathfrak{L}(Y)$.

Teorema 9 (Ley Modular) *Si X, Y, Z son subespacios de ${}_FV$ tales que*

$$X \leqslant Y,$$

entonces

$$Y \cap (X + Z) = X + (Y \cap Z).$$

Demostración. $\supseteq$) $X, (Y \cap Z) \subseteq Y$, también $X, (Y \cap Z) \subseteq (X + Z)$. Por lo tanto

$$[X + (Y \cap Z) \subseteq Y] \wedge [X + (Y \cap Z) \subseteq (X + Z)].$$

Entonces

$$X + (Y \cap Z) \subseteq Y \cap (X + Z).$$

$\subseteq$) Sea $\vec{y} \in Y \cap (X + Z)$, entonces $\vec{y} = \vec{x} + \vec{z}$, con $\vec{x} \in X$, $\vec{z} \in Z$. Basta demostrar que $\vec{z} \in Y \cap Z$. Pero $\vec{z} = \vec{y} - \vec{x} \in Y + X = Y$ (ya que $X \leqslant Y$), además $\vec{z} \in Z$. ■

Definición 24 *Sean $W_1, W_2 \leqslant V$, se dice que V es la suma directa de W_1 y W_2 si:*

1. $W_1 \cap W_2 = \left\{\vec{0}\right\}$ *y*
2. $W_1 + W_2 = V$.

En esta situación, escribiremos $V = W_1 \bigoplus W_2$.
Cuando $W_1 \cap W_2 = \left\{\vec{0}\right\}$. escribiremos $W_1 + W_2 = W_1 \bigoplus W_2$.

Teorema 10 *Son equivalentes para $W, K \leqslant V$:*

1. $V = W \bigoplus K$.
2. *$K \leqslant V$ y es máximo con la propiedad de que $W \cap K = \left\{\vec{0}\right\}$.*
3. *$K \leqslant V$ y es mínimo con la propiedad de que $W + K = V$.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Es claro que $W \cap K = \left\{\vec{0}\right\}$. Veamos que K es máximo con esta propiedad:

$K \lneqq K' \leqslant V \Rightarrow K' \cap (K + W) = K + (K' \cap W)$ (por la Ley modular). Por otra parte, $K' \cap (K + W) = K' \cap V = K'$. Por lo tanto $K' = K' \cap (K + W) = K + (K' \cap W)$. Así que $(K' \cap W) \neq \left\{\vec{0}\right\}$, pues de otra forma $K' = K$.

En resumen: $K \lneqq K' \leqslant V \Rightarrow (K' \cap W) \neq \left\{\vec{0}\right\}$.

1) $\Rightarrow$ 3) Resta demostrar que K es mínimo con la propiedad de que $K+W=V$:

Supongamos que $K' \lneqq K \leqslant V$. Entonces $K\cap(K'+W) = K'+(K\cap W) = K'+\left\{\vec{0}\right\} = K'$. Entonces $K'+W\neq V$, ya que en caso contrario, $K=K'$.

2) $\Rightarrow$ 1) Basta demostrar que $W+K=V$. Supongamos que $W+K\subsetneqq V$. Entonces $\exists\vec{x}\in V\setminus(W+K)$. Así que $K\lneqq K+\mathfrak{L}(\{\vec{x}\})$. Ahora, $\vec{w}\in W\cap(K+\mathfrak{L}(\{\vec{x}\}))\Rightarrow \vec{w}\in W\wedge\vec{w}=\vec{k}+\alpha\vec{x}$, para alguna $\alpha\in F$ (note que $\alpha\neq 0$ implica que $\vec{x}\in W+K$, $\overset{\nabla}{\circ}$) por lo tanto $\vec{w}=\vec{k}\in W\cap K=\left\{\vec{0}\right\}$. Es decir, $W\cap(K+\mathfrak{L}(\{\vec{x}\}))=\left\{\vec{0}\right\}$, contradiciendo que K es máximo con esta propiedad.. Por lo tanto, $W+K=V$ y así $W\bigoplus K=V$.

3) $\Rightarrow$ 1) Ejercicio. ■

Ejemplo 22 *En $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sean*

$$\mathcal{P}(\mathbb{R})=\left\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\mid f(x)=f(-x)\right\},$$

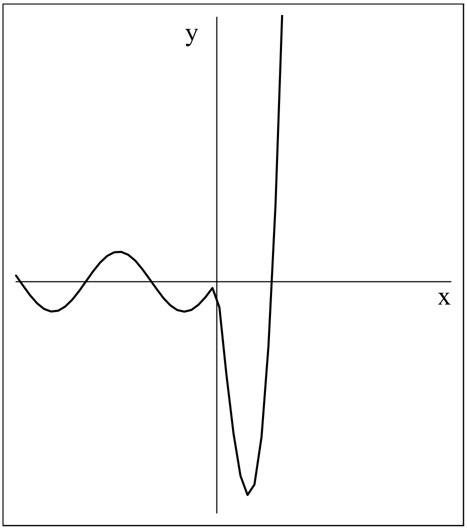
$$\mathcal{I}(\mathbb{R})=\left\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\mid f(-x)=-f(x)\right\}.$$

Entonces $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{I}(\mathbb{R})\leqslant\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (la demostración de esto se deja como ejercicio), además:

1. *Para $f\in\mathcal{P}(\mathbb{R})\cap\mathcal{I}(\mathbb{R})$, $f(x)=f(-x)=-f(x)$. Esto implica que $2f(x)=0$. Por lo tanto, $f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$. Por lo tanto $f=\hat{0}$.*

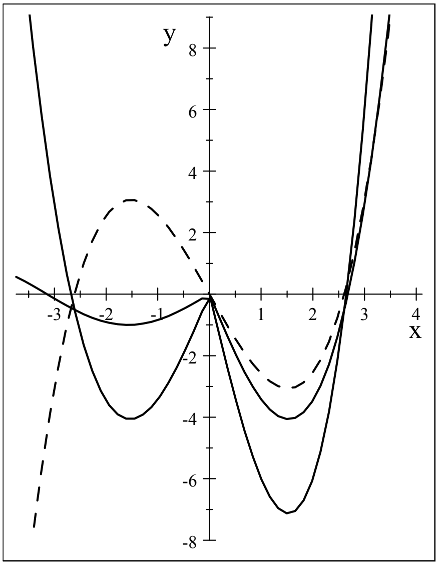
2. *Para $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}\in\mathcal{P}(\mathbb{R})+\mathcal{I}(\mathbb{R})$. Concluímos que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}=\mathcal{P}(\mathbb{R})\bigoplus\mathcal{I}(\mathbb{R})$.*

Ejemplo 23 *Sea $f(x)=\begin{cases} sen(x) & si\ \ x\leqslant 0\\ x^3-7x & si\ \ x\geq 0\end{cases}$, cuya gráfica se muestra a continuación:*



$f(x)$

Tomando $p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, *y* $n(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$, *vemos las gráficas de* f, p *y* n:



$f(x), p(x), n(x)$

Ejemplo 24 *En $M_n(\mathbb{R})$ sean $\mathbb{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$, sea $\mathbb{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = -A^t\}$. Entonces $\mathbb{S}_n(\mathbb{R}), \mathbb{A}_n(\mathbb{R}) \leqslant M_n(\mathbb{R})$, (Ejercicio). Además:*

1. $A \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbb{A}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow A = A^t = -A \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
2. *Para $C \in M_n(\mathbb{R})$, $C = \frac{1}{2}(C + C^t) + \frac{1}{2}(C - C^t)$. Como $\frac{1}{2}(C + C^t)$ es simétrica y $\frac{1}{2}(C - C^t)$ es antisimétrica, entonces $C \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R}) + \mathbb{A}_n(\mathbb{R})$. Por lo tanto $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{S}_n(\mathbb{R}) + \mathbb{A}_n(\mathbb{R})$.*
   Por lo tanto $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{S}_n(\mathbb{R}) \bigoplus \mathbb{A}_n(\mathbb{R})$. ■

Teorema 11 *Son equivalentes para $W, K \leqslant {}_F V$:*

1. $V = W \bigoplus K$.
2. $\forall \vec{v} \in V, \exists! \vec{w} \in W, \exists! \vec{k} \in K$ *tal que* $\vec{v} = \vec{w} + \vec{k}$.
3. *$V = W + K$ y $\vec{0}$ se puede escribir de manera única en la forma $\vec{w} + \vec{k}$ con $\vec{w} \in W$ y $\vec{k} \in K$.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Es claro que $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} = \vec{w} + \vec{k}$ con $\vec{w} \in W$ y $\vec{k} \in K$ $(V = W + K)$. Ahora supóngase que $\vec{v} = \vec{w}_1 + \vec{k}_1 = \vec{w} + \vec{k}$, con $\vec{w}_1 \in W, \vec{k}_1 \in K$, entonces $\vec{w}_1 - \vec{w} = \vec{k} - \vec{k}_1 \in W \cap K = \left\{\vec{0}\right\}$, por lo tanto $\vec{w}_1 = \vec{w}$ y $\vec{k} = \vec{k}_1$. Con lo que queda demostrada la unicidad..

2) $\Rightarrow$ 3) Inmediato.

3) $\Rightarrow$ 1) Basta demostrar que $W \cap K = \left\{\vec{0}\right\}$. Sea $\vec{x} \in W \cap K$, entonces $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{x} + (-\vec{x})$. Por lo tanto $\vec{x} = \vec{0}$. ■

Proposición 5 $X \subseteq {}_F V \Rightarrow \mathfrak{L}(X) = \bigcup\limits_{\substack{Y \subseteq X \\ Y \text{ finito}}} \mathfrak{L}(Y)$.

Demostración. $\supseteq$) $Y \subseteq X \Rightarrow \mathfrak{L}(Y) \subseteq \mathfrak{L}(X)$. En particular, $\mathfrak{L}(Y) \subseteq \mathfrak{L}(X)$, para cada subconjunto finito Y de X. Por lo tanto $\bigcup\limits_{\substack{Y \subseteq X \\ Y \text{ finito}}} \mathfrak{L}(Y) \subseteq \mathfrak{L}(X)$.

$\subseteq$) Si X es finito, no hay nada que demostrar. Podemos suponer que X es infinito, y en particular, que es $\neq \emptyset$. Si $\vec{0} \neq \vec{v} \in \mathfrak{L}(X)$, entonces $\vec{v} = a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + ... + a_k\vec{x}_k$, con $k \in \mathbb{N}, a_i \in F, \vec{x}_i \in X$. Entonces $\vec{v} \in \mathfrak{L}(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_k\})$, note que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_k\}$ es finito.

Por lo tanto $\mathfrak{L}(X) \subseteq \bigcup\limits_{\substack{Y \subseteq X \\ Y \text{ finito}}} \mathfrak{L}(Y)$. ■

2.3. Dependencia e independencia lineal

Definición 25 $S \subseteq V$ *es linealmente dependiente (l. d.) si* $\exists \vec{x} \in \mathfrak{L}(S \backslash \{\vec{x}\})$.

Ejemplo 25 $\left\{\vec{0}\right\}$ *es linealmente dependiente:*

$$\vec{0} \in \left\{\vec{0}\right\} = \mathfrak{L}(\emptyset) = \mathfrak{L}\left(\left\{\vec{0}\right\} \backslash \left\{\vec{0}\right\}\right).$$

Observación 14 *Son equivalentes para* $S \subseteq_F V$:

1. S *es l. d.*
2. $\exists \vec{x} \in S$ *tal que* $\mathfrak{L}(S) = \mathfrak{L}(S \backslash \{\vec{x}\})$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Sea $\vec{x} \in \mathfrak{L}(S \backslash \{\vec{x}\})$. Entonces $S \backslash \{\vec{x}\} \subseteq S \Rightarrow \mathfrak{L}(S \backslash \{\vec{x}\}) \leqslant \mathfrak{L}(S)$.

Por otra parte, $\vec{x} \in \mathfrak{L}(S \backslash \{\vec{x}\}) \Rightarrow \{\vec{x}\} \subseteq \mathfrak{L}(S \backslash \{\vec{x}\})$. Como también se tiene que $S \backslash \{\vec{x}\} \subseteq \mathfrak{L}(S \backslash \{\vec{x}\})$, entonces $(\{\vec{x}\} \cup S \backslash \{\vec{x}\}) \subseteq \mathfrak{L}(S \backslash \{\vec{x}\})$. Es decir que $S \subseteq \mathfrak{L}(S \backslash \{\vec{x}\})$. Por lo tanto $\mathfrak{L}(S) \leqslant \mathfrak{L}(S \backslash \{\vec{x}\})$.

2) $\Rightarrow$ 1)Si $\mathfrak{L}(S) = \mathfrak{L}(S \backslash \{\vec{x}\})$, para algún $\vec{x} \in \mathfrak{L}$, entonces $\vec{x} \in \mathfrak{L}(S) = \mathfrak{L}(S \backslash \{\vec{x}\})$. ■

Teorema 12 $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\} \subseteq_F V$ *es l. d..* $\Leftrightarrow \exists i \in \{1, ..., n\}$ *tal que* $\vec{x}_i \in \mathfrak{L}(\{\vec{x}_j \mid j < i\})$.

Demostración. $\Leftarrow$) $\vec{x}_i \in \mathfrak{L}(\{\vec{x}_j \mid j < i\}) \subseteq \mathfrak{L}(S \backslash \{\vec{x}_i\})$ (que existe dado que S es *l. d.*), entonces $\vec{x}_m = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq m}} \alpha_i \vec{x}_i$, además $j > m$ implica que $\alpha_j = 0$ (m es máximo), por lo tanto:

$$\vec{x}_m = \sum_{\substack{i=1 \\ i<m}} \alpha_i \vec{x}_i \in \mathfrak{L}(\{\vec{x}_j \mid j < i\})$$

■

Teorema 13 *Son equivalentes para* $\gamma \subseteq {}_FV$:

1. γ *es l. d.*

2. $\exists \vec{x} \in \gamma$ *tal que* $\mathfrak{L}(\gamma) = \mathfrak{L}(\gamma \backslash \{\vec{x}\})$.

3. $\exists \beta \subseteq \gamma$, β *finito, tal que* β *es l. d.*

4. $\exists \beta \subseteq \gamma$, β *finito, tal que* $\vec{0} = \sum\limits_{\vec{y}_i \in \beta} a_i \vec{y}_i$ *con algún* $a_i \neq 0$.

   Además, si γ *es finito y* $\gamma = \{\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n\}$*:*

5. $\exists i \in \{1, ...n\}$ *tal que* $\vec{x}_i \in \mathfrak{L}(\{\vec{x}_j \mid j < i\})$.

Demostración. Con lo que se ha demostrado hasta este momento, únicamente falta demostrar la equivalencia de 4) con las demás proposiciones.

3) $\Rightarrow$ 4)

$\beta = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\}$ *l. d.* $\Rightarrow \exists \vec{x}_i \in \beta$ tal que $\vec{x}_i \in \mathfrak{L}(\beta \backslash \{\vec{x}_i\}) \Rightarrow \vec{x}_i = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} a_j \vec{x}_j \Rightarrow$ $\vec{0} = \sum\limits_{j=1} a_j \vec{x}_j$ con $a_i = -1 \neq 0$.

4) $\Rightarrow$ 3)

Supongamos que $\beta = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_n\} \wedge \vec{0} = \sum\limits_{i=1} a_i \vec{y}_i$ con algún $a_i \neq 0$.

Sea $a_d \in \{a_1, ..., a_n\}$ tal que $a_d \neq 0$. Así, tenemos que

$$-a_d \vec{y}_d = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq d}}^{n} a_i \vec{y}_i$$

esto implica que

$$\vec{y}_d = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq d}}^{n} \left(\frac{1}{-a_d} \right) a_i \vec{y}_i \in \mathfrak{L}(\beta \backslash \{\vec{y}_d\}).$$

Por lo tanto, β es *l. d.* ■

Ejemplo 26 *En* $F[x]$, $S = \{1, x, x^2, ..., x^n, ...\}$ *no es l. d.*

Demostración. Sea $T \subseteq S$, T finito $\Rightarrow T = \{x^{i_1}, x^{i_2}, ..., x^{i_k}\}$.

Si $x^l \in \mathfrak{L}\left(T \backslash \left\{x^l\right\}\right)$ entonces $x^l = \alpha_{i_1} x^{i_1} + \alpha_{i_2} x^{i_2} + ... + \alpha_{i_k} x^{i_k}$ con $i_k \neq l$ $\overset{\triangledown}{\circ}$. Por lo tanto S no es *l. d.* ■

Definición 26 *$S \subseteq {}_F V$ es l. i. (linealmente independiente) si S no es l. d.*

Ejemplo 27 *$\emptyset \subseteq_F V$ es l. i.*

Pues si $\emptyset$ fuera linealmente dependiente, $\exists \vec{x} \in \emptyset$, tal que $\vec{x} \in \mathfrak{L}(\emptyset \setminus \{\vec{x}\})$, $\overset{\triangledown}{\circ}$.

Observación 15 *Son equivalentes para $\vec{x} \in_F V$:*

1. *$\{\vec{x}\}$ es l. i.*
2. *$\vec{x} \neq \vec{0}$.*

Demostración.

$$\{\vec{x}\} \text{ es } l.\ i.$$

$\Leftrightarrow$

$$\neg (\exists \vec{z} \in \{\vec{x}\} \text{ tal que } \vec{z} \in \mathfrak{L}(\{\vec{x}\} \setminus \{\vec{z}\}))$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall \vec{z} \in \{\vec{x}\}, \vec{z} \notin \mathfrak{L}(\{\vec{x}\} \setminus \{\vec{z}\})$$

$\Leftrightarrow$

$$\vec{x} \notin \mathfrak{L}(\{\vec{x}\} \setminus \{\vec{x}\}) = \mathfrak{L}(\emptyset) = \left\{\vec{0}\right\}$$

$\Leftrightarrow$

$$\vec{x} \neq \vec{0}.$$

■

Proposición 6 *$S \subseteq T \subseteq V$, S l. d. $\Rightarrow T$ es l. d.*

Demostración. S *l. d.* $\Rightarrow \exists \vec{x} \in S \subseteq T$ tal que $\vec{x} \in \mathfrak{L}(S \setminus \{\vec{x}\})$. Pero $\mathfrak{L}(S \setminus \{\vec{x}\}) \subseteq \mathfrak{L}(T \setminus \{\vec{x}\})$. $\therefore \vec{x} \in \mathfrak{L}(T \setminus \{\vec{x}\})$ y T es *l. d.* ■

Corolario 3 *$\vec{0} \in S \Rightarrow \left\{\vec{0}\right\} \subseteq S \Rightarrow S$ es l. d.*

Corolario 4 *$S \subseteq T \subseteq V$, T l. i. $\Rightarrow S$ es l. i.*

Teorema 14 *Son equivalentes para $S \subseteq_F V$:*

1. *S es l. i.*
2. *Todo subconjunto finito T de S es l. i.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Por el Corolario 4.

2) $\Rightarrow$ 1) Por contrapuesta. Si S es $l.\ d.$ entonces $\exists \vec{x} \in S$ tal que $\vec{x} \in \mathfrak{L}(S \setminus \{\vec{x}\}) = \bigcup_{\substack{Y \subseteq S \setminus \{\vec{x}\} \\ Y \text{ finito}}} \mathfrak{L}(Y) \Rightarrow \vec{x} \in \mathfrak{L}(T)$ para algún subconjunto finito T de $S \setminus \{\vec{x}\}$.

$\therefore \vec{x} \in \mathfrak{L}(T) = \mathfrak{L}([T \cup \{\vec{x}\}] \setminus \{\vec{x}\})$, por lo que $T \cup \{\vec{x}\}$ es $l.\ d.$

En resumen: si S es $l.\ d.$ entonces algún subconjunto finito T de S es $l.\ d.$ ■

Corolario 5 *Son equivalentes para $\gamma \subseteq_F V$:*

1. *γ es $l.\ i.$*
2. *$\forall \vec{x} \in \gamma$, $\mathfrak{L}(\gamma \setminus \{\vec{x}\}) \subsetneqq \mathfrak{L}(\gamma)$.*
3. *$\forall \beta \subseteq \gamma$ tal que β es finito, β es $l.\ i.$*
4. *$\forall \beta \subseteq \gamma$ tal que β es finito, $\vec{0} = \sum_{\vec{y}_i \in \beta} a_i \vec{y}_i \Rightarrow a_i = 0, \forall i.$*

2.4. Bases

Definición 27 *Decimos que $\beta \subseteq_F V$ genera ${}_FV$, si $\mathfrak{L}(\beta) = V$. También se dice que β es un conjunto generador de ${}_FV$.*

Observación 16 *Dado que $V \leqslant {}_FV$ y $\mathfrak{L}(V) = V$, entonces V es un conjunto generador de V. Así, todo espacio vectorial tiene conjuntos generadores.*

Definición 28 *$\beta \subseteq_F V$ es una base para ${}_FV$ si β es $l.\ i.$ y β genera ${}_FV$.*

Ejemplo 28 *$\{1, x, x^2, ...x^n, ...\}$ es una base para $F[x]$.*

Notación 2

1. *$\mathcal{J}({}_FV) = \{X \subseteq V \mid X \text{ es } l.\ i.\}$*
2. *$\mathcal{G}({}_FV) = \{X \subseteq V \mid X \text{ genera } {}_FV\}$.*

Teorema 15 *Son equivalentes para $\beta \subseteq_F V$:*

1. *β es base de V.*
2. *β es un elemento máximo en $\mathcal{J}(V)$.*
3. *β es un elemento mínimo en $\mathcal{G}(V)$.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Es claro que $\beta \in \mathcal{J}\left({}_F V\right)$, basta demostrar que es máximo.
Supóngase que $\beta \subsetneqq \beta'$ entonces $\exists \vec{x} \in \beta' \backslash \beta$. Dado que $\mathfrak{L}\left(\beta\right) =_F V$, entonces $\beta \cup \{\vec{x}\}$ es $l.\ d.$ $(\vec{x} \in_F V = \mathfrak{L}(\beta) = \mathfrak{L}([\beta \cup \{\vec{x}\}] \setminus \{\vec{x}\})$.

Pero $\beta \cup \{\vec{x}\} \subseteq \beta'$, por lo que $\beta' \notin \mathcal{J}\left({}_F V\right)$.

2) $\Rightarrow$ 3)

Dado que $\beta \in \mathcal{J}\left({}_F V\right)$, basta demostrar que $\mathfrak{L}\left(\beta\right) =_F V$.

Sea $\vec{x} \in V$ es claro que si

1. si $\vec{x} \in \beta$ entonces $\vec{x} \in \mathfrak{L}\left(\beta\right)$.

2. si $\vec{x} \notin \beta$ entonces $\beta \cup \{\vec{x}\}$ es linealmente dependiente, y entonces hay alguna combinación lineal

$$\vec{0} = \alpha_1 \vec{x}_1 + ... + \alpha_n \vec{x}_n + \alpha_{n+1} \vec{x}$$

con $\vec{x}_i \in \beta$ y con algún coeficiente distinto de 0. Notemos que $\alpha_{n+1} \neq 0$, pues en caso contrario tendríamos que β es $l.\ d.$ Por lo tanto

$$\vec{x} = \frac{1}{\alpha_{n+1}} \left[-\alpha_1 \vec{x}_1 - ... - \alpha_n \vec{x}_n\right],$$

es decir, $\vec{x} \in \mathfrak{L}\left(\beta\right)$.

Concluímos que $\beta \in \mathcal{G}\left({}_F V\right)$.

3) $\Rightarrow$ 1) Basta demostrar que β es $l.\ i.$

$\forall \vec{x} \in \beta$, $\mathfrak{L}\left(\beta \backslash \{\vec{x}\}\right) \lneqq_F V = \mathfrak{L}(\beta)$. $\therefore \beta$ es $l.\ i.$ ■

Definición 29 *${}_F V$ es finitamente generado si $\exists X \subseteq V$, X finito tal que $X \in \mathcal{G}\left(V\right)$.*

Observación 17 *$X \in \mathcal{G}\left(V\right) \Leftrightarrow$ el único subespacio de ${}_F V$ que incluye a X es V.*

Teorema 16 *${}_F V$ finitamente generado por $X \Rightarrow \exists \beta \subseteq X$ tal que β es base para V.*

Demostración. 1. Si X es mínimo en $\mathcal{G}\left({}_F V\right)$, tomemos $\beta = X$.

2. Si X no es mínimo en $\mathcal{G}\left({}_F V\right)$, entonces $\exists X_1 \subsetneqq X$ tal que $X_1 \in \mathcal{G}\left(V\right)$. Entonces X_1 ya es una base de ${}_F V$, en cuyo caso tomamos $\beta = X_1$ o bien $\exists X_2 \subsetneqq X_1$ tal que $X_2 \in \mathcal{G}\left(V\right)$. Así, mientras podamos, podemos repetir el argumento para obtener una sucesión de subconjuntos generadores de V:

$$X \supsetneqq X_1 \supsetneqq ...$$

Notemos que este proceso termina, pues si consideramos la sucesión de las cardinalidades de los conjuntos de arriba, obtenemos:

$$|X| \gneqq |X_1| \gneqq |X_2| ...$$

que termina, por el principio del buen orden.

Termina precisamente cuando hemos encontrado un generador mínimo X_k. ■

Teorema 17 *Sea $_FV$ finitamente generado, $G \in \mathcal{G}(_FV)$, $I \in \mathcal{J}(_FV)$. Entonces* $|I| \leqslant |G|$.

Demostración. Podemos suponer que $I \not\subset G$ (ya que si $I \subset G$, el resultado es inmediato).

Sea $G = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_m\}$ con $I \cap G = \{\vec{y}_1, ..., \vec{y}_k\}$ $k < m$, (esto se puede conseguir, reenumerando los vectores, si hiciera falta).

Sea $\vec{x}_1 \in I \backslash (I \cap G)$, $\{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_m\}$ es $l.d.$ (porque $\vec{x}_1 \in \mathfrak{L}(\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_m\})$).

Ahora, como $\{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_m\} \subset I$, se tiene que $\exists j > k$ tal que
$\vec{y}_j \in \mathfrak{L}(\{\vec{x}_1, ..., \vec{y}_{j-1}\})$ y así es claro que

$$\mathfrak{L}\left(\{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_m\} \setminus \{\vec{y}_j\}\right) = \mathfrak{L}\left(\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_m\}\right) =_F V.$$

Lo que se ha hecho es tomar un elemento de $G \backslash I$ $(\vec{y}_j)$ y cambiarlo por un elemento $\vec{x}_1$ de $I \backslash G$, de tal manera que se obtiene un nuevo conjunto generador ($G_1 = [G \backslash \{\vec{y}_j\}] \cup \{\vec{x}_1\}$).

De esta manera podemos repetir el argumento, con G_1 e I. Notemos ahora que $(I \cap G_1) = \{\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_k\}$ tiene un elemento más que $(I \cap G)$: $\vec{x}_1$.

Si tuviéramos que repetir el argumento una vez más, obtendríamos un nuevo conjunto generador G_2, tal que

$$|(I \cap G_1)| < |(I \cap G_2)| ... \leqslant |G|$$

esto implica que el número de veces que se puede aplicar el argumento es finito, y debe ser claro que el proceso termina hasta que

$$I \subseteq G_k,$$

es decir hasta que $I = I \cap G_k$, por lo que $|I| \leqslant |G_k| = |G|$. ■

En $\mathbb{R}^3$, $G = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^3)$. Por lo tanto un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^3$ tiene a lo más 3 elementos. Es decir

$$X \subseteq \mathbb{R}^3, |X| > 3 \Rightarrow X \text{ es } l.d.$$

1. $\{(1,0,0,1), (0,1,0,2), (0,0,1,3), (0,0,1,4), (-1,-2,-3,-4)\}$ genera $\mathbb{R}^4$ y

2. $\{(1,0,0,1), (0,1,0,2), (0,0,1,0\}$ es $l.\ i.$ en $\mathbb{R}^4$.

Demostración. 1. Para ver que el primer conjunto genera $\mathbb{R}^4$ resolvamos

$$x\,(1,0,0,1)+y\,(0,1,0,2)+z\,(0,0,1,3)+s\,(0,0,1,4)+t\,(-1,-2,-3,-4)=$$
$$=(a,b,c,d)\,,$$

que como sistema de ecuaciones tiene la matriz aumentada

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & c \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -4 & d \end{pmatrix},$$

con forma escalonada y reducida:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -13 & 4c-d+a+2b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & d-a-2b-3c \end{pmatrix}.$$

2. Veamos ahora que $\{(1,0,0,1)\,,(0,1,0,2)\,,(0,0,1,0\}$ es $l.\ i.$ en $\mathbb{R}^4$:

Una manera de verlo es notando que en el conjunto anterior, ningún vector es combinación lineal de los anteriores.

Otra, es resolviendo $x\,(1,0,0,1)+y\,(0,1,0,2)+z\,(0,0,1,0)=(0,0,0,0)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cuya forma escalonada y reducida es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, es decir, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Ahora sean

$$I=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\},$$

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\\-4\end{pmatrix}\right\},$$

entonces

$$I \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Como G genera V, entonces $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cup G$ es *l. d.* por lo que algún vector en la lista

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

es combinación lineal de los anteriores. Es fácil ver que éste no es el primero, ni el segundo, ni el tercero. El cuarto vector no puede ser *c.l.* de los anteriores, pues tendría que ser múltiplo del primero (observar las dos primeras coordenadas). El quinto vector es *c.l.* del primero y del cuarto vectores de la lista:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Resolvamos

$$x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Cuya matriz aumentada es: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, con forma escalonada y reducida: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$. Por lo que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -1/3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4/3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ahora, podemos quitar $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ del conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

obteniendo:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

que sigue generando $\mathbb{R}^4$ y que incluye al conjunto I. ■

Teorema 18 *Si ${}_FV$ es finitamente generado, entonces todas las bases de V son finitas y tienen el mismo número de elementos.*

Demostración. Sea $\gamma \subseteq V$ un subconjunto generador finito, y β, β' dos bases de V.

Por el teorema anterior, $|\beta|, |\beta'| \leqslant |\gamma|$.

Ahora,

$$\beta \in \mathcal{J}(V), \beta' \in \mathcal{G}(V) \Rightarrow |\beta| \leqslant |\beta\ '|.$$

Simétricamente, tenemos que $|\beta\ '| \leqslant |\beta|$. ■

Definición 30 *Sea ${}_FV$ finitamente generado y β una base de ${}_FV$. La dimensión de ${}_FV$ es $|\beta|$.*

Teorema 19 *Son equivalentes para $\beta \subseteq_F V$ con $dim(V) = n$:*

1. *β es base.*
2. *$\beta \in \mathcal{J}(V) \wedge |\beta| = n$.*
3. *$\beta \in \mathcal{G}(V) \wedge |\beta| = n$.*
4. *$\beta = \{\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n\} \wedge \forall \vec{x}\ \exists! \alpha_1, ..., \alpha_n \in F$ tal que $\vec{x} = \alpha_1 \vec{x}_1 + ... + \alpha_n \vec{x}_n$.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Es claro, por el Teorema 18.

2) $\Rightarrow$ 1) Basta demostrar que $\mathcal{J}(V)$ es máximo. Supóngase que $\beta \subsetneqq \beta'$. Como la $\dim({}_FV)$ es n, esto significa que hay un conjunto generador con n elementos (una base). Por lo tanto un conjunto con más de n elementos como β' debe ser $l.\ d.$

Por lo tanto, $\beta \subsetneqq \beta' \Rightarrow \beta'$ es $l.\ d.$

1) $\Rightarrow$ 3) Es inmediato del Teorema 18.

3) $\Rightarrow$ 1) Hay que ver que β es mínimo en $\mathcal{G}(V)$.

Si $\beta' \subsetneqq \beta$, entonces $\beta \notin \mathcal{G}(V)$, ya que

$$\beta' \in \mathcal{G}(V), \beta \in \mathcal{J}(V) \Rightarrow |\beta| \leqslant |\beta'| < |\beta|.$$

1) $\Rightarrow$ 4) Sea $\vec{v} \in_F V$, entonces

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{x}_1 + ... + \alpha_n \vec{x}_n,$$

con $\alpha_i \in F$. Si además,

$$\vec{v} = \gamma_1 \vec{x}_1 + ... + \gamma_n \vec{x}_n,$$

entonces

$$\begin{aligned} \vec{0} = \vec{v} - \vec{v} &= \alpha_1 \vec{x}_1 + ... + \alpha_n \vec{x}_n - (\gamma_1 \vec{x}_1 + ... + \gamma_n \vec{x}_n) = \\ &= (\alpha_1 - \gamma_1)\vec{x}_1 + ... + (\alpha_n - \gamma_n)\vec{x}_n \end{aligned}$$

y como β es $l.\ i.$, tenemos que $0 = (\alpha_1 - \gamma_1) = ... = (\alpha_n - \gamma_n)$, es decir que

$$\alpha_1 = \gamma_1, ..., \alpha_n = \gamma_n.$$

4) $\Rightarrow$ 1) Es claro que β genera ${}_FV$, ahora, si $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$ entonces, dado que también se tiene que $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \vec{x}_i$, la hipótesis de unicidad implica que

$$0 = \alpha_1 = ... = \alpha_n,$$

por lo tanto β es $l.\ i.$ ■

Ejemplo 29 *En* $F[x]$, $P_n(F) = \{f \in F[x] \mid grad(f) \leqslant 0\} \cup \{0(x)\}$ *es un subespacio de* $F[x]$ *y* $\beta = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$ *es una base de* $P_n(F)$.
Escojamos ahora $n+1$ *elementos distintos en* F,

$$a_0, a_1, ..., a_n \ .$$

Definamos el polinomio

$$f_i = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x - a_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j)}$$

Notemos que

$$f_i(a_r) = \begin{cases} \textit{1} & si\ r = i \\ \textit{0} & si\ r \neq i \end{cases} .$$

Si $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i f_i = 0(x) \in P_n(F)$, *entonces evaluando en* a_i *tenemos que* $\alpha_i = 0$, *y esto pasa para cada* $i \in \{0, ..., n\}$. *Por lo tanto* $\{f_0, ..., f_n\}$ *es l. i. y como* $|\{f_0, ..., f_n\}| = n+1$, *tenemos que* $\{f_0, ..., f_n\}$ *es una base para* $P_n(F)$.
Así, si queremos un polinomio en $\mathbb{R}^n$ *cuya gráfica en* $\mathbb{R}^2$ *pase por los* $n+1$ *puntos del plano* $(a_0, d_0), ..., (a_n, d_n)$, *es fácil ver que* $g(x) = d_0 f_0 + ... + d_n f_n$, *cumple lo requerido.* ■

Ejemplo 30 *Construyamos un polinomio* $s(x)$ *cuya gráfica pase por los puntos*

$$(-3, 3), (-2, -1), (-1, 0), (2, 4), (5, -1):$$

Denotemos $a_0 = -3$, $a_1 = -2$, $a_2 = -1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$

$$f_i = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x - a_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j)},$$

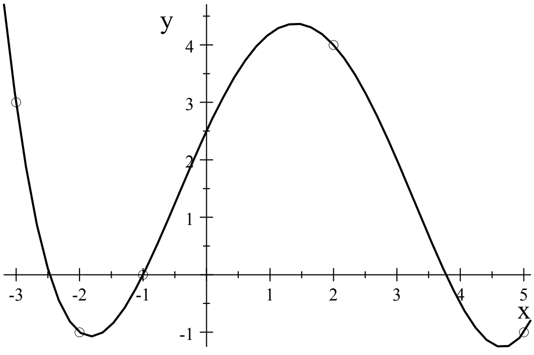
$$f_0 = \frac{(x+2)(x+1)(x-2)(x-5)}{(-3+2)(-3+1)(-3-2)(-3-5)} = \frac{1}{80}x^4 - \frac{1}{20}x^3 - \frac{9}{80}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{4}$$

$$f_1=\frac{(x+3)(x+1)(x-2)(x-5)}{(-2+3)(-2+1)(-2-2)(-2-5)}=-\frac{1}{28}x^4+\frac{3}{28}x^3+\frac{15}{28}x^2-\frac{19}{28}x-\frac{15}{14}$$
$$f_2=\frac{(x+3)(x+2)(x-2)(x-5)}{(-1+3)(-1+2)(-1-2)(-1-5)}=\frac{1}{36}x^4-\frac{1}{18}x^3-\frac{19}{36}x^2+\frac{2}{9}x+\frac{5}{3}$$
$$f_3=\frac{(x+3)(x+2)(x+1)(x-5)}{(2+3)(2+2)(2+1)(2-5)}=-\frac{1}{180}x^4-\frac{1}{180}x^3+\frac{19}{180}x^2+\frac{49}{180}x+\frac{1}{6}$$
$$f_4=\frac{(x+3)(x+2)(x+1)(x-2)}{(5+3)(5+2)(5+1)(5-2)}=\frac{1}{1008}x^4+\frac{1}{252}x^3-\frac{1}{1008}x^2-\frac{1}{63}x-\frac{1}{84}.$$

Ahora,

$$3f_0+(-1)f_1+0f_2+2f_3+5f_4=$$

$$\begin{aligned}
&= 3\left(\frac{1}{80}x^4-\frac{1}{20}x^3-\frac{9}{80}x^2+\frac{1}{5}x+\frac{1}{4}\right)+\\
&\quad+(-1)\left(-\frac{1}{28}x^4+\frac{3}{28}x^3+\frac{15}{28}x^2-\frac{19}{28}x-\frac{15}{14}\right)+\\
&+4\left(-\frac{1}{180}x^4-\frac{1}{180}x^3+\frac{19}{180}x^2+\frac{49}{180}x+\frac{1}{6}\right)-\\
&1\left(\frac{1}{1008}x^4+\frac{1}{252}x^3-\frac{1}{1008}x^2-\frac{1}{63}x-\frac{1}{84}\right)=\\
&s(x)=\frac{1}{20}x^4-\frac{17}{60}x^3-\frac{9}{20}x^2+\frac{143}{60}x+\frac{5}{2}.
\end{aligned}$$



$s(x)$

Teorema 20 *Si γ es l. i. en un espacio vectorial ${}_FV$ de dimensión n, entonces $\exists \beta \subseteq_F V$, base tal que $\gamma \subseteq \beta$.*

Demostración. Sea β' una base de ${}_FV$. Como β' genera ${}_FV$ y γ es $l.\ i.$, entonces $|\gamma| \leqslant |\beta'|$.

Sea $\gamma = \{\vec{y}_1, ..., \vec{y}_m\}$ y $\beta' = \{\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n\}$ y reordenemos los elementos de γ y β' de manera que $\gamma \cap \beta' = \{\vec{y}_1 = \vec{x}_1, ..., \vec{y}_k = \vec{x}_k\}$. Entonces $k \leqslant m \leqslant n$.

1. Si $k = m$ entonces $\gamma \cap \beta' = \gamma$, por lo que $\gamma \subseteq \beta'$ y no hay nada que demostrar.

2. Si $k < m$, entonces $\{\vec{y}_{k+1}, \vec{x}_1, ..., \vec{x}_n\}$ es $l.\ d.$ Entonces existe un vector que es combinación lineal de los anteriores (y no es $\vec{y}_{k+1}$ porque es $\neq \vec{0}$, por ser parte de un conjunto $l.\ i.$) Entonces $\exists i \in \{k, ..., n\}$ tal que $\vec{x}_i \in \mathfrak{L}(\{\vec{y}_{k+1}\} \cup \{\vec{x}_j \mid j < i\})$, ($i > k$, porque si $i \leqslant k$, entonces $\{\vec{y}_{k+1}, \vec{x}_1, ..., \vec{x}_i\} \subseteq \gamma$, que es $l.\ i.$, $\overset{\nabla}{\circ}$).

$\therefore \mathfrak{L}(\{\vec{y}_{k+1}\} \cup \{\vec{x}_j \mid j \in \{1, ..., n\} \setminus \{\vec{x}_i\}\}) = \mathfrak{L}(\{\vec{y}_{k+1}, \vec{x}_1, ..., \vec{x}_n\})$
$= \mathfrak{L}(\{\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n\}) =_F V$.

Entonces $\{\vec{y}_{k+1}\} \cup \{\vec{x}_j \mid j \in \{1, ..., n\} \setminus \{\vec{x}_i\}\}$ es un conjunto generador de ${}_FV$ con n elementos, por lo que es una base de ${}_FV$.

Tomemos $\beta'' = \{\vec{y}_{k+1}\} \cup \{\vec{x}_j \mid j \in \{1, ..., n\} \setminus \{\vec{x}_i\}\}$ y repitamos el argumento, con γ y β'', notando que ahora,

$$\gamma \cap \beta'' = \{\vec{y}_1, ..., \vec{y}_k, \vec{y}_{k+1}\}$$

Con un elemento más en la intersección.

El argumento se puede repetir hasta obtener una base β tal que

$$\gamma \cap \beta = \{\vec{y}_1, ..., \vec{y}_k, \vec{y}_{k+1}, ..., \vec{y}_m\} = \gamma.$$

■

Observación 18 *Si ${}_FV$ es un espacio vectorial de dimensión n y $W \leqslant V$, entonces ${}_FW$ tiene base y dim$(W) \leqslant \dim(V)$.*

Demostración. Todo subconjunto de W que sea $l.\ i.$, también es $l.\ i.$ en V. Un subconjunto linealmente independiente de ${}_FV$ tiene a lo más n elementos.

Tomemos un subconjunto S_1 de W $l.\ i.$ (si hay: por ejemplo $\emptyset$). Si es máximo $l.\ i.$ entonces S_1 ya es un base de W. Si no lo es, es porque hay un conjunto S_2 que contiene propiamente a S_1 (y por lo tanto tiene más elementos). Podemos repetir el argumento mientras no encontremos un conjunto $l.\ i.$ máximo. Así obtenemos

$$S_1 \subsetneqq S_2 \subsetneqq ... \subsetneqq S_k$$

sucesión de conjuntos $l.\ i.$ en donde cada conjunto tiene por lo menos un elemento más que el anterior. Por lo tanto $n \geq |S_k| \geq k - 1$. Con esto vemos que el proceso termina, y termina cuando hemos encontrado una base de W. ■

Teorema 21 *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial de dimensión n. Entonces*

$$W_1, W_2 \leqslant_F V \ \Rightarrow \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Demostración. Sea β_1 una base de $W_1 \cap W_2$. Como $\beta_1 \subseteq W_1$ es *l. i.*, entonces $\exists \gamma_1 \subseteq W_1$ tal que $\beta_1 \overset{\circ}{\cup} \gamma_1$ es una base de W_1.

De la misma manera, $\exists \gamma_2 \subseteq W_2$ tal que $\beta_1 \overset{\circ}{\cup} \gamma_2$ es una base de W_2. (Notar que $\gamma_2 \cap \gamma_1 = \emptyset$, pues un elemento $\vec{w}$ en $\gamma_2 \cap \gamma_1$ pertenecería a $\mathfrak{L}(\beta_1)$, con lo que $\beta_1 \overset{\circ}{\cup} \gamma_1$ sería *l. d.* $\overset{\nabla}{\circ}$).

Nuestro objetivo es demostrar que $\beta_1 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 =: \beta$ es una base para $W_1 + W_2$.

1. $\beta_1 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$ genera $W_1 + W_2$:

$$\mathfrak{L}(\beta_1 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2) = \mathfrak{L}((\beta_1 \cup \gamma_1) \cup (\beta_1 \cup \gamma_2)) =$$

$$= \mathfrak{L}(\beta_1 \cup \gamma_1) + \mathfrak{L}(\beta_1 \cup \gamma_2) = W_1 + W_2.$$

2. $\beta_1 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$ es linealmente independiente:

Si $\beta_1 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$ fuera *l. d.* entonces habría en $\beta_1 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$ un vector que depende linealmente de los anteriores (escríbanse primero los elementos de β_1, después los de γ_1, y por último los de γ_2). Como $\beta_1 \cup \gamma_1$ es *l. i.*, por ser una base de W_1, entonces habría un elemento $\vec{x}_j$ de γ_2 que es *c.l.* de los elementos anteriores. Digamos que

$$\vec{x}_j = \vec{y} + \vec{z} + \sum_{\substack{i \\ i<j}} x_i,\ \vec{y} \in \mathfrak{L}(\beta_1), \vec{z} \in \mathfrak{L}(\gamma_1),$$

entonces

$$\vec{x} =: \vec{x}_j - \sum_{\substack{i \\ i<j}} x_i = \vec{y} + \vec{z},\ \vec{y} \in \mathfrak{L}(\beta_1), \vec{z} \in \mathfrak{L}(\gamma_1),$$

entonces $\vec{x} \in \mathfrak{L}(\gamma_2) \cap \mathfrak{L}(\beta_1 \cup \gamma_1) \subseteq W_1 \cap W_2$. Como β_1 es una base de $W_1 \cap W_2$, entonces $\vec{x} \in \mathfrak{L}(\beta_1)$. Pero entonces $\beta_1 \cup \{\vec{x}\}$ es *l. d.* pero por otra parte

$$\begin{aligned} \vec{x}_j - \sum_{\substack{i \\ i<j}} x_i &= \sum_l c_l \vec{w}_l,\ \vec{w}_l \in \beta_1 \Rightarrow \vec{x}_j = \sum_{\substack{i \\ i<j}} x_i + \sum_l c_l \vec{w}_l \\ &\Rightarrow \beta_1 \cup \{\vec{x}_1, ..., \vec{x}_j\} \text{ es } l.d. \end{aligned}$$

pero también es un subconjunto de $\beta_1 \cup \gamma_2$ que es *l. i.* por ser una base de W_2 $\overset{\nabla}{\circ}$.

Esta contradicción muestra que $\beta_1 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$ es *l. i.*

Por último,

$$\dim(W_1+W_2) = \left|\beta_1 \mathring{\cup} \gamma_1 \mathring{\cup} \gamma_2\right| = \left|\beta_1 \mathring{\cup} \gamma_1\right| + |\gamma_2| + |\beta_1| - |\beta_1| =$$

$$= \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

■

2.5. Conjuntos parcialmente ordenados

Definición 31 *Un conjunto parcialmente ordenado (COPO) es una pareja* $(S, \leqslant)$ *donde* S *es un conjunto y* $\leqslant$ *es una relación de orden en* S.

Recordemos que una relación en un conjunto S es de orden si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Definición 32 *Sea* $(S, \leqslant)$ *un COPO, un elemento* $x \in S$ *es máximo si*

$$\neg(\exists y \in S \text{ tal que } [x \leqslant y] \wedge [x \neq y]).$$

Es decir, x *es máximo cuando no hay elementos mayores que* x.

Otra manera de decir que x es máximo en S es:

$$x \leqslant y, y \in S \Rightarrow x = y.$$

Definición 33 *Un COPO es una cadena (o conjunto totalmente ordenado) si*

$$\forall x, y \in S,\ x \leqslant y \vee y \leqslant x.$$

Ejemplo 31 $(\mathbb{N}, |)$ *no es una cadena:* $2 \not| 3 \wedge 3 \not| 2$.

Definición 34 *Sea* $(S, \leqslant)$ *un COPO,*

1. $x \in S$ *es el elemento mayor, si*

$$s \leqslant x \ \forall s \in S.$$

Denotaremos $may(S)$ *al mayor elemento de* S*, cuando lo haya.*

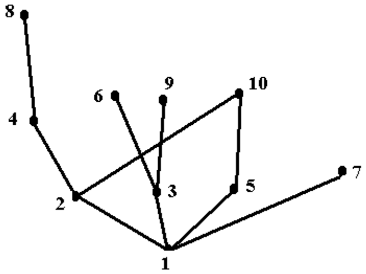


Figura 2.1:

2. $x \in S$ es el elemento menor, si

$$x \leqslant s \ \forall s \in S.$$

Observación 19 *Si $(S, \leqslant)$ es un COPO y $T \subseteq S$ entonces $T \times T \subseteq S \times S$. Como $\leqslant$ es una relación en S ($\leqslant \ \subseteq \ S \times S$ "la relación $\leqslant$ es un subconjunto de $S \times S$), entonces $[\leqslant \cap (T \times T)] \subseteq T \times T$ Denotemos $\leqslant \cap (T \times T)$ por $\leqslant_T$. La relación $\leqslant_T$es una relación de orden en T.*

$$\begin{tikzcd} \leq \arrow[r, "inc"] & S \times S \\ \leq_T \arrow[u, "inc"] \arrow[r, "inc"] & T \times T \arrow[u, "inc"'] \end{tikzcd}$$

Ejemplo 32 *Por ejemplo* $(\mathbb{N}, |)$ *es un COPO, y* $\{1, 2, 3, ..., 10\} \subseteq \mathbb{N}$.

Observación 20 *No se deben confundir los conceptos de* máximo *y* mayor. *En el ejemplo anterior, no hay elemento mayor y hay* 5 *elementos máximos.*

Sea $(S, \leqslant)$un COPO y sea $A \subseteq S$. Una cota superior para A en S es un elemento $u \in S$ tal que

$$a \leqslant u, \ \forall a \in A.$$

Ejemplo 33 *Una cota superior para* $\{1, 2, ..., 10\}$ *en* $(\mathbb{N}, |)$ *es* 7560.

$$\begin{array}{r} 945 \\ 8 \,\overline{)\,7560\,} \\ 0 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 1080 \\ 7 \,\overline{)\,7560\,} \\ 0 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 840 \\ 9 \,\overline{)\,7560\,} \\ 0 \end{array}.$$

Definición 35 *Sea $(S, \leqslant)$un COPO y sea $A \subseteq S$. Una cota inferior para A en S es un elemento $l \in S$ tal que*

$$l \leqslant a, \ \forall a \in A.$$

Notación 3 *Sea $(S, \leqslant)$un COPO y sea $A \subseteq S$. Denotaremos por $A^{\uparrow}$ al conjunto de cotas superiores para A, denotaremos por $A^{\downarrow}$ el conjunto de cotas inferiores de A.*

Definición 36 *$(S, \leqslant)$un COPO y sea $A \subseteq S$.*

1. *Si existe un menor elemento en el conjunto de cotas superiores de A, lo llamaremos el* supremo *de A. En símbolos:*

$$\sup(A) =: men\left(A^{\uparrow}\right).$$

2. *Si existe un menor elemento en el conjunto de cotas inferiores de A, lo llamaremos el* ínfimo *de A. En símbolos:*

$$\text{ínf}(A) =: may\left(A^{\downarrow}\right).$$

Ejemplo 34 *En $(\mathbb{N}, |)$ el conjunto de cotas superiores para dos números n, m es el conjunto de sus múltiplos comunes, y el menor de los múltiplos comunes es su mínimo común múltiplo. Es decir*

$$\sup\{n, m\} = men\{b \mid n \ divide \ a \ b, m \ divide \ a \ b\ \} = m.c.m.\{n, m\}.$$

Ejemplo 35 *Un subconjunto A de $\mathbb{R}$, con el orden usual, tiene supremo si está acotado por arriba (es decir, si tiene cota superior). Esto se conoce como Teorema del Supremo.*

Ejemplo 36 *Sea $(\wp(X), \subseteq)$ el COPO de los subconjuntos de un conjunto X, con el orden parcial dado por la inclusión. Entonces:*

$$\sup\{A, B\} = men\{Y \mid A \subseteq Y, B \subseteq Y\} = A \cup B.$$

$$\text{ínf}\{A, B\} = may\{Y \mid Y \subseteq A, Y \subseteq B\} = A \cap B.$$

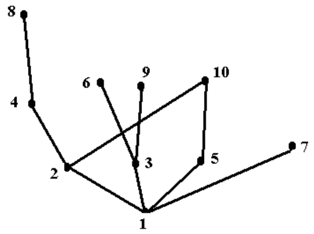


Figura 2.2:

Ejemplo 37 *En el COPO* $(\{1,2,3,...,10\},|)$,

1. $\sup\{2,3\} = 6$.
2. $\inf\{6,9\} = 3$.
3. $\{4,6\}^{\downarrow} = \{2,1\}$.
4. $\{3,5\}^{\uparrow} = \emptyset$. Por lo que $\{3,5\}$ no tiene supremo.

Observación 21 *El supremo de un conjunto* A *en un COPO* $(S,\leqslant)$, *si existe, es único.*

Demostración. Sean u y v dos supremos para A. Entonces $u,v \in A^{\uparrow}$. Como u es el menor elemento de $A^{\uparrow}$ y $v \in A^{\uparrow}$, entonces $u \leqslant v$. Por simetría, $v \leqslant u$. Así que $u = v$. ■

Notación 4 *Escribiremos* $a < b$ *ó* $a \lneqq b$, *para indicar que* $a \leqslant b \wedge a \neq b$.

Observación 22 *Sea* $A \subseteq S$, $(S,\leqslant)$ *un COPO. Son equivalentes para* $u \in S$:

- u no es el supremo de A.
- u no es cota superior de $A \vee$ (u es cota superior de A, pero no es la menor).
- $(\exists a \in A$ tal que $u < a) \vee (\exists v \in A^{\uparrow}$, tal que $v < u)$Las definiciones anteriores nos servirán para demostrar resultados para espacios vectoriales no necesariamente finitamente generados. Por ejemplo necesitaremos demostrar que todo espacio vectorial tiene base. En la sección siguiente introduciremos (como axioma) el Lema de Zorn.

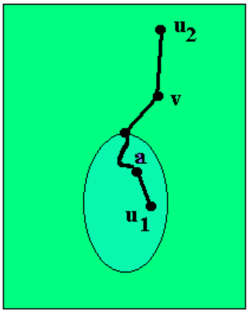


Figura 2.3:

2.6. Lema de Zorn

Axioma 1 (Lema de Zorn) *Sea $(S, \leqslant)$ un COPO no vacío, si toda cadena en S tiene una cota superior en S, entonces A contiene elementos máximos.*

Ejemplo 38 *Sea X un conjunto y consideremos el COPO $(\wp(X), \subseteq)$. Si $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in X}$ es una cadena en $\wp(X)$, entonces $\cup \{Y_\alpha\}_{\alpha \in X}$ es una cota superior para la cadena y pertenece a $\wp(X)$. El Lema de Zorn nos dice que $\wp(X)$ tiene un elemento máximo y es claro que éste es X.*

Ejemplo 39 *Un ideal de $\mathbb{Z}$ es un subconjunto cerrado bajo la resta, entonces un ideal de $\mathbb{Z}$resulta ser un subgrupo aditivo y por lo tanto es de la forma $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. Definamos $R(\mathbb{Z}) = \{A \subsetneqq \mathbb{Z} \mid A \text{ es un ideal propio}\}$. De nuevo es claro que $(R(\mathbb{Z}), \subseteq)$ es un COPO (por ser un subconjunto de $\wp(\mathbb{Z})$). $R(\mathbb{Z}) \neq \emptyset$, y si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in X}$ es una cadena en $R(\mathbb{Z})$, entonces $\cup \{A_\alpha\}_{\alpha \in X}$ es una cota superior para la cadena (hace falta ver que es un ideal). El Lema de Zorn nos garantiza la existencia de ideales máximos propios. De hecho, son de la forma $p\mathbb{Z}$, con p un número primo.*

Teorema 22 *Todo espacio vectorial ${}_F V$ tiene base.*

Demostración. $(\mathcal{J}(V), \subseteq)$ es un COPO, donde

$$\mathcal{J}(V) = \{I \subseteq V \mid I \text{ es } l.\ i.\}.$$

Además $\mathcal{J}(V) \neq \emptyset$, pues $\emptyset \in \mathcal{J}(V)$.

Tomemos $\{I_\alpha\}_{\alpha\in X}$ una cadena en $\mathcal{J}(V)$. Es claro que $\cup\{I_\alpha\}_{\alpha\in X}$ es una cota superior para la cadena, veamos que sigue perteneciendo a $\mathcal{J}(V)$.

Sea $F \underset{\text{finito}}{\subseteq} \cup\{I_\alpha\}_{\alpha\in X}$, entonces $F = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_k\}$ con $\vec{x}i \in I_{\alpha_i}$, digamos. Como $\{I_\alpha\}_{\alpha\in X}$ es una cadena, entonces $\{I_{\alpha_i}\}_{i\in\{1,\ldots,k\}}$ también lo es y entonces uno de los elementos de esta familia es el mayor. Entonces $\cup\{I_{\alpha_i}\}_{i\in\{1,\ldots,k\}} = I_{\alpha_j}$, por lo que $F \underset{\text{finito}}{\subseteq} I_{\alpha_j}$ que es *l. i.*, por hipótesis. Luego F es *l. i.* Como todo subconjunto finito de $\cup\{I_\alpha\}_{\alpha\in X}$ es *l. i.*, entonces $\cup\{I_{\alpha_i}\}_{i\in\{1,\ldots,k\}} \in \mathcal{J}(V)$.

El Lema de Zorn nos garantiza la existencia de un elemento máximo en $\mathcal{J}(V)$, pero un elemento así, es una base. ■

Definición 37 *$dim({}_FV) = |\beta|$, $\beta \underset{base}{\hookrightarrow} {}_FV$.*

Más adelante demostraremos que la anterior definición es buena, es decir que cualesquiera dos bases de un espacio vectorial ${}_FV$ tienen la misma cardinalidad. Esto ya lo sabemos para espacios finitamente generados. Pero hay espacios vectoriales que no son finitamente generados, como el espacio de los polinomios con coeficientes reales en donde hay un conjunto linealmente independiente infinito:

$$\left\{1, x, x^2, ...\right\},$$

ver el Corolario 5.

Teorema 23 *Todo subconjunto I l. i. en un espacio vectorial ${}_FV$ está incluído en una base de ${}_FV$.*

Demostración. Apliquemos el Lema de Zorn al COPO

$$\mathcal{T} = (\{J \subseteq V \mid I \subseteq J \wedge J \text{ es } l.\ i.\}, \subseteq).$$

La demostración es semejante a la del Teorema 22. Lo que obtenemos es un conjunto B máximo en $\mathcal{T}$. Resta demostrar que además de que B es máximo en $\mathcal{T}$, también es máximo en $\mathcal{J}(V)$.

Si $B \subsetneqq B'$, entonces B' no pertenece a $\mathcal{T}$. Como incluye a I, lo que sucede es que no es *l. i.* Por lo tanto B es *l. i.* máximo. ■

2.7. Dimensión

Teorema 24 *$W \leqslant_F V \Rightarrow \exists W\,' \leqslant V$ tal que $V = W \bigoplus W\,'$.*

Demostración. Sea $\beta \underset{base}{\hookrightarrow} W$. Como hemos visto, un conjunto $l.\ i.$ se puede extender a una base de ${}_FV$. Por lo tanto $\exists\gamma \underset{base}{\hookrightarrow} V$ con $\beta \subseteq \gamma$. Sean $\beta' = \gamma \backslash \beta$, $W' = \mathfrak{L}(\beta')$. Entonces:

1. ${}_FV = \mathfrak{L}(\gamma) = \mathfrak{L}\left(\beta \mathring{\cup} \beta'\right) = \mathfrak{L}(\beta) + \mathfrak{L}(\beta') = W + W'$.

2. Si $\vec{x} \in W \cap W'$ entonces $\vec{x} \in \mathfrak{L}(\beta)$, $\vec{x} \in \mathfrak{L}(\beta')$. Digamos que

$$\vec{x} = \sum \mu_i \vec{u}_i \ , \ \vec{u}_i \in \beta,$$

$$\vec{x} = \sum \lambda_j \vec{v}_j \ , \ \vec{v}_j \in \beta'.$$

Entonces $\vec{x} - \vec{x} = \vec{0} = \sum \mu_i \vec{u}_i - \left(\sum \lambda_j \vec{v}_j\right)$, que es combinación lineal del conjunto $l.\ i.\ \gamma$. Por lo tanto, todos los coeficientes son 0. En especial, $\vec{x} = \vec{0}$. ■

El siguiente Teorema es de gran importancia, pues nos dice que cualesquiera dos base de un espacio vectorial tienen la misma cardinalidad, con lo que se puede definir la dimensión de un espacio vectorial como la cardinalidad de una base.

Teorema 25 *Sean A, B dos bases para ${}_FV$, entonces $|A| = |B|$.*

Demostración. Haremos uso del Lema de Zorn.

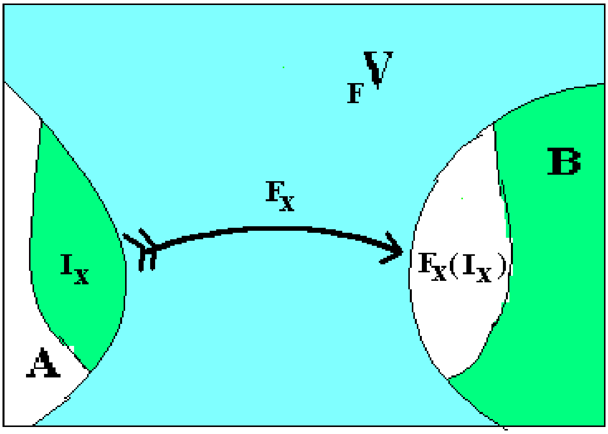
Sea

$$Q = \left\{(I_x, F_x) \mid I_x \subseteq A,\ F_x : I_x \gg\!\!\rightarrow B,\ \left[(B \backslash [F_x(I_x)]) \mathring{\cup} I_x\right] \underset{l.i.}{\hookrightarrow} V\right\}$$

definimos la relación $\leqslant$ en Q por:

$$(I_x, F_x) \leqslant (I_y, F_y) \text{ si } I_x \subseteq I_y \wedge F_{y_{|I_x}} = F_x.$$

Vale la pena hacer énfasis en todo lo que se está pidiendo de Q :



Para cada pareja (I_x, F_x) se está pidiendo que $(B \backslash [F_x (I_x)])$ sea ajeno con I_x, y que su unión sea linealmente independiente en V.

Nótese que a B se le quita la imagen de I_x bajo F_x y se reemplaza con I_x.

1. Veamos primero que $(Q, \leqslant)$ es un COPO.

a. $(I_x, F_x) \leqslant (I_x, F_x)$ ya que $I_x \subseteq I_x \wedge F_{x|I_x} = F_x$.

b. $[(I_x, F_x) \leqslant (I_y, F_y)] \wedge [(I_y, F_y) \leqslant (I_x, F_x)] \Rightarrow I_x \subseteq I_y,\ I_y \subseteq I_x$. Por lo que $I_x = I_y$. Además $F_{x|I_y} = F_y$. Pero también $F_{x|I_y} = F_{x|I_x} = F_x$.

c.

$$[(I_x, F_x) \leqslant (I_y, F_y)] \wedge [(I_y, F_y) \leqslant (I_z, F_z)] \Rightarrow$$

$$I_x \subseteq I_y \subseteq I_z$$

y

$$\begin{tikzcd} I_z \arrow[r, two heads, tail, "F_z"] & B \\ I_y \arrow[u, "\text{inc.}"] \arrow[ur, "F_y"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "="] \end{tikzcd}$$

además

$$\begin{tikzcd} I_y \arrow[r, two heads, tail, "F_y"] & B \\ I_x \arrow[u, "\text{inc.}"] \arrow[ur, "F_x"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "="] \end{tikzcd}$$

Entonces $F_{z|I_x} = \left(F_{z|I_y}\right)_{|I_x} = (F_y)_{|I_x} = F_x$. Por lo que $I_x \subseteq I_z$ y $F_{z|I_x} = F_x$, es decir que $(F_x, I_x) \leqslant (F_z, I_z)$.$Q \neq \emptyset : (\emptyset, \emptyset) \in \dot{Q} : \emptyset \overset{\emptyset}{>\!\!\!>\!\!\!\rightarrow} B$ y $B \backslash \emptyset (\emptyset) \overset{\circ}{\cup} \emptyset$ es $l.\ i$ en ${}_FV$.
2. Sea $\{(I_x, F_x)\}_{x\in X}$ una cadena en Q. Definimos

$$\begin{array}{llll} F: & \cup \{I_x\}_{x\in X} & \rightarrow & B & \text{por} \\ & \vec{v} & \mapsto & F_y(\vec{v}) & \text{si } \vec{v} \in I_y \end{array}.$$

a. Tenemos que ver que esta función está bien definida:
Si $\vec{v} \in I_y \wedge \vec{v} \in I_z$, dado que $(I_y, F_y), (I_z, F_z)$ forman parte de una cadena, entonces $(I_y, F_y) \leqslant (I_z, F_z)$ o $(I_z, F_z) \leqslant (I_y, F_y)$. Sin perder generalidad supongamos que $(I_y, F_y) \leqslant (I_z, F_z)$. Así tenemos que $F_z(\vec{v}) = F_{z|I_y}(\vec{v}) = F_y(\vec{v})$.

b. Veamos ahora que F es inyectiva: si $\vec{v} \neq \vec{w},\ \vec{v}, \vec{w} \in \cup \{I_x\}_{x\in X}$, entonces $\vec{v} \in I_y, \vec{w} \in I_z, y, z \in X$. Podemos suponer sin perder generalidad que $(I_y, F_y) \leqslant (I_z, F_z)$, por lo tanto $\vec{v}, \vec{w} \in I_z$. Además $F(\vec{v}) = F_y(\vec{v}) = F_z(\vec{v}) \neq F_z(\vec{w}) = F(\vec{v})$ (recordar que F_z es inyectiva). Por lo tanto F es inyectiva.

c. Veamos ahora que $\left[B \backslash F\left(\underset{x\in X}{\cup}\{I_x\}\right)\right] \cup \left(\underset{x\in X}{\cup}\{I_x\}\right)$ es $l.\ i$ en ${}_FV$.

$$\left[B \backslash F\left(\underset{x\in X}{\cup}\{I_x\}\right)\right] \cup \left(\underset{x\in X}{\cup}\{I_x\}\right) = \left[B \backslash \left(\underset{x\in X}{\cup}\{F(I_x)\}\right)\right] \cup \left(\underset{x\in X}{\cup}\{I_x\}\right)$$

$$= \left[\left(\underset{x\in X}{\cap}\{B \backslash F(I_x)\}\right)\right] \cup \left(\underset{x\in X}{\cup}\{I_x\}\right).$$

Así, si $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\} \subseteq \underset{x\in X}{\cap}\{B \backslash F(I_x)\}$ y $\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\} \subseteq \underset{x\in X}{\cup}\{I_x\}$, entonces $\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\} \subseteq I_y$, p. a. $y \in X$ (por ser $\{(I_x, F_x)\}_{x\in X}$ una cadena) y $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\} \subseteq B \backslash F(I_y)$. Entonces $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\} \subseteq B \backslash F(I_y) \cup I_y$, que es $l.\ i$. Hemos demostrado que cualquier subconjunto finito de

$$\left[B \backslash F\left(\underset{x\in X}{\cup}\{I_x\}\right)\right] \cup \left(\underset{x\in X}{\cup}\{I_x\}\right)$$

es $l.\ i$.

d. Por último, veamos que $\left[B \backslash F\left(\underset{x\in X}{\cup}\{I_x\}\right)\right], \left(\underset{x\in X}{\cup}\{I_x\}\right)$ son conjuntos ajenos:
Supongamos que hay $\vec{v} \in \left[B \backslash F\left(\underset{x\in X}{\cup}\{I_x\}\right)\right] \cap \left(\underset{x\in X}{\cup}\{I_x\}\right)$. Entonces

$\vec{v} \in \left[B \backslash F\left(\underset{x\in X}{\cup}\{I_x\}\right)\right] = \left[\left(\underset{x\in X}{\cap}\{B \backslash F(I_x)\}\right)\right]$ y $\vec{v} \in I_x$, p. a. $x \in X$. Entonces $\vec{v} \in B \backslash F(I_x) \cap I_x$, p. a. $x \in X \overset{\nabla}{\circ}$.

e. Con todo lo anterior, hemos demostrado que $\left(\cup\{I_x\}_{x\in X}, F\right)\in Q$. Además es claro que es cota superior para la cadena $\{(I_x, F_{x\in X})\}_{x\in X}$.

3. Por el Lema de Zorn, Q tiene algún elemento máximo (M, g). En particular $M >>\overset{g}{\to} B$, y $B\backslash g(M)\cup M \underset{l.\ i}{\hookrightarrow} V$.

Supongamos que $(\exists \vec{v}\in B\backslash g(M))\wedge(A\backslash M\neq\emptyset)$. Entonces

$$(B\backslash(g(M)\cup\{\vec{v}\}))\mathring{\cup} M \underset{l.\ i}{\hookrightarrow} V \tag{2.1}$$

además $\mathfrak{L}\left((B\backslash(g(M)\cup\{\vec{v}\}))\mathring{\cup} M\right)\neq V$ (pues de lo contrario

$$\vec{v}\in\mathfrak{L}\left(B\backslash(g(M)\cup\{\vec{v}\})\mathring{\cup} M\right),$$

y así $B\backslash(g(M))\mathring{\cup} M$ sería $l.\ d.\overset{\nabla}{\circ}$) entonces

$$A\backslash M\nsubseteq\mathfrak{L}\left((B\backslash(g(M)\cup\{\vec{v}\}))\mathring{\cup} M\right).$$

(en caso contrario, $A=(A\backslash M)\cup M\subseteq\mathfrak{L}\left((B\backslash(g(M)\cup\{\vec{v}\}))\mathring{\cup} M\right)$, por lo que $V=\mathfrak{L}(A)\subseteq\mathfrak{L}\left((B\backslash(g(M)\cup\{\vec{v}\}))\mathring{\cup} M\right)\overset{\nabla}{\circ}$.)

Como $A\backslash M\nsubseteq\mathfrak{L}\left((B\backslash(g(M)\cup\{\vec{v}\}))\mathring{\cup} M\right)$, $\exists\vec{w}\in A\backslash M$ tal que

$$\vec{w}\notin\mathfrak{L}\left(\left(B\backslash(g(M)\cup\{\vec{v}\})\mathring{\cup} M\right)\right). \tag{2.2}$$

Definamos $\bar{M}=M\cup\{\vec{w}\}$, y $\bar{g}$ por

$$\begin{tikzcd}
\bar{g}: & \bar{M} \arrow[r, "inyect."'] & B \\
g: & M \arrow[u, "inc."] \arrow[r, "inyect."'] \arrow[ur, phantom, "="] & B \arrow[u, "inc."'] & g(\vec{w})=\vec{v}
\end{tikzcd}$$

Tenemos que $\left(\bar{M},\bar{g}\right)\in Q$:

$B\backslash\left(\bar{g}\left(\bar{M}\right)\right)\cup\bar{M}=[B\backslash(g(M)\cup\{\vec{v}\})]\cup(M\cup\{\vec{w}\})$, que es $l.\ i.$ por 2.1 y 2.2. Además $[B\backslash(g(M)\cup\{\vec{v}\})]$ y $M\cup\{\vec{w}\}$ son ajenos (obsérvese 2.2).

Pero entonces $(M,g)\lneqq\left(\bar{M},\bar{g}\right)\overset{\nabla}{\circ}$. La contradicción viene de la hipótesis

$$(\exists\vec{v}\in B\backslash g(M))\wedge(A\backslash M\neq\emptyset).$$

Por lo tanto
$$B\backslash g(M) = \emptyset \vee A\backslash M = \emptyset.$$

4. Si $A\backslash M = \emptyset$ entonces $A \subseteq M \subseteq A$. Por lo que

$$A = M \text{ y } \left[(B\backslash g(A)) \overset{\circ}{\cup} A\right] \underset{l.i}{\hookrightarrow} V.$$

Pero como A es $l.$ $i.$ máximo, entonces $B\backslash g(A) = \emptyset$, por lo que

$$B \subseteq g(A) \subseteq B.$$

Por lo tanto g es una biyección entre A y B. Por lo tanto $|A| = |B|$.
Si $B\backslash g(M) = \emptyset$ entonces g es suprayectiva, por lo que $|A| \geq |M| \geq |B|$.
En cualquier caso, $|A| \geq |B|$. Por simetría, $|B| \geq |A|$. Por el Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein, $|A| = |B|$. ■

Teorema 26 *Si* $|A| \leqslant |B|$ *y* $|B| \leqslant |A|$, *entonces* $|A| = |B|$.

Demostración. ([2]).

Sean $A \overset{f}{\rightarrowtail} B$ y $A \overset{g}{\leftarrowtail} B$ funciones inyectivas.

Tomemos $b_1 \in B$. Si $b_1 \in \operatorname{Im}(f)$ entonces $\exists! a_1 \in A$ tal que $f(a_1) = b_1$. Si $a_1 \in \operatorname{Im}(g)$, entonces $\exists! b_2 \in B$ tal que $a_1 = g(b_2)$, continuamos mientras sea posible. Obtenemos una sucesión

$$b_1 \overset{f}{\longleftarrow\!|}\, a_1 \overset{g}{\longleftarrow\!|}\, b_2 \overset{f}{\longleftarrow\!|}\, a_2 \overset{f}{\longleftarrow\!|}\, ...$$

Tenemos tres posibilidades:

$$\text{La sucesión anterior termina en una } a_k \text{ porque } a_k \notin \operatorname{Im}(g). \tag{2.3}$$

$$\text{La sucesión anterior termina en una } b_j \text{ porque } b_j \notin \operatorname{Im}(f). \tag{2.4}$$

$$\text{La sucesión anterior no termina.} \tag{2.5}$$

Empezando con una a_1 en A, podemos repetir el anterior procedimiento, obteniendo una sucesión
$$a_1 \overset{g}{\longleftarrow\!|}\, b_1 \overset{f}{\longleftarrow\!|}\, a_2 \overset{g}{\longleftarrow\!|}\, b_2 \overset{f}{\longleftarrow\!|}\, ...$$

De nuevo, uno tiene las tres posibilidades mencionadas arriba.

Definamos
$$B_A =: \{b_1 \in B \mid (2.3)\},$$

$$B_A =: \{b_1 \in B \mid (2.4)\},$$

$$B_\infty =: \{b_1 \in B \mid (2.5)\},$$

y definamos análogamente, A_A, A_B, A_∞.

Ahora, observemos que

$$A_A \overset{f_{|A_A}}{\rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow} B_A$$

es una biyección:

Si la sucesión

$$a_1 \overset{g}{\longleftarrow\!|} b_1 \overset{f}{\longleftarrow\!|} a_2 \overset{g}{\longleftarrow\!|} b_2 \overset{f}{\longleftarrow\!|} .... \overset{f}{\longleftarrow\!|} a_k$$

terminó, entonces la sucesión

$$f(a_1) \overset{f}{\longleftarrow\!|} a_1 \overset{g}{\longleftarrow\!|} b_1 \overset{f}{\longleftarrow\!|} a_2 \overset{g}{\longleftarrow\!|} b_2 \overset{f}{\longleftarrow\!|} .... \overset{f}{\longleftarrow\!|} a_k$$

también terminó. Por lo tanto la correspondencia $a_1 \mapsto f(a_1)$ va de A_A a B_A. Es claro que todos los elementos de B_A provienen de un elemento de A_A. (Los elementos de B que no están en la imagen de f pertenecen a B_B).

De la misma manera,

$$B_B \overset{g_{|B_B}}{\rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow} A_B$$

es una biyección, y también

$$A_\infty \overset{f_{|A_\infty}}{\rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow} B_\infty$$

es una biyección.

Por lo tanto $|A_A| = |B_A|$, $|B_B| = |A_B|$ y $|A_\infty| = |B_\infty|$.

Por lo tanto $|A| = \left|A_A \mathring{\cup} A_B \mathring{\cup} A_\infty\right| = \left|B_A \mathring{\cup} B_B \mathring{\cup} B_\infty\right| = |B|$. ■

Ejercicios

Ejercicio 25 *Demostrar que en el ejemplo* 11, $\left(F^X, \tilde{+}, \hat{0},\right)$ *es un grupo conmutativo.*

Ejercicio 26 *Mostrar que* $\forall \alpha, \beta \in F$, $\forall A, B \in M_{n\times m}(F)$, *se tiene que*

$$(\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t.$$

Ejercicio 27 *Si* ${}_FV$ *es un espacio vectorial y* $\vec{v}, \vec{w} \in V$, *entonces* $\mathfrak{L}(\{\vec{v}, \vec{w}\}) = \mathfrak{L}(\{\vec{v}\}) + \mathfrak{L}(\{\vec{w}\}) = \{\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \mid \alpha, \beta \in F\}$.

Ejercicio 28 $\mathfrak{L}(\emptyset) = \mathfrak{L}\left(\left\{\vec{0}\right\}\right) = \left\{\vec{0}\right\}$.

Ejercicio 29 *Demuestre* $3) \Rightarrow 1)$ *en el Teorema* 13.

Ejercicio 30 *Demostrar que* $\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{I}(\mathbb{R}) \leqslant \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Ejercicio 31 *Demostrar que* $\mathbb{S}_n(\mathbb{R}), \mathbb{A}_n(\mathbb{R}) \leqslant M_n(\mathbb{R})$.

Ejercicio 32 *Considere el sistema de ecuaciones con coeficientes en* F*:*

$$\begin{aligned} x + 2y + 5s - t &= 0 \\ 3x + 6y + 3z + 21s - 2t &= 0 \\ 5x + 10y + 3z + 31s - t &= 0 \\ 3x + 6y + 2z + 19s + 2t &= 0. \end{aligned}$$

1. *Tome* $F = \mathbb{R}$ *y muestre que el conjunto* S *de soluciones es un subespacio de* $\mathbb{R}^5$. *Encuentre una base para* S.

2. *Lo correspondiente,. con* $F = \mathbb{Z}_5$.

3. *Lo correspondiente,. con* $F = \mathbb{Z}_7$.

4. *Lo correspondiente,. con* $F = \mathbb{Z}_{11}$.

Ejercicio 33 *Demostrar que* $\frac{1}{2}(C + C^t)$ *es simétrica y* $\frac{1}{2}(C - C^t)$ *es antisimétrica,* $\forall C \in M_n(\mathbb{R})$.

Ejercicio 34 *Muestre que* $\left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua y } 0 = \int_0^1 f\right\} \leqslant \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Ejercicio 35 *Muestre que*

$$S = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ sus dos primeras derivadas existen y } f''(x) = -f(x) \right\}$$

es un subespacio del espacio

$$\mathcal{C}_{\infty}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathbb{R}^{2} \mid f^{(n)}(x) \text{ existe } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \right\}.$$

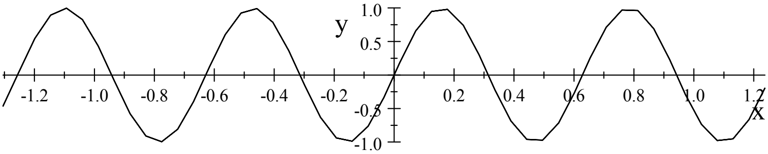
Ejercicio 36 *Muestre que sen(x) y cos(x) son un conjunto linealmente independiente del espacio S del ejercicio anterior.*

Ejercicio 37 *Construir un polinomio cuya gráfica pase por los puntos*

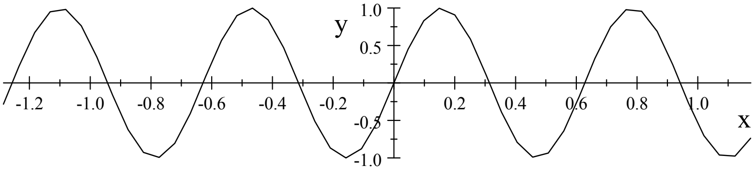
$$(-3,3), (-1,-1), (0,0), (5,-1).$$

Ejercicio 38 *Digamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene período $\kappa > 0$ si $f(x+\kappa) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. En este caso diremos que f es periódica. Por ejemplo, sen(x) tiene período 2π.*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de período κ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de período $\lambda = r\kappa, r \in \mathbb{Q} \backslash \{0\} \Rightarrow f + g$ es periódica.
2. Diga un período para $f + g$.
3. ¿Es $W = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ tiene período } 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \}$ un subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?
4. ¿$\{\text{sen}(nx) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq W$?



sen(10x)



sen(10x+2π10)

Ejercicio 39 *¿Es* $\{sen(nx) \mid n \in \{1,2,3\}\}$ *l. i en* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$*? .*

Ejercicio 40 *Sea* $G =$

$$\left\{ \begin{array}{c} (1,2,3,4,5)\,,(2,1,4,3,5)\,,(1,1,1,1,1)\,,(1,-2,3,-4,-1)\,, \\ (0,1,0,1,0)\,,(3,3,7,7,10)\,,(2,-1,4,-3,0) \end{array} \right\}$$

1. *Encontrar un subconjunto l. i. de* G *que genere el mismo subespacio que* G*.*
2. *Encontrar un subconjunto l. i. de* G *que genere el mismo subespacio que* G *y que contenga los elementos* $(0,1,0,1,0)\,,\ (3,3,7,7,10)$*.*

Ejercicio 41 *¿Cuántas matrices escalonadas y reducidas hay en* $M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_2)$?

Ejercicio 42 *Respecto al ejercicio anterior, ¿cuántas matrices escalonadas y reducidas hay de rangos* $1,2,3,$ *respectivamente?*

Ejercicio 43 *¿Cuántas matrices antisimétricas hay de* 5×5 *con coeficientes en* $\mathbb{Z}_3$*? Dé una base para el espacio de las matrices antisimétricas de* 5×5 *con coeficientes en* $\mathbb{Z}_3$*.*

Ejercicio 44 *Construya un polinomio* $s(x)$*cuya gráfica pase por los puntos*

$$(-3,3)\,,(-2,-1)\,,(-1,0)$$

y tal que su derivada en 0 *sea* 1*.*

Ejercicio 45 *Construya un polinomio* $s(x)$*cuya gráfica pase por los puntos*

$$(-3,3)\,,(-2,-1)\,,(-1,0)$$

y tal que su integral de -1 *a* 1*sea* 0*.*

Ejercicio 46 *Muestre que* $\{\vec{u},\vec{v}\}_{\neq}$ *es l. i.* $\Leftrightarrow$ $\{\vec{u}+\vec{v},\ \vec{u}-\vec{v}\}_{\neq}$ *es l. i.*

Ejercicio 47 *Muestre que la afirmación anterior es falsa si uno retira la hipótesis de que los elementos sean distintos (tome* $\vec{v}=\vec{0}$ *y vea que pasa).*

Ejercicio 48 *Muestre que son equivalentes para* $W_1, W_2 \leqslant {}_F V$*:*

1. $V = W_1 \bigoplus W_2$*. Recuerde que esto significa que*

$$V = W_1 + W_2 \wedge W_1 \cap W_2 = \left\{\vec{0}\right\}.$$

2. $\forall \gamma_1$ *base de* $W_1, \forall \gamma_2$ *base de* W_2, γ_1 *es ajena con* γ_2 *y* $\gamma_1 \mathring{\cup} \gamma_2$ *es una base de* V.

Ejercicio 49 *Considere* $\mathbb{T}_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A_{i,j} = 0, i > j\}$. *¿Cuál es la dimensión de* $\mathbb{T}_n$*?.*

Ejercicio 50 *Considere* $\mathbb{L}_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A_{i,j} = 0, i < j\}$. *¿Cuál es la dimensión de* $\mathbb{L}_n$*?*

Ejercicio 51 *Considere* $\mathbb{D}_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A_{i,j} = 0, i \neq j\}$. *¿Cuál es la dimensión de* $\mathbb{D}_n$*?*

Ejercicio 52 *Considere* $\mathbb{S}_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A_{i,j} = A_{j,i}, \forall i, j\}$. *¿Cuál es la dimensión de* $\mathbb{S}_n$*?*

Ejercicio 53 *Compruebe que*

$$\dim(\mathbb{T}_n + \mathbb{S}_n) = \dim(\mathbb{T}_n) + \dim(\mathbb{S}_n) - \dim(\mathbb{T}_n \cap \mathbb{S}_n).$$

Se define el rango de una matriz A como $\dim(\mathfrak{L}(\{A_{\underline{1}}, ..., A_{\underline{m}}\}))$, es decir la dimensión del espacio generado por los renglones de A.

Ejercicio 54 *Demostrar que el rango de una matriz escalonada es el número de renglones distintos de cero, notando que un renglón distinto de cero no puede ser combinación lineal de los renglones debajo.*

Ejercicio 55 *Demostrar que si las matrices* $A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ *son reducidas y escalonadas y tienen el mismo espacio de renglones, entonces* $A = B$.

Ejercicio 56 *Suponga que las matrices* A *y* B *son reducidas y escalonadas y que se obtienen aplicando operaciones elementales a la misma matriz* C. *Demuestre que* $A = B$.

Ejercicio 57 *Dé una base para las matrices diagonales de* 3×3 *con coeficientes en* $\mathbb{R}$.

Ejercicio 58 *Dé una base para las matrices simétricas de* 4×4 *con coeficientes en* $\mathbb{R}$.

Ejercicio 59 *Dé una base para las matrices antisimétricas de* 4×4 *con coeficientes en* $\mathbb{R}$.

Ejercicio 60 *Dé una base para el espacio de las matrices triangulares superiores (ceros debajo de la diagonal principal) de* 3×3 *con coeficientes en* $\mathbb{R}$.

Ejercicio 61 *Muestre que el conjunto* $\{(1,2,3,4),(0,1,4,3)\}$ *se puede completar a una base de* $\mathbb{R}^4$, *con cualesquiera dos elementos de la base canónica. Sugerencia: Muestre que si uno forma una matriz que tenga como renglones a los elementos del conjunto dado y dos elementos de la base canónica (por ejemplo* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *tiene rango* 4.*)*

Ejercicio 62 *Tomemos el conjunto* $\{(1,2,3,4),(0,2,3,4)\}$. *Entonces la matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *tiene rango* 3, *por lo que el conjunto*

$$\{(1,2,3,4),(0,2,3,4),(1,0,0,0),(0,0,0,1)\}$$

es l. d. Encuentre todas las bases de $\mathbb{R}^3$ *que contienen a* $(1,2,3,4),(0,2,3,4)$ *y a dos elementos de la base canónica.*

Ejercicio 63 *Sean*

$$\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 2 \\ -0 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \right\}$$

en $\mathbb{R}^4$. *Llamemos* W_1 *al subespacio generado por el primer conjunto de vectores y* W_2 *al generado por el segundo conjunto de vectores. Encontrar las dimensiones de* $W_1, W_2, W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$. *Encontrar bases*

$$\beta_3 \supseteq \gamma \supseteq \beta_1 \subseteq \beta_2 \subseteq \beta_3, \gamma,$$

de los subespacios correspondientes al diagrama.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & W_{1}+W_{2} & & \\
 & & \uparrow & & \\
 & & \beta_3 & & \\
 & \nearrow & & \nwarrow & \\
W_1 \hookleftarrow \beta_2 & & & & \gamma \hookrightarrow W_2 \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & \beta_1 & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & W_{1}\cap W_{2} & &
\end{array}.
$$

Ejercicio 64 *Muestre que hay bases como en el ejercicio anterior, para cualesquiera dos subespacios W_1, W_2 de un espacio vectorial $_FV$. (No suponga que* $\dim(V)$ *es finita).*

Ejercicio 65 *Sea $X \subseteq \mathbb{R}$, definamos* $N_X =: \left\{\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \mid f(r) = 0, \forall r \in X\right\}$.

1. Muestre que $N_X \leqslant \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Suponga que $Y \subseteq \mathbb{R}$. Muestre que $N_X \cap N_Y = N_{X\cup Y}$.
3. Demuestre que
$$X \mathring{\cup} Y = \mathbb{R} \Leftrightarrow N_X \cap N_Y = \left\{\hat{0}\right\}.$$
4. $(X \cup Y) \subsetneqq \mathbb{R} \Rightarrow N_X \cap N_Y \neq \left\{\hat{0}\right\}$.
5. $N_X + N_Y \subseteq N_{X\cap Y}$.
6. $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \subseteq N_X + N_Y\right) \Rightarrow (X \cap Y = \emptyset)$
7. $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = N_X \bigoplus N_Y\right) \Leftrightarrow \left[(X \cap Y = \emptyset) \wedge \left(X \mathring{\cup} Y = \mathbb{R}\right)\right]$.
8. $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, tal que $g(r) \neq 0 \Rightarrow N_{\{r\}} \bigoplus \mathfrak{L}(g) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
9. Usando lo anterior muestre que $N_{\{r\}}$ es máximo en $\left[\left\{\hat{0}\right\}, \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)$.

Ejercicio 66 *Encuentre un subespacio W máximo en $\left[\left\{\hat{0}\right\}, \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)$ tal que*

$$(W \neq N_r) \quad \forall\ r \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 67 *Demuestre que si A, B son conjuntos, entonces*

$$(|A| \leqslant |B|) \vee (|B| \leqslant |A|)\,.$$

Sugerencia: Considere $\Im = \left\{\left(X, X \overset{f_X}{>\!\!>\!\!\to} B\right) \mid X \subseteq A\right\}$, *defina un orden* $\blacktriangleleft$ *en* $\Im$ *por:* $\left(X, X \overset{f_X}{>\!\!>\!\!\to} B\right) \blacktriangleleft \left(Y, Y \overset{f_Y}{>\!\!>\!\!\to} B\right)$ *si* $(X \subseteq Y$ *y*

$$\begin{array}{ccll} Y & \overset{f_Y}{>\!\!>\!\!\to} B & B & \\ \uparrow & = \nearrow^{f_X} & & , \\ X & & & \end{array}$$

es decir, $f_{Y_{|X}} = f_X$.
Muestre que $\Im$ *no es vacío, que* $\blacktriangleleft$ *es un orden parcial, que toda cadena en* $\Im$ *está acotada por arriba. Concluya que* $\Im$ *contiene un elemento máximo* (M, f_M). *Observe que* $M = A \vee f(M) = B$. *Concluya.*

Ejercicio 68 *Muestre que son equivalentes para* $W, Z \leqslant {}_F V$:

1. $V = W \bigoplus Z$.
2. Z *es mínimo en* $\{U \leqslant V \mid W + U = V\}$.

Ejercicio 69

1. *Muestre que cualquier segmento de recta en el plano (que tenga más de un punto) tiene tantos puntos como el intervalo* $[0, 1]$.
2. *Use lo anterior para mostrar que cualesquiera dos intervalos cerrados infinitos tienen la misma cardinalidad.*
3. *Muestre también que cualesquiera dos intervalos abiertos no vacíos tienen la misma cardinalidad.*
4. *Usando el Teorema de Cantor-Schröeder-Bernstein muestre que un intervalo abierto no vacío tiene la misma cardinalidad que un intervalo cerrado infinito (y la misma cardinalidad de un intervalo que incluye un extremo y excluye al otro, como* $(0, 2]$ *o* $[2, 8)$*).*
5. *Muestre que el intervalo* $[0, 1)$ *tiene tantos puntos como* $[0, \infty)$.
6. *Muestre que* $(-1, 1)$ *tiene tantos puntos como* $\mathbb{R}$.

Ejercicio 70 *Use el Teorema de Cantor-Schröeder-Bernstein para demostrar que*

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}\times\mathbb{N}|.$$

Ejercicio 71 *Sugerencia: muestre que las siguientes funciones son inyectivas.*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & >\!\!>\!\!\rightarrow & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ n & \longmapsto & (n,0) \end{array}, \begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & >\!\!>\!\!\rightarrow & \mathbb{N} \\ (n,m) & \longmapsto & 2^n 3^m \end{array}$$

Ejercicio 72 *Muestre que la unión de dos conjuntos ajenos con la misma cardinalidad que* $\mathbb{N}$, *sigue siendo de la misma cardinalidad de* $|\mathbb{N}|$. *Por ejemplo, Muestre que*

$$\mathbb{N}\times\{0,1\} = \left\{(n,0) \mid n\in\mathbb{N}^+\right\} \mathring{\cup} \left\{(0,m) \mid m\in\mathbb{N}^+\right\} \mathring{\cup} \{(0,0)\}$$

tiene $|\mathbb{N}|$ *elementos. Sugerencia: el primer uniendo corresponde biyectivamente con los pares positivos, el segundo con el conjunto de impares.*

Ejercicio 73 *Muestre que si* F *es finito y ajeno con* X *infinito entonces* $|X\cup F| = |X|$. *Sugerencia: suponga que* $F=\{x_1,x_2,...,x_k\}$ *Supongamos además que* $F\cap\mathbb{N}=\emptyset$. *Note que* $\{0,1,...,k-1\}\cup\{k,k+1,....\}=\mathbb{N}$ *y que* $\mathbb{N}\xrightarrow{+k}\{k,k+1,....\}$ *es una biyección. Concluya que*

$$|\mathbb{N}| = |\{0,1,...,k-1\}\cup\{k,k+1,....\}| = \left|F\mathring{\cup}\mathbb{N}\right|.$$

Ahora use que X *incluye una copia de* $\mathbb{N}$, N *digamos. Así que* $X\cup F = (X\backslash N)\cup N = (X\backslash N)\cup(N\cup F)$.

Ejercicio 74 *(Opcional). Muestre, usando el Lema de Zorn, que si* X *es un conjunto infinito entonces*

$$|X| = |X\times\{0,1\}|$$

Sugerencia: Sea

$$\mathcal{D} = \left\{\left(Z, Z >\!\!>\!\!\xrightarrow{f_Z}\!\!\!\!\rightarrow Z\times\{0,1\}\right) \mid \emptyset\neq Z\subseteq A,\right\}$$

ordenado por: $(Y,f_Y)\propto(Z,f_Z)$ *si* $Y\subseteq Z$ *y*

$$\begin{array}{rcl} Z & >\!\!>\!\!\xrightarrow{f_Z}\!\!\!\!\rightarrow & Z\times\{0,1\} \\ \textit{inclus.}\uparrow & = & \uparrow\textit{inclus.} \\ Y & >\!\!>\!\!\xrightarrow{f_Y}\!\!\!\!\rightarrow & Y\times\{0,1\} \end{array}$$

la inclusión. Note que $\mathcal{D}$ no es vacío porque como X es infinito, entonces X incluye una copia de $\mathbb{N}$.
Note también que si (M, f_M) es un elemento máximo en $\mathcal{D}$, entonces el conjunto $A \backslash M$ no puede contener una copia de $\mathbb{N}$, por lo que debe ser finito.

Capítulo 3

Transformaciones lineales

3.1. Transformaciones lineales, núcleos e imágenes

Definición 38 *Sean ${}_FV$, ${}_FW$ espacios vectoriales. Una función $T : V \to W$ es lineal si:*

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$, $T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$,
2. $\forall \alpha \in F, \forall \vec{x} \in V$, $T(\alpha\vec{x}) = \alpha T(\vec{x})$.

Observación 23 *Notemos que si $T : V \to W$ es una función, entonces podemos definir otra función*

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \overset{T\times T}{\to} & W \times W \\ (\vec{v}_1, \vec{v}_2) & \longmapsto & (T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2)) \end{array}.$$

Entonces la condición 1) *anterior se puede expresar diciendo que el diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} (\vec{v}_1,\vec{v}_2) & & \longmapsto & & \vec{v}_1+\vec{v}_2 \\ & V\times V & \overset{+}{\to} & V & \\ \bar{\downarrow} & \downarrow_{T\times T} & = & \downarrow_T & \bar{\downarrow} \\ & W\times W & \overset{+}{\to} & W & \\ (T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2)) & & \longmapsto & & T(\vec{v}_1)+T(\vec{v}_2)=T(\vec{v}_1+\vec{v}_2) \end{array}$$

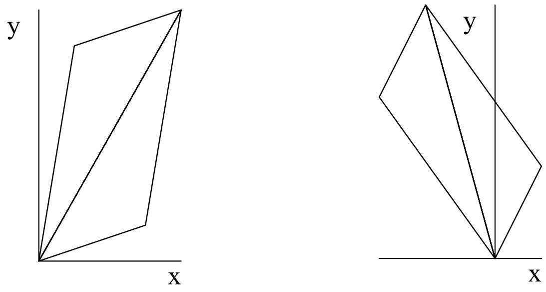
conmuta. También se puede expresar diciendo que "da lo mismo primero sumar en V y después aplicar T (obteniendo $T(\vec{v}_1+\vec{v}_2)$) que primero aplicar T y después sumar en W (obteniendo $T(\vec{v}_1)+T(\vec{v}_2)$).

Observación 24 *La condición* 2) *anterior se puede expresar diciendo que el diagrama*

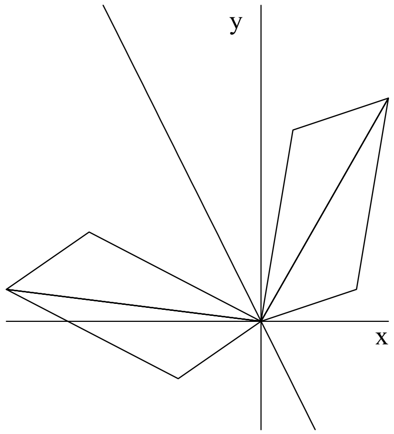
$$\begin{array}{ccccc}
(c,\vec{v}) & & \longmapsto & & c\vec{v} \\
 & F\times V & \dot{\rightarrow} & V & \\
\bar{\downarrow} & \downarrow_{Id_F\times T} & = & \downarrow_T & \bar{\downarrow} \\
 & F\times W & \dot{\rightarrow} & W & \\
(c,T(\vec{v})) & & \longmapsto & & c\cdot T(\vec{v})=T(c\vec{v})
\end{array}$$

conmuta. Es decir que "da lo mismo primero multiplicar por c y después aplicar T, que primero aplicar T y después multiplicar por c".

1. R_θ la rotación por un ángulo θ.



2. $\sigma_\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (reflexión sobre una línea ℓ).



3. $\begin{array}{cccc} Id_V : & V & \to & V \\ & \vec{v} & \mapsto & \vec{v} \end{array}$.

4. $\begin{array}{ccc} W & \overset{incl.}{\hookrightarrow} & V \\ \vec{w} & \mapsto & \vec{v} \end{array}$.

5. $\begin{array}{cccc} \hat{0}_V : & V & \to & V \\ & \vec{v} & \mapsto & \vec{0} \end{array}$.

Ejercicio 75 *F campo, $T : F \to F$ lineal $\Rightarrow \exists r \in F$ tal que $T = r \cdot \_$. (Es decir, toda función lineal de F en F es multiplicar por un escalar).*

Definición 39 *Para $T : V \to W$ lineal, se define el núcleo de T, por $Ker(T) =:$ $\left\{\vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) = \vec{0}\right\}$.*

Teorema 27 *Si $T : V \to W$ es una función lineal, entonces:*

1. *$Z \leqslant V \Rightarrow T(Z) \leqslant W$.*
2. *$Y \leqslant W \Rightarrow T^{-1}(Y) \leqslant V$.*

Demostración.

- Notemos primero que una función lineal, envía $\vec{0}$ a $\vec{0}$:
$T\left(\vec{0}\right) = T\left(\vec{0} + \vec{0}\right) = T\left(\vec{0}\right) + T\left(\vec{0}\right) \Rightarrow$
$\vec{0} = -T\left(\vec{0}\right) + T\left(\vec{0}\right) = -T\left(\vec{0}\right) + T\left(\vec{0}\right) + T\left(\vec{0}\right) = T\left(\vec{0}\right)$

1.
   a) Supongamos que $Z \leqslant V$. Entonces $\vec{0} = T\left(\vec{0}\right) \in T(Z)$
   b) $T(\vec{z}_1) + T(\vec{z}_2) = T(\vec{z}_1 + \vec{z}_2) \in T(Z)$.
   c) $c \cdot T(\vec{z}) = T(c \cdot \vec{z}) \in T(Z)$.

2. Supongamos ahora que $Y \leqslant W$.

   a) Entonces $\vec{0} \in T^{-1}(Y)$ pues $T\left(\vec{0}\right) = \vec{0} \in Y$.
   b) $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in T^{-1}(Y) \Rightarrow T(\vec{x}_1) + T(\vec{x}_2) \in Y \Rightarrow T(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = T(\vec{x}_1) + T(\vec{x}_2) \in Y$.

c) $\vec{x} \in T^{-1}(Y), c \in F \Rightarrow T(\vec{x}) \in Y, c \in F \Rightarrow cT(\vec{x}) \in Y \Rightarrow T(c\vec{x}) = cT(\vec{x}) \in Y \Rightarrow c\vec{x} \in T^{-1}(Y)$. ∎

Podemos notar los siguientes casos particulares.

Teorema 28 *Si $T : V \to W$ es lineal, entonces*

1. *$Ker(T) =: \left\{\vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) = \vec{0}\right\}$ es un subespacio de V.*
2. *$T(V) \leqslant W$.*

Demostración. 1. Simplemente notemos que $\mathrm{Ker}(T) = T^{-1}\left\{\vec{0}_W\right\}$.
2. Notemos que $V \leqslant V$. ∎

Ejercicio 76 ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R} \xrightarrow{c\cdot}{}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ *es una función lineal* $\forall c \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 40 *La función identidad en un espacio vectorial, es una función lineal: $Id_V : {}_F V \to_F V$.*

Ejemplo 41 *Si ${}_F W \leqslant {}_F V$ entonces la función inclusión $W \hookrightarrow V$ es una función lineal.*

Ejemplo 42 *La función constante* $\begin{array}{cccc} \hat{0}: & {}_F V & \to & {}_F W \\ & \vec{v} & \longmapsto & \vec{0}_W \end{array}$ *es lineal.*

Teorema 29 *Son equivalentes para $T : V \to W$ lineal:*

1. *T es inyectiva.*
2. *$Ker(T) = \left\{\vec{0}\right\}$.*
3. *$\beta \in \mathcal{J}(V) \Rightarrow T(\beta) \in \mathcal{J}(W), \forall \beta \in \mathcal{J}(V)$.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) $T\left(\vec{0}\right) = \left(\vec{0}\right) \Rightarrow \vec{0} \in \mathrm{Ker}(T) \Rightarrow \left\{\vec{0}\right\} \leqslant \mathrm{Ker}(T)$. Ahora, si T es inyectiva, entonces $\vec{0}$ es el único vector que se mapea al $\vec{0}_W$. Por lo tanto $\mathrm{Ker}(T) = \left\{\vec{0}\right\}$.

2) $\Rightarrow$ 3) Supongamos que $\beta \in \mathcal{J}(V)$ pero que $T(\beta)$ es $l.\ d.$ Entonces $T(\beta)$ incluye un subconjunto finito $l.\ d.$, que es de la forma $T(\gamma)$ con

$$\gamma \subseteq \beta, .\gamma \text{ finito.}$$

Supongamos que

$$\gamma = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k\}_{\neq}, T(\gamma) = \{T(\vec{v}_1), ..., T(\vec{v}_k)\}.$$

Si $T(\vec{v}_i) = T(\vec{v}_j)$ entonces $T(\vec{v}_i) - T(\vec{v}_j) = \vec{0}$, entonces $\vec{0} = T(\vec{v}_i) - T(\vec{v}_j) = T(\vec{v}_i - \vec{v}_j)$. Por lo tanto $\vec{v}_i - \vec{v}_j \in$Ker$(T) = \left\{\vec{0}\right\}$. Entonces $\vec{v}_i = \vec{v}_j$. Así que podemos suponer que los elementos de $\{T(\vec{v}_1), ..., T(\vec{v}_k)\}$ son distintos. Como es *l. d.* por hipótesis, entonces hay un vector en

$$T(\vec{v}_1), ..., T(\vec{v}_k)$$

que es *c.l.* de los anteriores y no es $T(\vec{v}_1)$, ya que no es $\vec{0}_W$, puesto que $v_1 \neq \vec{0}_V$. Digamos que

$$T(\vec{v}_j) = T(\vec{v}_1) + ... + T(\vec{v}_{j-1}),$$

de donde

$$T(\vec{v}_1) + ... + T(\vec{v}_{j-1}) - T(\vec{v}_j) = \vec{0}.$$

por lo tanto

$$\vec{v}_1 + ... + \vec{v}_{j-1} - \vec{v}_j \in \text{Ker}(T)$$

por lo que $\vec{v}_1 + ... + \vec{v}_{j-1} - \vec{v}_j = \vec{0}$, pero entonces $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_j\}$ es *l. d.*$\underset{\circ}{\nabla}$

3) $\Rightarrow$ 2) Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, entonces $\{\vec{u}\}$ es *l. i.* Por lo tanto $\{T(\vec{u})\}$ es *l. i.*, así que $T(\vec{u}) \neq \vec{0}$. Por lo tanto, $V \backslash \left\{\vec{0}\right\} \subseteq V \backslash (\text{Ker}(T))$, es decir que

$$\text{Ker}(T) \subseteq \left\{\vec{0}\right\} \subseteq \text{Ker}(T).$$

2) $\Rightarrow$ 1)

$$T(\vec{u}) = T(\vec{v}) \Rightarrow T(\vec{u}) - T(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow T(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{u} - \vec{v} \in \text{Ker}(T) = \left\{\vec{0}\right\} \Rightarrow$$
$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}.$$

■

Teorema 30 *Son equivalentes para $T: V \to W$ lineal:*

1. *T es suprayectiva.*

2. $\beta \in \mathcal{G}(V) \Rightarrow T(\beta) \in \mathcal{G}(W), \forall \beta \in \mathcal{G}(V)$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que T es suprayectiva y que $\beta \in \mathcal{G}(V)$. Entonces el único subespacio de ${}_FV$ que incluye a β es V (recuerde que $\mathfrak{L}(\beta)$ es el menor subespacio que incluye a β). Queremos ver que W es el único subespacio que incluye a $T(\beta)$.

Si $T(\beta) \subseteq Z \lneqq W$, entonces $\beta \subseteq T^{-1}(Z) \leqslant V$. Como acabamos de observar, V es el único subespacio que incluye a β. Por lo tanto $T^{-1}(Z) = V$. Pero aplicando T, y usando que T es suprayectiva, tenemos que $Z = T(T^{-1})(Z) = T(V) = W \underset{\circ}{\nabla} (Z \lneqq W)$.

2) $\Rightarrow$ 1) Tomemos β una base de V, entonces $T(\beta) \subseteq T(V) \leqslant W$, por lo que $\mathfrak{L}(T(\beta)) \leqslant T(V)$. Pero por 2), tenemos que $\mathfrak{L}(T(\beta)) = W$. De esta manera,

$$W = \mathfrak{L}(T(\beta)) \leqslant T(V) \leqslant W.$$

Es decir, $W = T(V)$. ■

Ejemplos 43 *1. Los únicos subespacios de $\mathbb{R}$ son $\{0\}$ y $\mathbb{R}$. Entonces toda función lineal $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \neq \hat{0}$ es una biyección.*

2. *$sen(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no es lineal.*

3. *$x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no es lineal.*

4. *$\mathbb{R} \xrightarrow{e^{(\ )}} \mathbb{R}$ no es lineal pues 0 no está en la imagen de $e^{(\ )}$.*

5. *$\mathbb{R} \xrightarrow{\|\ \|} \mathbb{R}$ no es lineal.*

Ejemplo 44 *$(\ )^t : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ y $Id : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ son funciones lineales. Entonces $(\ )^t - Id : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ es una función lineal.*

Ejemplo 45 *1. $Ker\big((\ )^t - Id\big) = \{A \mid A^t - A = \mathbb{O}\} = \{A \mid A^t = A\}$ el subespacio de las matrices simétricas.*

2. *$\big((\ )^t - Id\big)(M_n(\mathbb{R})) = \{A^t - A \mid A \in M_n(\mathbb{R})\} \leqslant \mathbb{A}_n(\mathbb{R})$ el espacio de las matrices antisimétricas.*

Ejercicio 77 *Muestre que vale la igualdad en el ejemplo anterior, es decir que*

$$\left\{A^t - A \mid A \in M_n(\mathbb{R})\right\} = \mathbb{A}_n(\mathbb{R}).$$

Ejercicio 78 $\mathbb{R} \overset{\cdot (-1)}{\to} \mathbb{R}$ *es una función lineal. Muestre que la función*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f & \mapsto & f(-x) \end{array}$$

es una función lineal ¿o no?.

3.2. La propiedad universal de las bases

Teorema 31 (Propiedad universal de las bases) *Son equivalentes para* $\beta \subseteq_F V$ *:*

1. β *es una base para* ${}_F V$.

2. $\forall f : \beta \to W$ *función,* $\exists! \hat{f} : V \to W$ *función lineal tal que conmuta el triángulo*

$$\begin{array}{ccc} \beta & \hookrightarrow & V \\ f \downarrow & \swarrow_{\hat{f}} & \\ W & & \end{array} .$$

Demostración. $\Rightarrow$) Sean $\beta \underset{base}{\hookrightarrow} V$, y $f : \beta \to W$. Definamos $\hat{f} : V \to W$ por:

$$\hat{f}(\vec{x}) = \sum c_i f(\vec{v}_i),$$

en donde $\vec{0} \neq \vec{x} = \sum c_i \vec{v}_i$, con $\vec{v}_i \in \beta$, $c_i \neq 0$. (Recuérdese que la expresión de $\vec{x}$ como *c.l.* de elementos de β con coeficientes distintos de 0 es única porque β es una base de V.) Es claro que

$$\hat{f}\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$$

si $\vec{f}$ ha de ser lineal.

Veamos que $\vec{f}$ es lineal:

si $\vec{u}, \vec{v} \in V$, escribamos

$$\vec{u} = \sum c_i \vec{v}_i, \vec{v}_i \in \beta$$

y

$$\vec{v} = \sum d_i \vec{v}_i, \vec{v}_i \in \beta$$

podemos suponer agregando coeficientes 0 arriba y abajo si es necesario, que las $\vec{v}_i$ que aparece en cada suma son las mismas. Así:

$$\begin{aligned}\hat{f}\left(\vec{u}+\vec{v}\right) &= \hat{f}\left(\left[\sum c_i\vec{v}_i\right]+\left[\sum d_i\vec{v}_i\right]\right)= \\ &= \hat{f}\left(\sum\left(c_i+d_i\right)\vec{v}_i\right)=\sum\left(c_i+d_i\right)f\left(\vec{v}_i\right)=\end{aligned}$$

$$=\sum\left[c_if\left(\vec{v}_i\right)+d_if\left(\vec{v}_i\right)\right]=\sum c_if\left(\vec{v}_i\right)+\sum d_if\left(\vec{v}_i\right)=\hat{f}\left(\vec{u}\right)+\hat{f}\left(\vec{v}\right).$$

Además

$$\hat{f}\left(c\cdot\vec{v}\right)=\hat{f}\left(c\cdot\left(\sum d_i\vec{v}_i\right)\right)=\hat{f}\left(c\cdot\left(\sum d_i\vec{v}_i\right)\right)=\hat{f}\left(\sum c\left(d_i\vec{v}_i\right)\right)=$$

$$=\hat{f}\left(\sum\left(cd_i\right)\vec{v}_i\right)=\sum\left(cd_i\right)f\left(\vec{v}_i\right)=\sum c\left(d_if\left(\vec{v}_i\right)\right)=c\sum d_if\left(\vec{v}_i\right)=$$

$$=c\hat{f}\left(\vec{v}\right).$$

Debe ser claro que $\hat{f}_{|\beta}=f$. Que $\hat{f}$ es la única función lineal $V\to W$ con esa propiedad se deja como ejercicio.

$\Leftarrow$) Supongamos que β tiene la propiedad enunciada en 2).

Primero veamos que β es $l.\ i.$ Si existiera $\vec{x}\in\beta$ tal que $\vec{x}\in\mathfrak{L}\left(\beta\setminus\{\vec{x}\}\right)$ definamos la función

$$\begin{array}{rccl} f: & \beta & \longrightarrow & F \\ & \vec{x} & \longmapsto & 1 \\ & \vec{y} & \longmapsto & 0 \text{ si } \vec{y}\neq\vec{x}\end{array}.$$

Por hipótesis habría una función lineal $\hat{f}:V\to F$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} \beta \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[dl, "\hat{f}"] \\ F & \end{tikzcd}.$$

De la definición de f se sigue que $\hat{f}_{|\mathfrak{L}(\beta\setminus\{\vec{x}\})}=\hat{0}_{|\mathfrak{L}(\beta\setminus\{\vec{x}\})}$. Entonces

$$1=\hat{f}\left(\vec{x}\right)=\hat{f}_{|\mathfrak{L}(\beta\setminus\{\vec{x}\})}\left(\vec{x}\right)=\hat{0}_{|\mathfrak{L}(\beta\setminus\{\vec{x}\})}\left(\vec{x}\right)=0\underset{\circ}{\nabla}.$$

Esta contradicción muestra que β es $l.\ i.$

Veamos ahora que $\beta\in\mathcal{G}\left(V\right)$. Supóngase que $\mathfrak{L}\left(\beta\right)\lneqq V$, entonces $\exists W\neq\left\{\vec{0}\right\}$ tal que $V=\mathfrak{L}\left(\beta\right)\bigoplus W$. Consideremos la función inclusión $\beta\hookrightarrow V$, por hipótesis, $\exists! V\overset{T}{\to}W$ tal que

$$\begin{tikzcd} \beta \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathfrak{L}\left(\beta\right)\bigoplus W=V \arrow[dl, "T"] \\ V & \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

conmuta, la función

$$\begin{array}{rlcl} T: & \mathfrak{L}(\beta)\bigoplus W & \to & V \\ & \vec{x}+\vec{w} & \mapsto & \vec{x} \end{array} \text{ si } \vec{x}\in\mathfrak{L}(\beta), \vec{w}\in W.$$

Es una función lineal con esa propiedad. Sin embargo, también Id_V hace conmutativo el diagrama 3.1. Pero $Id_V \neq T$, contradiciendo la hipótesis de unicidad. ■

La propiedad universal nos dice, entre otras cosas, que para definir una función lineal $V \to W$, basta definir la función en una base de V.

Ejemplo 46 *Sea $\beta = \{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\}$ la base canónica para $\mathbb{R}^2$, sea*

$$\begin{array}{rccl} f: & \beta & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \vec{e}_1 & \mapsto & (2,3) \\ & \vec{e}_2 & \mapsto & \left(-5,\sqrt{2}\right) \end{array}$$

entonces $\hat{f}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es tal que

$$\hat{f}(x,y) = \hat{f}(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2) =$$

$$= x(2,3) + y\left(-5,\sqrt{2}\right) = \left(2x-5y, 3x+y\sqrt{2}\right).$$

Corolario 6 *Sea β una base para $_FV$ y sean $T,S : V \rightrightarrows W$ dos funciones lineales. Son equivalentes:*

1. *$T = S$.*

2. *$T_{|\beta} = S_{|\beta}$.*

Demostración. 1) ⇒ 2) Es obvio.

2) ⇒ 1) Tanto T como S están en un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \beta & \hookrightarrow & V \\ {\scriptstyle T_{|\beta}=S_{|\beta}}\downarrow & \swarrow^{T} & \\ W & & \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \beta & \hookrightarrow & V \\ {\scriptstyle T_{|\beta}=S_{|\beta}}\downarrow & \swarrow^{S} & \\ W & & \end{array}$$

la unicidad en la propiedad universal obliga la igualdad de T y S. ■

Lo anterior se expresa diciendo lo siguiente “para ver que dos funciones lineales coinciden, basta ver que coinciden en una base de $_FV$.

Observación 25 *Notemos que la propiedad universal de las bases nos dice que si β es una base de ${}_FV$, entonces hay una biyección*

$$\begin{array}{ccc} W^{\beta} & \longrightarrow & Hom_F(V,W) \\ f & \longmapsto & \hat{f} \end{array}.$$

Entonces $|Hom_F(V,W)| = \left|W^{\beta}\right|$.

Ejemplo 47 *El número de funciones lineales de $(\mathbb{Z}_2)^2$ a $(\mathbb{Z}_2)^2$ es*

$$\left|(\mathbb{Z}_2)^2\right|^2 = 16.$$

Contamos de manera explícita el número de imágenes posibles de la base canónica $\{(1,0),(0,1)\}$. Tenemos que $(\mathbb{Z}_2)^2$ tiene 4 elementos:

$$\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}.$$

Así, es claro que el número es 4×4. (4 posibles imágenes para $(1,0)$ y otras tantas para $(0,1)$).

Ejercicio 79 *¿Cuántas funciones lineales hay de $(\mathbb{Z}_3)^3$ a $(\mathbb{Z}_3)^3$?*

Ejercicio 80 *¿Cuántas funciones lineales hay de $(\mathbb{Z}_p)^n$ a $(\mathbb{Z}_p)^m$?*

Corolario 7 *Si $T: V \to W$ es lineal y se anula en una base de ${}_FV$, entonces $T=\hat{0}$.*

Demostración. Se sigue del Corolario anterior, notando que T y $\hat{0}$ coinciden en la base β. ■

Lema 1 *$T: {}_FV \to {}_FW$ es lineal $\Leftrightarrow \forall \vec{x},\vec{y}\in V, \forall c\in F$, $T(\vec{x}+c\vec{y}) = T(\vec{x}) + cT(\vec{y})$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si T es lineal y $\vec{x},\vec{y}\in V, c\in F$ entonces $T(\vec{x}+c\vec{y}) = T(\vec{x}) + T(c\vec{y}) = T(\vec{x}) + cT(\vec{y})$.

$\Leftarrow$) Tomando $c=1$, tenemos que $T(\vec{x}+1\vec{y}) = T(\vec{x}) + 1T(\vec{y})$.

Tomando $\vec{x}=\vec{0}$, entonces $T(c\vec{y}) = T\left(\vec{0}+c\vec{y}\right) = T\left(\vec{0}\right) + cT(\vec{y}) = cT(\vec{y})$. ■

Teorema 32 *Sean $T: V\to W$ y $U: W\to X$ son funciones lineales.. Entonces*

1. *$U\circ T: V\to X$ también es una función lineal.*
2. *$Ker(U\circ T) = T^{-1}(Ker(U))$.*

Demostración. 1.

$$(U \circ T)(\vec{x} + c\vec{y}) = U[(T)(\vec{x} + c\vec{y})] = U[T(\vec{x}) + cT(\vec{y})] =$$

$$= U(T(\vec{x})) + cU(T(\vec{y})) = (U \circ T)(\vec{x}) + c[(U \circ T)(\vec{y})].$$

2.

$$\vec{x} \in \operatorname{Ker}(U \circ T) \Leftrightarrow (U \circ T)(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow U(T(\vec{x})) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$(T(\vec{x})) \in \operatorname{Ker}(U) \Leftrightarrow \vec{x} \in T^{-1}(\operatorname{Ker}(U)).$$

■

Definición 40 *Si* ${}_FV$ *y* ${}_FW$ *son espacios vectoriales entonces*

$$Hom_F(V, W) = \{T : V \to W \mid T \text{ es lineal}\}.$$

Ejercicio 81 *Sean* ${}_FV$ *y* ${}_FW$ *son espacios vectoriales.*

1. *Demuestre que* $W^V = \{f : V \to W \mid f \text{ es una función}\}$ *es un espacio vectorial, con las definiciones naturales de suma y de multiplicación por escalares (por ejemplo,* $(cf)(\vec{v}) =: c \cdot f(\vec{v})$
2. $Hom_F(V, W) \leqslant W^V$.

Ejercicio 82 *Demuestre que*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \overset{p_1}{\to} & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \overset{p_2}{\to} & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & y \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \overset{p_3}{\to} & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x \end{array}$$

son funciones lineales. Entonces $\forall k, l, m \in \mathbb{R}, kp_1 + lp_2 + mp_3$ *es también una función lineal. Es decir que la función*

$$f((x, y, z)) = kx + ly + mz$$

es una función lineal.

Ejercicio 83 *Demuestre que toda función lineal de* $\mathbb{R}^3$ *a* $\mathbb{R}$ *es de la forma descrita en el ejercicio anterior.*

Ejercicio 84 1. *Demuestre que*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{p_k} & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \longmapsto & x_k \end{array}$$

es una función lineal.

2. *Demuestre que*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \longmapsto & \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k \end{array}$$

es una función lineal para cada sucesión $c_1.c_2, ..., c_k \in \mathbb{R}$.

3. *Demuestre que toda función lineal de* $\mathbb{R}^n$ *a* $\mathbb{R}$ *es de esta forma.*

Ejercicio 85 1. *Demuestre que*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{i_k} & \mathbb{R}^n \\ r & \longmapsto & \left(\underbrace{0, 0, ..., r}_{k \ lugares}, ..., 0 \right) \end{array}$$

es una función lineal.

2. *Demuestre que*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{c \cdot i_k} & \mathbb{R}^n \\ r & \longmapsto & \left(\underbrace{0, 0, ..., cr}_{k \ lugares}, ..., 0 \right) \end{array}$$

es una función lineal.

3. *Demuestre que*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & (c_1 x, c_2 x, ..., c_n x) \end{array}$$

es una función lineal.

Definición 41 $T : V \to W$ *lineal es un isomorfismo si* $\exists U : W \to V$ *lineal tal que* $T \circ U = Id_W$ *y* $U \circ T = Id_V$.

Teorema 33 *Son equivalentes para una función lineal* $T : V \to W$*:*

1. *T es un isomorfismo.*

2. *T es biyectiva.*

3. *β base de ${}_FV \Rightarrow T(\beta)$ base de ${}_FW, \forall\beta$.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Por definición un isomorfismo es una función con inverso. Las funciones invertibles son precisamente las biyectivas.

2) $\Rightarrow$ 3) Por los Teoremas 29 y 30, $T(\beta)$ es $l.\ i.$ y genera W.

3) $\Rightarrow$ 2) Primero notemos que $\beta \overset{T_{|\beta}}{\to} T(\beta)$ es una biyección. Basta ver que es inyectiva. Si no lo fuera, tomemos dos vectores $\vec{u} \neq \vec{v} \in \beta$ tales que $T(\vec{u}) = T(\vec{v})$. Cambiemos la base β cambiando $\vec{v}$ por $\vec{v} - \vec{u}$, para obtener el nuevo conjunto β' (que sigue siendo base de V, ejercicio fácil). Notemos que $T(\vec{v} - \vec{u}) = \vec{0} \in T(\beta')$, por lo que $T(\beta')$ es $l.\ d$ y entonces no es una base para $W \underset{\circ}{\nabla}$.

Toda vez que hemos notado que $\beta \overset{T_{|\beta}}{\to} T(\beta)$ es una biyección, tomemos la función inversa $T(\beta) \overset{g}{\to} \beta$. Como $T(\beta)$ es una base para, la propiedad universal de las bases nos dice que $\exists! S : W \to V$ tal que

$$\begin{array}{ccc} T(\beta) & \hookrightarrow & W \\ {}^{g}\downarrow & & \downarrow S \\ \beta & \hookrightarrow & V \end{array} \tag{3.2}$$

Por otra parte comparando

$$\begin{array}{ccc} \beta & \hookrightarrow & V \\ {}^{T_{|\beta}}\downarrow & & \downarrow^{T} \\ T(\beta) & \hookrightarrow & W \\ {}^{g}\downarrow & & \downarrow^{S} \\ \beta & \hookrightarrow & V \end{array} \text{ con } \begin{array}{ccc} \beta & \hookrightarrow & V \\ {}^{Id_\beta}\downarrow & & \downarrow^{Id_V} \\ \beta & \hookrightarrow & V \end{array}$$

y notando que $g \circ T_{|\beta} = Id_\beta$, tenemos por la unicidad en la propiedad universal que $S \circ T = Id_V$. Análogamente se sigue que $T \circ S = Id_W$, comparando los diagramas

$$\begin{array}{ccc} T(\beta) & \hookrightarrow & W \\ {}^{g}\downarrow & & \downarrow^{S} \\ \beta & \hookrightarrow & V \\ {}^{T_{|\beta}}\downarrow & & \downarrow^{T} \\ T(\beta) & \hookrightarrow & W \end{array} \text{ con } \begin{array}{ccc} T(\beta) & \hookrightarrow & W \\ {}^{Id_{T(\beta)}}\downarrow & & \downarrow^{Id_W} \\ T(\beta) & \hookrightarrow & W \end{array}.$$

$\blacksquare$

Ejercicio 86 *Muestre que son equivalentes para una función lineal $T : V \to W$:*

1. *T es un isomorfismo.*

2. *$\exists \beta$ base de ${}_FV$ tal que $\beta \overset{T_{|\beta}}{>>\twoheadrightarrow} T(\beta)$ y $T(\beta)$ es una base de ${}_FW$.*

Teorema 34 *Son equivalentes para dos espacios vectoriales ${}_FV$, ${}_FW$:*

1. *$V \approxeq W$ (V es isomorfo a W).*

2. *$dim(V) = dim(W)$.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Sea $V \overset{\Psi}{\to} W$ un isomorfismo. Una base β de V se mapea bajo Ψ en una base de W. Como $\beta \overset{\Psi_{|\beta}}{\to} \Psi(\beta)$ es una biyección, entonces $\dim(V) = |\beta| = |\Psi(\beta)| = \dim(W)$.

2) $\Rightarrow$ 1) Sea $\beta \overset{f}{>>\twoheadrightarrow} \gamma$ una biyección entre una base de V y una base de W. Usemos la propiedad universal de las bases para definir un función lineal $\hat{f} : V \to W$ que extienda a f. Definamos también la función lineal $\Gamma : W \to V$ que extiende a f^{-1}. Entonces la función lineal $\Gamma \circ \hat{f}$ extiende a $f^{-1} \circ f = Id_\beta$. Por la propiedad universal de las bases, $\Gamma \circ \hat{f} = Id_V$. Simétricamente, $\hat{f} \circ \Gamma = Id_W$. ■

Definición 42 *Para una función lineal $T : V \to W$, se definen:*

1. *$nul(T) = \dim(Ker\ T)$: y se llama la nulidad de T.*

2. *$rango(T) = \dim(T(V))$.*

Teorema 35 *Para una función lineal $T : V \to W$, con $dim(V) \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$nul(T) + rango(T) = \dim(V).$$

Demostración. Tomemos $X \leqslant V$ tal que $V = \mathrm{Ker}(T) \bigoplus X$. Tenemos que

$$\mathrm{nul}(T) + \dim(X) = \dim(V)$$

(la unión de una base de $\mathrm{Ker}(T)$ con una base de X nos da una base de ${}_FV$). $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} = \vec{k} + \vec{x}$, con $\vec{k} \in K$, $\vec{x} \in X$. Entonces $T(\vec{v}) = T\left(\vec{k}\right) + T(\vec{x}) = T(\vec{x})$. Por lo tanto $T(V) \subseteq T(X) \subseteq T(V)$ y podemos considerar el diagrama

$$\begin{array}{lcc} V & \overset{T}{\to} & T(V) \\ \uparrow incl. & & \| \\ X & \overset{T_{|X}}{\to} & T(X) \end{array}$$

es inmediato que $\text{Ker}\left(T_{|X}\right) = \left\{\vec{x} \in X \mid T(\vec{x}) = \vec{0}\right\} = (\text{Ker}(T)) \cap X = \left\{\vec{0}\right\}$.

Por lo tanto $T_{|X}$ es una función lineal inyectiva y así, es un isomorfismo de X en $T(X) = T(V)$. Por lo tanto,

$$\dim(X) = \dim(T(V)) = \text{rango}(T).$$

Una simple sustitución, nos da el resultado deseado:

$$\begin{aligned} \text{nul}(T) + \dim(X) &= \dim(V) \\ \text{nul}(T) + \text{rango}(T) &= \dim(V) \end{aligned}$$

■

Corolario 8 *Sea $T : V \to W$ una función lineal entre dos espacios vectoriales de la misma dimensión n ($n \in \mathbb{N}$). Son equivalentes:*

1. *T es inyectiva.*
2. *T es suprayectiva.*
3. *T es un isomorfismo.*

Demostración. Basta mostrar que 1) $\Leftrightarrow$ 2).
T es inyectiva $\Leftrightarrow \text{Ker}(T) = \left\{\vec{0}\right\} \Leftrightarrow \text{nul}(T) = 0 \Leftrightarrow \text{rango}(T) = \dim(V)$
$\Leftrightarrow \dim(T(V)) = \dim(V) \Leftrightarrow T(V) = V \Leftrightarrow T$ es suprayectiva. ■

Definición 43 *Recordemos que*

$$F^{(X)} = \{f : X \to V \mid sop(f) \text{ es finito}\}.$$

Para cada $x \in X$ definimos

$$\begin{array}{llll} \delta_x : & X & \to & F \\ & x & \mapsto & 1 \\ & x \neq y & \mapsto & 0 \end{array}.$$

Observación 26 *$sop(\delta_x) = \{x\}$ que es finito, por lo tanto $\delta_x \in F^{(X)}$.*

Lema 2 *$\{\delta_x\}_{x \in X}$ es una base de $F^{(X)}$.*

Demostración.

1. Si
$$\sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{x_i} = \hat{0}$$
entonces para una $j \in \{1, ..., n\}$ tenemos que
$$0 = \hat{0}\,(x_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{x_i} \right)(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \left(c_i \cdot \delta_{x_i}\,(x_j) \right) = c_j \;\forall j \in \{1, ..., n\}\,.$$
Por lo tanto $\{\delta_x\}_{x \in X}$ es linealmente independiente.

2. Sea ahora $g \in F^{(X)}$, demostraremos que $g = \sum\limits_{x \in \text{sop}(g)} g\,(x)\,\delta_x$:

   a) Para $z \in X \backslash \text{sop}(g)$, entonces $g\,(z) = 0$ y
   $$\left(\sum_{x \in \text{sop}(g)} g\,(x)\,\delta_x \right)(z) = \sum_{x \in \text{sop}(g)} \left(g\,(x)\,\delta_x\,(z) \right) = 0.$$

   b) Para $z \in \text{sop}(g)$, entonces
   $$\left(\sum_{x \in \text{sop}(g)} g\,(x)\,\delta_x \right)(z) = \sum_{x \in \text{sop}(g)} g\,(x)\,\delta_x\,(z) = g\,(z) \cdot 1 = g\,(z)\,.$$

   Por lo tanto $g = \sum\limits_{x \in \text{sop}(g)} g\,(x)\,\delta_x$. ■

Teorema 36 *Si ${}_FV$ es un espacio vectorial, entonces $V \approxeq F^{(X)}$ para algún conjunto X.*

Demostración. Sea β una base de ${}_FV$ y consideremos $F^{(\beta)}$, la biyección

$$\begin{array}{ccc} \beta & >> \twoheadrightarrow & \{\delta_{\vec{x}}\}_{\vec{x} \in \beta} \\ \vec{z} & \longmapsto & \delta_{\vec{z}} \end{array}$$

muestra que ${}_FV$ tienen la misma dimensión. ■

Ejemplo 48 *Una función $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que respeta la suma y que no respeta la multiplicación.*

Recordemos que $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, de manera natural. Como los espacios vectoriales tienen base, entonces $\mathbb{R}$ es isomorfo a $\mathbb{Q}^{(\mathbb{X})}$ para algún conjunto X (podemos escoger X como una base de ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$. Podemos notar que X tiene que ser infinito, pues $|\mathbb{Q}^2| = |\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$, de aquí que si $n \leqslant 2^m$, entonces

$$|\mathbb{Q}| \leqslant |\mathbb{Q}^n| \leqslant \left|\mathbb{Q}^{2^m}\right| = \left|\mathbb{Q}^{2^{m-1}}\right| = ... = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = \left|2^{\mathbb{Q}}\right|.$$

En particular, podemos escoger $\vec{v}_1 \in X$ y definir la función

$$\begin{array}{ccll} X & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \\ \vec{v}_1 & \mapsto & 2\vec{v}_1 & \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{x} & \text{si } \vec{x} \neq \vec{v}_1 \end{array}.$$

Por la propiedad universal de las base, $\exists \hat{f} :_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \rightarrow_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ lineal que extiende a f. Siendo lineal, tiene que respetar la suma, ahora, esta misma función no es lineal de ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R} \rightarrow {}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, pues de serlo, sería de la forma $c \cdot \_$, pero entonces $\hat{f}(\vec{v}_1) = 2\vec{v}_1 = c\vec{v}_1$ y $\hat{f}(\vec{x}) = \vec{x} = c\vec{x}$, de donde se tiene que $2 = 1$ $\underset{\circ}{\nabla}$.

Ejemplo 49 *Una función que respeta la multiplicación por escalares que no respeta la suma.*

Sea

$$\begin{array}{rlcll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \\ & (x,0) & \mapsto & (2x,0) & \\ & (x,y) & \mapsto & (x,y) & \text{si } y \neq 0 \end{array}.$$

f respeta multiplicación por escalares:

$$\begin{array}{l} f(c(x,0)) = (2cx,0) = c(2x,0) = cf(x,0) \\ f(c(x,y)) = f(cx,cy) = (cx,cy) = c(x,y) = cf(x,y) \quad \text{si } y \neq 0 \end{array}.$$

f no respeta la suma: $(1,1) = f((1,1)) = f((1,0)+(0,1))$.
$f(1,0) + f(0,1) = (2,0) + (0,1) = (2,1) \neq (1,1)$.

Ejemplo 50 *El número de funciones lineales de ${}_FV$ a ${}_FW$ es $\left|W^{\beta}\right|$ mientras que el número de funciones de V a W es $\left|W^V\right|$. Por ejemplo, el número de funciones lineales de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ es $|\mathbb{R}|$, pues tenemos la biyección*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ c & \mapsto & c \cdot \_ \end{array}.$$

Pero,

$$|\mathbb{R}| < \left|2^{\mathbb{R}}\right| \leqslant \left|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right|,$$

ya que $|\mathbb{R}| < |\wp(\mathbb{R})| = \left|2^{\mathbb{R}}\right|$. *Además* $2^{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, *pues toda función con valores en* $\{0,1\}$, *puede pensarse como una función con valores en* $\mathbb{R}$.
Las funciones lineales de V *a* W *son "pocas" comparadas con todas las funciones de* V *a* W.

Observación 27 *Para cualquier conjunto* X, *se tiene que* $|X| \lneqq |\wp(X)|$.

Demostración. La función $\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & \wp(X) \\ x & \mapsto & \{x\} \end{array}$ es inyectiva, por lo que $|X| \leqslant |\wp(X)|$.

Si existiera una función biyectiva $f : X >\!\!>\!\!\twoheadrightarrow \wp(X)$, consideremos el conjunto

$$A = \{z \in X \mid z \notin f(z)\}$$

como $A \in \wp(X)$, entonces $A = f(u)$, para alguna $u \in X$.

Notemos ahora que $u \in A \Rightarrow u \notin f(u) = A$. Por lo tanto $u \notin A = f(u)$. Pero como $u \notin f(u)$, entonces $u \in A\underset{\circ}{\nabla}$.

Como no hay biyecciones entre X y $\wp(X)$, tenemos que $|X| \lneqq |\wp(X)|$. ∎

Observación 28 $|\wp(X)| = \left|2^X\right|$.

Demostración. $2^X = \{f : X \rightarrow \{0,1\} \mid f \text{ función}\}$. La función

$$\begin{array}{ccc} 2^X & \xrightarrow{\tau} & \wp(X) \\ f & \mapsto & \{z \in X \mid f(z) = 1\} \end{array}$$

es una biyección. ∎

Ejercicio 87 *Muestre que la función*

$$\begin{array}{ccc} \wp(X) & \xrightarrow{\chi} & 2^X \\ Y & \mapsto & \chi_{Y} \end{array}$$

donde χ_{Y} *es la función característica de* Y :

$$\chi_{Y}(z) = \begin{cases} 1 \ si \ z \in Y \\ 0 \ si \ z \notin Y \end{cases},$$

es la inversa de la función τ *de la Observación anterior.*

3.3. La matriz de una transformación lineal

Definición 44 *Sea ${}_FV$ con base $\beta = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\}$ definamos $\Phi_\beta : V \to F^n$ mediante la propiedad universal de las bases por medio de*

$$\begin{array}{cccc} \vec{x}_i & \beta & \hookrightarrow & V \\ \bar{\downarrow} & \downarrow^{\varphi_\beta} & \swarrow^{\Phi_\beta} & \\ \vec{e}_i & F^n & & \end{array}.$$

Observación 29 *Notemos que Φ_β es un isomorfismo, cuyo inverso tiene la propiedad de que $\Phi_\beta^{-1}(\vec{e}_i) = \vec{x}_i$.*

Observación 30 $\Phi_\beta(\vec{v}) = \Phi_\beta\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\Phi_\beta(a_i\vec{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i\Phi_\beta(\vec{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{e}_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$

El vector $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ se llama el vector de coordenadas de $\vec{v}$ respecto a β y también se denota $[\vec{v}]_\beta$.

Observación 31 $T : F^n \to F^m$ *lineal* $\Rightarrow$

$$T(a_1, a_2, ..., a_n) = a_1T(\vec{e}_1) + a_2T(\vec{e}_2) + ... + a_nT(\vec{e}_n).$$

Definición 45 *La matriz de $T : F^n \to F^m$ es la matriz cuyas columnas son $T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2), ..., T(\vec{e}_n) : (T(\vec{e}_1)\ \ T(\vec{e}_2)\ \ ....T(\vec{e}_n))$.*

Ejemplo 51 *La matriz de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que*

$$T(x, y, z) = (2x + 3y, x - 2y - z)$$

es

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definición 46 *Si $T : V \to W$ es una función lineal entre los espacios vectoriales sobre el campo F, de dimensiones n y m, respectivamente, con bases $\beta = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\}, \gamma = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_m\}$ respectivamente. Entonces $[T]_\beta^\gamma$ es la matriz de $F^n \overset{\Phi_\gamma \circ T \circ \Phi_\beta^{-1}}{\longrightarrow} F^m$ en el diagrama conmutativo*

$$\begin{pmatrix} V & \to & W \\ \downarrow^{\Phi_\beta} & & \downarrow^{\Phi_\gamma} \\ F^n & \overset{\Phi_\gamma \circ T \circ \Phi_\beta^{-1}}{\longrightarrow} & F^m \end{pmatrix}.$$

Explícitamente, la j-ésima columna de $[T]_\beta^\gamma$ es el vector en F^m :

$$\begin{aligned} \left(\Phi_\gamma \circ T \circ \Phi_\beta^{-1}\right)(\vec{e}_j) &= (\Phi_\gamma \circ T)\left(\Phi_\beta^{-1}(\vec{e}_j)\right) = \\ &= (\Phi_\gamma \circ T)(\vec{x}_j) = \Phi_\gamma (T(\vec{x}_j)) = [T(\vec{x}_j)]_\gamma \end{aligned}$$

es decir, es el vector de coordenadas de $T(\vec{x}_j)$ respecto a la base γ.

Observación 32 *El coeficiente i, j-ésimo de la matriz $[T]_\beta^\gamma$ es la i-ésima coordenada de $[T(\vec{x}_j)]_\gamma$.*

Ejemplo 52 *Consideremos la función derivada $D : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ y tomemos las bases canónicas $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $\gamma = \{1, x, x^2\}$ entonces*

$$[D]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Teorema 37 *Sean ${}_FV$ y ${}_FW$ dos espacios de dimensión finita n, m respectivamente, con sendas bases β, γ. Los espacios vectoriales*

$$Hom_F(V, W)$$

y

$$M_{m\times n}(F),$$

son isomorfos.

Demostración. Denotemos $\beta = \{\vec{x}_1, ...\vec{x}_n\}, \gamma = \{\vec{y}_1, ..., \vec{y}_m\}$.
Definamos

$$\begin{array}{ccc} Hom_F(V, W) & \overset{\Psi_\beta^\gamma}{\longrightarrow} & M_{m\times n}(F) \\ T & \longmapsto & [T]_\beta^\gamma \end{array}.$$

1. Ψ_β^γ es una función lineal. Tomemos $T, S \in Hom_F(V, W)$, $c \in F$, entonces $\Psi_\beta^\gamma(T + cS) = [T + cS]_\beta^\gamma$. Calculemos la columna $j-$ésima de esta matriz:

$$\left([T + cS]_\beta^\gamma\right)^{\underline{j}} = \left[(T + cS)(\vec{x}_j)\right]_\gamma = \left[T(\vec{x}_j) + (cS)(\vec{x}_j)\right]_\gamma =$$

$$= \left[T(\vec{x}_j) + c\left(S(\vec{x}_j)\right)\right]_\gamma = \Phi_\gamma\left(T(\vec{x}_j) + c \cdot S(\vec{x}_j)\right) =$$

$$= \Phi_\gamma\left(T(\vec{x}_j)\right) + c \cdot \Phi_\gamma\left(S(\vec{x}_j)\right)^{1} = \left[T(\vec{x}_j)\right]_\gamma + c \cdot \left[S(\vec{x}_j)\right]_\gamma$$

$$= \left([T]_\beta^\gamma\right)^{\underline{j}} + c \cdot \left([S]_\beta^\gamma\right)^{\underline{j}} = \left([T]_\beta^\gamma + c \cdot [S]_\beta^\gamma\right)^{\underline{j}}.$$

Como las j-ésimas columnas de las matrices $[T + cS]_\beta^\gamma$ y $[T]_\beta^\gamma + c \cdot [S]_\gamma^\gamma$ coinciden, y esto vale para cada columna, entonces

$$[T + cS]_\beta^\gamma = [T]_\beta^\gamma + c \cdot [S]_\beta^\gamma .$$

Por lo tanto Ψ_β^γ es lineal. ■

2. Ψ_β^γ es inyectiva. Para mostrar esto basta ver que $\operatorname{Ker}\left(\Psi_\beta^\gamma\right) = \left\{\hat{0}\right\}$, la transformación lineal cero.
Sea T una transformación lineal de V a W tal que $\Psi_\beta^\gamma(T) = \mathbb{O}$. Entonces, para cada j, tenemos que $\left(\Psi_\beta^\gamma(T)\right)^{\underline{j}} = \mathbb{O}^{\underline{j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Entonces

$$\Phi_\gamma\left(T(\vec{x}_j)\right) = \left[T(\vec{x}_j)\right]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pero entonces, aplicando Φ_γ^{-1}, obtenemos

$$T(\vec{x}_j) = \Phi_\gamma^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}_W,$$

de aquí tenemos que T se anula en la base β. Por lo tanto $T = \hat{0}$. (Ver el Corolario 7).

Demostración. 3. Veamos que Ψ_β^γ es suprayectiva.
Sea $A \in M_{m\times n}(F)$. Queremos resolver la ecuación $[T]_\beta^\gamma = A$. Para una T que

satisfaga la ecuación, debemos tener que sus $j-$ésimas columnas coincidan. Entonces debe pasar que

$$\left([T]_\beta^\gamma\right)^{\underline{j}} = A^{\underline{j}} = \begin{pmatrix} A_{i,j} \\ A_{2,j} \\ \vdots \\ A_{m,j} \end{pmatrix},$$

como $\left([T]_\beta^\gamma\right)^{\underline{j}} = \left[T\left(\vec{x}_j\right)\right]_\gamma = \Phi_\gamma\left(T\left(\vec{x}_j\right)\right)$, entonces debe suceder que

$$\Phi_\gamma\left(T\left(\vec{x}_j\right)\right) = \begin{pmatrix} A_{i,j} \\ A_{2,j} \\ \vdots \\ A_{m,j} \end{pmatrix},$$

es decir que

$$T\left(\vec{x}_j\right) = \Phi_\gamma^{-1}\begin{pmatrix} A_{i,j} \\ A_{2,j} \\ \vdots \\ A_{m,j} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} A_{i,j}\vec{y}_i \in W.$$

La propiedad universal de las bases, nos asegura que una función lineal $V \to W$ tal que $\vec{x}_j \longmapsto \sum_{i=1}^{m} A_{i,j}\vec{y}_i$,para cada j. Es claro que si llamamos T a esta función lineal, entonces $\Psi_\beta^\gamma(T) = A$.

Tenemos que Ψ_β^γ es un isomorfismo. ■

Definición 47 *Sea $A \in M_{n\times m}(F)$, definiremos la función lineal $(A \cdot \_) : F^m \to F^n$ (Multiplicar por A por el lado izquierdo) definiéndola en la base canónica de F^m :*

$$A \cdot \vec{e}_j = (A \cdot \_)\left(\vec{e}_j\right) =: A^{\underline{j}}.$$

Entonces

$$(A \cdot \_)\left(\sum_{j=1}^{m} c_j\vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{m} c_j A^{\underline{j}}.$$

Observación 33 *$(A \cdot \_) : F^m \to F^n$ es por definición una función lineal (se ha usado la propiedad universal de las bases para definirla).*

Observación 34 *La matriz de $(A \cdot \_)$ respecto a las bases canónicas de F^n y F^m es A.*

Demostración. Sean β y γ las bases canónicas de F^m y F^n respectivamente. $\left([(A \cdot \_)]_\beta^\gamma\right)^{\underline{j}} = [(A \cdot \vec{e}_j\_)]^\gamma = \left[\left(A^{\underline{j}}\right)\right]^\gamma = \left(A^{\underline{j}}\right)$. ■

Teorema 38 *Sean $\beta = \{\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n\} \underset{base}{\hookrightarrow} {}_FV$ y $\gamma = \{\vec{y}_1, ..., \vec{y}_n\} \underset{base}{\hookrightarrow} {}_FW$ y $T : V \to W$ lineal. Entonces el siguiente cuadrado es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ {\scriptstyle \Phi_\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_\gamma} \\ F^n & \xrightarrow{[T]_\beta^\gamma \cdot \_} & F^m \end{array} . \tag{3.3}$$

Demostración. Sea $\vec{v} \in {}_FV$, queremos demostrar que

$$\begin{array}{ccc} \vec{v} & \xrightarrow{T} & T(\vec{v}) \\ {\scriptstyle \Phi_\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_\gamma} \\ [(\vec{v})]_\beta & \xrightarrow{[T]_\beta^\gamma \cdot \_} & [T]_\beta^\gamma \cdot [(\vec{v})]_\beta = [T(\vec{v})]_\gamma \end{array} .$$

En efecto: supongamos que

$$\vec{v} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + ... + c_n\vec{x}_n,$$

entonces

$$\begin{gathered} (\Phi_\gamma \circ T)(\vec{v}) = \Phi_\gamma(T(\vec{v})) = [T(\vec{v})]_\gamma = \\ = [T(c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + ... + c_n\vec{x}_n)]_\gamma = \\ = [c_1 \cdot T(\vec{x}_1) + c_2 \cdot T(\vec{x}_2) + ... + c_n \cdot T(\vec{x}_n)]_\gamma = \\ = c_1 \cdot [T(\vec{x}_1)]_\gamma + c_2 \cdot [T(\vec{x}_2)]_\gamma + ... + c_n \cdot [T(\vec{x}_n)]_\gamma = \\ = c_1 \cdot \left([T]_\beta^\gamma\right)^{\underline{1}} + c_2 \cdot \left([T]_\beta^\gamma\right)^{\underline{2}} + ... + c_n \cdot \left([T]_\beta^\gamma\right)^{\underline{n}} = \\ = c_1 \cdot \left([T]_\beta^\gamma \cdot \vec{e}_1\right) + c_2 \cdot \left([T]_\beta^\gamma \cdot \vec{e}_2\right) + ... + c_n \cdot \left([T]_\beta^\gamma \cdot \vec{e}_n\right) = \\ = \left([T]_\beta^\gamma \cdot c_1\vec{e}_1\right) + \left([T]_\beta^\gamma \cdot c_2\vec{e}_2\right) + ... + \left([T]_\beta^\gamma \cdot c_n\vec{e}_n\right) = \\ = [T]_\beta^\gamma \cdot (c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + ... + c_n\vec{e}_n) = \\ = [T]_\beta^\gamma \cdot [(\vec{x})]_\beta . \end{gathered}$$

■

Ejemplo 53 *Sea* $\beta = \{1, x, x^2, x^3\} \underset{base}{\hookrightarrow} \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, $\gamma = \{1, x, x^2\} \underset{base}{\hookrightarrow} \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. *Tomemos la función derivada* $D : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ *entonces*

$$[D]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y tenemos que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) & \xrightarrow{D} & \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \\ {\scriptstyle \Phi_\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_\gamma} \\ \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{[D]_\beta^\gamma \cdot \_} & \mathbb{R}^3 \end{array} . \tag{3.4}$$

Utilizando esto, podemos calcular $D\left(a + bx + cx^2 + dx^3\right)$:

$$D\left(a + bx + cx^2 + dx^3\right) = \Phi_\gamma^{-1} \circ \left([D]_\beta^\gamma \cdot \_\right) \circ \Phi_\beta\left(a + bx + cx^2 + dx^3\right) =$$

$$\Phi_\gamma^{-1} \circ \left([D]_\beta^\gamma \cdot \_\right) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \Phi_\gamma^{-1}\left([D]_\beta^\gamma \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \Phi_\gamma \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \Phi_\gamma^{-1}\left(a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \Phi_\gamma^{-1} \begin{pmatrix} b \\ 2c \\ 3d \end{pmatrix} = b + 2cx + 3dx^2.$$

Definición 48 *Sea* $\beta = \{\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n\} \underset{base}{\hookrightarrow} {}_F V$, *definimos* $I_n =: [Id_V]_\beta^\beta$.

Observación 35

$$[Id_V]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostración. $\left([Id_V]_{\beta}^{\beta}\right)^{\underline{j}} = [Id_V(\vec{x}_j)]_{\beta} = [\vec{x}_j]_{\beta} = \vec{e}_j.$ ■

Definición 49 *Sean $A \in M_{n\times m}(F)$ y $B \in M_{m\times r}(F)$. Definimos AB como la matriz de $(A\cdot \_)\circ(B\cdot \_) : F^r \to F^n$, respecto a las bases canónicas de F^r y F^n.*

$F^r \overset{B\cdot\_}{\to} F^m$, $F^m \overset{A\cdot\_}{\to} F^n$ son funciones lineales, tomemos β, γ y λ las bases canónicas de F^r, F^m, F^n, respectivamente. Calculemos AB explícitamente:

$$(AB)^{\underline{j}} = \left[\left((A\cdot \_)\circ(B\cdot \_)\right)\vec{e}_j\right]_{\lambda} = \left[A(B\vec{e}_j)\right]_{\lambda}$$

$= \Phi_{\lambda}(A(B\vec{e}_j)) = A(\Phi_{\gamma}(B\vec{e}_j))$. Pues

$$\begin{array}{ccc} F^m & \overset{A\cdot\_}{\longrightarrow} & F^n \\ {}^{\Phi_\gamma}\downarrow & & \downarrow^{\Phi_\lambda} \\ F^n & \overset{A\cdot\_}{\longrightarrow} & F^m \end{array}$$

conmuta. Por otra parte, $\Phi_{\gamma}(B\vec{e}_j)$ es la j-ésima columna de la matriz de $B\cdot\_$ respecto a las bases β y γ. Es decir, que es $B^{\underline{j}}$. Ahora

$$AB^{\underline{j}} = A\begin{pmatrix} B_{1,j} \\ B_{2,j} \\ \vdots \\ B_{m,j}\end{pmatrix} = A\left(\sum_{k=1}^{m} B_{k,j}\vec{f}_k\right) = \sum_{k=1}^{m} B_{k,j}\left(A\left(\vec{f}_k\right)\right) = \sum_{k=1}^{m} B_{k,j}\left(A^{\underline{k}}\right). \quad (3.5)$$

Aquí estamos denotando $\gamma = \left\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_m\right\}$.

Así, la i-ésima coordenada de AB, es la i-ésima coordenada de $\sum_{k=1}^{m} B_{k,j}\left(A^{\underline{i}}\right)$. Denotemos por

$$\begin{array}{rccc} \pi_i : & F^m & \longrightarrow & F \\ & (a_1, a_2, ..., a_m) & \longmapsto & a_m \end{array}. \quad (3.6)$$

Entonces

$$(AB)_{i,j} = \pi_i\left(\sum_{k=1}^{m} B_{k,j}\left(A^{\underline{i}}\right)\right) = \left(\sum_{k=1}^{m} B_{k,j}\pi_i\left(A^{\underline{k}}\right)\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} B_{k,j}\pi_i\left(A^{\underline{k}}\right)\right) = \left(\sum_{k=1}^{m} B_{k,j}A_{i,k}\right) = \left(\sum_{k=1}^{m} A_{i,k}B_{k,j}\right).$$

En resumen,

$$(AB)_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^{m} A_{i,k}B_{k,j}\right).$$

Teorema 39 *Sean* ${}_FV \xrightarrow{T} {}_FW \xrightarrow{S} {}_FZ$ *funciones lineales entre los espacios vectoriales* V, W, Z*, con bases* β, γ, λ *de cardinalidad* n, m, r *respectivamente. Entonces*

$$[S \circ T]_\beta^\lambda = [S]_\gamma^\lambda \, [T]_\beta^\gamma .$$

Demostración. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{T} & W & \xrightarrow{S} & Z \\ {}^{\Phi_\beta}\downarrow & & \downarrow^{\Phi_\gamma} & & \downarrow^{\Phi_\lambda} \\ F^n & \xrightarrow{[T]_\beta^\gamma \cdot \_} & F^m & \xrightarrow{[S]_\gamma^\lambda \cdot \_} & F^m \end{array} .$$

Agrandémoslo de la manera siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{T} & W & \xrightarrow{S} & Z \\ {}^{\Phi_\beta}\downarrow & & \downarrow^{\Phi_\gamma} & & \downarrow^{\Phi_\lambda} \\ F^n & \xrightarrow{[T]_\beta^\gamma \cdot \_} & F^m & \xrightarrow{[S]_\gamma^\lambda \cdot \_} & F^m \\ {}^{Id}\downarrow & & & & \downarrow^{Id} \\ F^n & & \xrightarrow{\left([S]_\gamma^\lambda \cdot \_\right)\circ\left([T]_\beta^\gamma \cdot \_\right)} & & F^m \end{array} .$$

Comparándolo con

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{S \circ T} & Z \\ {}^{\Phi_\beta}\downarrow & & \downarrow^{\Phi_\lambda} \\ F^n & \xrightarrow{[S\circ T]_\beta^\lambda \cdot \_} & F^m \end{array} .$$

Observamos que $[S \circ T]_\beta^\lambda \cdot \_ = \Phi_\beta^{-1} \circ (S \circ T) \circ \Phi_\lambda = \left([S]_\gamma^\lambda \cdot \_\right) \circ \left([T]_\beta^\gamma \cdot \_\right) = \left([S]_\gamma^\lambda \, [T]_\beta^\gamma\right) \cdot$ $\_$. Por lo tanto $[S \circ T]_\beta^\lambda = [S]_\gamma^\lambda \, [T]_\beta^\gamma$. ■

Ejemplo 54 *Consideremos las rotaciones* R_θ *y* R_σ *en el plano sus matrices respecto a la base canónica de* $\mathbb{R}^2$ *son*

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \; y \; \begin{pmatrix} \cos(\sigma) & -sen(\sigma) \\ sen(\sigma) & \cos(\sigma) \end{pmatrix}$$

respectivamente. Como

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{R_\theta} & \mathbb{R}^2 \\ {}^{Id=\Phi_\beta}\downarrow & & \downarrow^{\Phi_\beta} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{[R_\theta]_\beta^\beta \cdot \_} & \mathbb{R}^2 \end{array} .$$

Entonces, $R_\theta = [R_\theta]_\beta^\beta \cdot \_ = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \_$, *por lo que*

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos(\theta))\,x - (sen(\theta))\,y \\ (sen(\theta))\,x + (\cos(\theta))\,y \end{pmatrix}.$$

Ahora, es claro que $R_\sigma R_\theta = R_{\sigma+\theta}$, *por lo que*

$$\begin{pmatrix} \cos(\sigma) & -sen(\sigma) \\ sen(\sigma) & \cos(\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\sigma+\theta) & -sen(\sigma+\theta) \\ sen(\sigma+\theta) & \cos(\sigma+\theta) \end{pmatrix}.$$

Si efectuamos el producto en el lado izquierdo de la ecuación anterior, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} \cos(\sigma)\cos(\theta) - sen(\sigma)\,sen(\theta) & -\cos(\sigma)\,sen(\theta) - sen(\sigma)\cos(\theta) \\ sen(\sigma)\cos(\theta) + \cos(\sigma)\,sen(\theta) & \cos(\sigma)\cos(\theta) - sen(\sigma)\,sen(\theta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\sigma+\theta) & -sen(\sigma+\theta) \\ sen(\sigma+\theta) & \cos(\sigma+\theta) \end{pmatrix},$$

en donde están incluídas las fórmulas

$$\cos(\sigma+\theta) = \cos(\sigma)\cos(\theta) - sen(\sigma)\,sen(\theta)$$

y

$$sen(\sigma+\theta) = sen(\sigma)\cos(\theta) + \cos(\sigma)\,sen(\theta).$$

Ejemplo 55 *Sean A, B matrices de $m\times n$ y de $n\times s$, con coeficientes en F. Entonces*

1. $A = AI_n$.
2. $B = I_nB$.

Demostración. Sean β, γ, λ las bases canónicas de F^n, F^m y F^s, respectivamente.

1. Consideremos las funciones $F^n \xrightarrow{A\cdot\_} F^m$ y $Id : F^n \longrightarrow F^n$. Entonces $F^n \xrightarrow{(A\cdot\_)\circ Id} F^m$ es una función lineal cuya matriz respecto a las bases canónicas satisface:

$$A = [(A\cdot\_)]_\beta^\gamma = [(A\cdot\_)\circ Id]_\beta^\gamma = [(A\cdot\_)]_\beta^\gamma \circ [Id]_\beta^\beta = A\cdot I_n.$$

2. Consideremos las funciones $F^s \xrightarrow{B\cdot\_} F^n$ y $Id : F^n \longrightarrow F^n$.

$$B = [(B\cdot\_)]_\lambda^\beta = [Id\circ(B\cdot\_)]_\lambda^\beta = [Id]_\beta^\beta\,[(B\cdot\_)]_\lambda^\beta \circ = I_n\cdot B.$$

■

Ejercicio 88 *Sea* $\sigma_\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *la reflexión sobre la línea* ℓ *que pasa por el origen. Muestre que su matriz respecto a la base canónica es*

$$\begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & sen(2\alpha) \\ sen(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix},$$

donde α *es el ángulo que hace la línea* ℓ *con el semieje de los reales positivos.*

Ejemplo 56 *Sean* σ_{ℓ_1} *y* σ_{ℓ_2} *reflexiones sobre las líneas* ℓ_1 *y* ℓ_2 *(una con ángulo* α *y otra con ángulo* θ*, con el semieje de los reales positivos) respectivamente. Entonces*

$$\sigma_{\ell_1} \circ \sigma_{\ell_2}$$

tiene matriz

$$\begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & sen(2\alpha) \\ sen(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & sen(2\theta) \\ sen(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\alpha - 2\theta) & -sen(2\alpha - 2\theta) \\ sen(2\alpha - 2\theta) & \cos(2\alpha - 2\theta) \end{pmatrix}.$$

Entonces la composición de dos reflexiones es una rotación.

3.4. Suma y producto de matrices

Teorema 40 *El producto de matrices es asociativo. Es decir, si* $A \in M_{n\times m}(F)$, $B \in M_{m\times r}(F)$, $C \in M_{r\times s}(F)$ *entonces*

$$(AB)\,C = A\,(BC) \in M_{n\times s}(F).$$

Demostración. Consideremos las funciones lineales

$$F^s \xrightarrow{C\cdot\_} F^r, F^r \xrightarrow{B\cdot\_} F^m, F^m \xrightarrow{A\cdot\_} F^n$$

componiéndolas obtenemos

$$((A\cdot\_)\circ(B\cdot\_))\circ(C\cdot\_) = (A\cdot\_)\circ((B\cdot\_)\circ(C\cdot\_))$$

puesto que la composición de funciones es asociativa.

Denotemos ahora $\beta, \gamma, \lambda, \mu$ son las bases canónicas de F^s, F^r, F^m, F^n, respectivamente. Entonces

$$[((A\cdot\_)\circ(B\cdot\_))\circ(C\cdot\_)]_\beta^\mu =$$

$$= [((A\cdot \_)\circ (B\cdot \_))]^{\mu}_{\gamma} \circ [(C\cdot \_)]^{\gamma}_{\beta} =$$

$$\left([(A\cdot \_)]^{\mu}_{\lambda} \circ [(B\cdot \_)]^{\lambda}_{\gamma}\right) \circ [(C\cdot \_)]^{\gamma}_{\beta} = (AB)\,C.$$

De la misma manera, $[(A\cdot \_)\circ ((B\cdot \_)\circ (C\cdot \_))]^{\mu}_{\beta} = A\,(BC)\,.$ ■

Definición 50 *Diremos que una matriz $A \in M_{n\times n}$ es invertible, si $\exists B \in M_{n\times n}$ tal que*

$$AB = I_n = BA.$$

Ejemplo 57 *La matriz de una rotación en $\mathbb{R}^2$ por un ángulo θ es invertible. Es claro que $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$. Consecuentemente,*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -sin\,(-\theta) \\ sin\,(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}.$$

Verifiquémoslo:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -sen\,(\theta) \\ sen\,(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -sen\,(-\theta) \\ sen\,(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + sen^2(\theta) & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta) + sen^2(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si se multiplica en el otro orden, obtenemos

$$\begin{pmatrix} \cos^2(-\theta) + sen^2(-\theta) & 0 \\ 0 & \cos^2(-\theta) + sen^2(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 58 *Debe ser claro que una reflexión en $\mathbb{R}^2$ a lo largo de una línea ℓ que pasa por el origen y que hace un ángulo α con la parte positiva del eje de las x, es su propio inverso. Por lo tanto debe pasar que*

$$\begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & sen\,(2\alpha) \\ sen\,(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & sen\,(2\alpha) \\ sen\,(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}.$$

En efecto,

$$\begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & sen\,(2\alpha) \\ sen\,(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & sen\,(2\alpha) \\ sen\,(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2(2\alpha) + sen^2(2\alpha) & 0 \\ 0 & sen^2(2\alpha) + \cos^2(2\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 59 *Los vértices de* $\mathbb{R}^2$ *dados por* $\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{Z}$, *son los vértices de un* $n-$*gono regular centrado en* $\vec{0}$, *uno de cuyos vértices es* $(1,0)$. *Tomemos* $n = 9$, *y* $k \in \{0,1,2,...,8\}$ *en*

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) & -sen\left(\frac{2\pi}{9}\right) \\ sen\left(\frac{2\pi}{9}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) & -sen\left(\frac{2\pi}{9}\right) \\ sen\left(\frac{2\pi}{9}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \end{pmatrix}^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) & -sen\left(\frac{2\pi}{9}\right) \\ sen\left(\frac{2\pi}{9}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \end{pmatrix}^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2}{9}\pi\right) \\ sen\left(\frac{2}{9}\pi\right) \end{pmatrix},$$

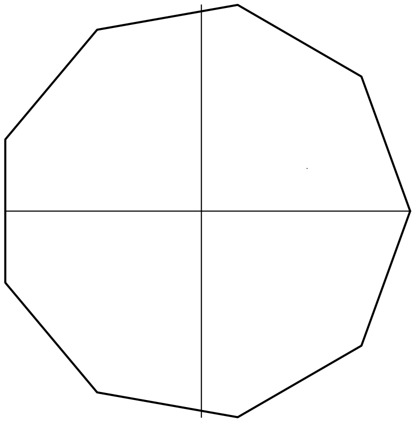
$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) & -sen\left(\frac{2\pi}{9}\right) \\ sen\left(\frac{2\pi}{9}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{2}{9}\pi\right) - sen^2\left(\frac{2}{9}\pi\right) \\ 2\cos\left(\frac{2}{9}\pi\right) sen\left(\frac{2}{9}\pi\right) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) & -sen\left(\frac{2\pi}{9}\right) \\ sen\left(\frac{2\pi}{9}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^3\frac{2}{9}\pi - 3\cos\left(\frac{2}{9}\pi\right) sen^2\left(\frac{2}{9}\pi\right) \\ 3sen\left(\frac{2}{9}\pi\right)\cos^2\left(\frac{2}{9}\pi\right) - sen^3\left(\frac{2}{9}\pi\right) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) & -sen\left(\frac{2\pi}{9}\right) \\ sen\left(\frac{2\pi}{9}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^4\left(\frac{2}{9}\pi\right) - 9\cos^2\left(\frac{2}{9}\pi\right) sen^2\left(\frac{2}{9}\pi\right) + sen^4\left(\frac{2}{9}\pi\right) \\ 4sen\left(\frac{2}{9}\pi\right)\cos^3\left(\frac{2}{9}\pi\right) - 4\cos\left(\frac{2}{9}\pi\right) sen^3\left(\frac{2}{9}\pi\right) \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$



Teorema 41 *Sean $A \in M_{m\times n}(F)$, $B, C \in M_{n\times r}$. Entonces*

$$A(B+C) = AB + AC.$$

Demostración. Consideremos las funciones lineales

$$(B\cdot \_), (C\cdot \_) \in Hom_F(F^r, F^n)$$

y la función lineal $(A\cdot \_) \in Hom_F(F^n, F^m)$. Entonces

$$(B\cdot \_) + (C\cdot \_) \in Hom_F(F^r, F^n)$$

y entonces

$$(A\cdot \_)\circ((B\cdot \_) + (C\cdot \_)) =^2 (A\cdot \_)\circ(B\cdot \_) + (A\cdot \_)\circ(C\cdot \_).$$

Por lo tanto,

$$[(A\cdot \_)\circ((B\cdot \_) + (C\cdot \_))]_\beta^\lambda = [(A\cdot \_)\circ(B\cdot \_)]_\beta^\lambda + [(A\cdot \_)\circ(C\cdot \_)]_\beta^\lambda =$$

$$[(A\cdot \_)]_\gamma^\lambda \circ [(B\cdot \_)]_\beta^\gamma + [(A\cdot \_)]_\gamma^\lambda \circ [(C\cdot \_)]_\beta^\gamma = AB + AC.$$

Estamos denotando β, γ, λ las bases canónicas de F^r, F^n, F^m, respectivamente.

De la misma manera,

$$[(A\cdot \_)\circ((B\cdot \_) + (C\cdot \_))]_\beta^\lambda = [(A\cdot \_)]_\gamma^\lambda [(B\cdot \_) + (C\cdot \_)]_\beta^\gamma =$$

$$A\left([(B\cdot \_)]_\beta^\gamma + [(C\cdot \_)]_\beta^\gamma\right) = A(B+C).$$

■

Ejercicio 89 *Demostrar que si $B, C \in M_{n\times r}, A \in M_{r\times s}(F)$, Entonces*

$$(B+C)A = BA + CA.$$

Teorema 42 *Son equivalentes para una matriz $A \in M_{n\times n}(F)$:*

1. *A es invertible.*
2. *A tiene inverso derecho.*

3. *A tiene inverso izquierdo..*

4. *La función* $A \cdot \_ : F^n \to F^n$ *es inyectiva.*

5. *La función* $A \cdot \_ : F^n \to F^n$ *es suprayectiva.*

6. *La ecuación* $A\vec{x} = \vec{0}$ *tiene sólo la solución trivial.*

7. *La ecuación* $A\vec{x} = \vec{b}$ *tiene solución,* $\forall \vec{b} \in F^n$.[3]

8. *Cada ecuación* $A\vec{x} = \vec{b}$ *tiene solución única,* $\forall \vec{b} \in F^n$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Es claro.

2) $\Rightarrow$ 5) Supongamos que B es una matriz en $M_{n\times n}(F)$ tal que $AB = I_n$. Entonces $Id_{F^n} = I_n \cdot \_ = AB \cdot \_ = (A \cdot \_) \circ (B \cdot \_)$. Por lo tanto, $(A \cdot \_)$ tiene inverso derecho, y como tal, es suprayectiva.

5) $\Rightarrow$ 1)Se sigue del Corolario 8.

1) $\Rightarrow$ 3) Es claro.

3) $\Rightarrow$ 4)Supongamos que C es una matriz en $M_{n\times n}(F)$ tal que $CA = I_n$. Entonces $Id_{F^n} = I_n \cdot \_ = CA \cdot \_ = (C \cdot \_) \circ (A \cdot \_)$. Por lo tanto, $(A \cdot \_)$ tiene inverso izquierdo, y por lo tanto, es inyectiva.

4) $\Leftrightarrow$ 6) $A \cdot \_ : F^n \to F^n$ es inyectiva, si y sólo si su núcleo es trivial, si y sólo si

$$A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

Hasta aquí, hemos visto que las primeras 6 afirmaciones son equivalentes.

5) $\Leftrightarrow$ 7) $A \cdot \_ : F^n \to F^n$ es suprayectiva si y sólo si $\forall \vec{b} \in F^n, \exists \vec{x} \in F^n$ tal que $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

(4) $\wedge$ 7)) $\Rightarrow$ 8) Es claro.

8) $\Rightarrow$ 7) Es claro. ■

Ejemplo 60 *Sea*

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y-2z \\ -x+y \\ -x-y+z \end{pmatrix} \end{array}$$

[3]Note que esta ecuación se puede interpretar como un sistema de n ecuaciones con n incógnitas.

cuya matriz es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Es decir que* $T = [T]_{can}^{can} \cdot \_$. *La función inversa de* T, *(que existe porque el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ -x + y &= 0 \\ -x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

tiene sólo la solución trivial) debe satisfacer

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{S}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{S}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{S}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Expresemos $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *como c.l. de* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, *a fin de poder calcular* S *en* $\vec{e}_1$ *(la primera columna de la matriz de* S.*).*

Resolvemos $x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, : es decir,

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 1 \\ -x + y &= 0 \\ -x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es : $\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ahora resolvemos $x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir,

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ -x + y &= 1 \\ -x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Por último, resolviendo.

$$\begin{aligned} x+y-2z &= 0 \\ -x+y &= 0 \\ -x-y+z &= 1 \end{aligned}$$

obtenemos la solución $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Esto quiere decir que la matriz de S es

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En efecto,

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pero también

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El teorema anterior nos sugiere un algoritmo para invertir una matriz.

Teorema 43 *Sea $A \in M_{n\times n}$ invertible, entonces la inversa de A es la matriz cuya j-ésima columna es la solución de $A\vec{x} = \vec{e}_j$.*

Demostración. $AB^{\underline{j}} = (AB)^{\underline{j}} = (I_n)^{\underline{j}} = \vec{e}_j$. ∎

Así que para encontrar la inversa de la matriz A, habría que resolver las ecuaciones

$$A\vec{x} = \vec{e}_j$$

para cada j.

Esto se hace tomando la matriz aumentada $\left(A \,|\, \vec{e}_j \right)$, reduciéndola y escalonándola. Al final se debe obtener $\left(I_n \,\middle|\, B^{\underline{j}} \right)$ puesto que la solución es única.

Uno puede resolver las n ecuaciones

$$A\vec{x} = \vec{e}_1, A\vec{x} = \vec{e}_2, ..., A\vec{x} = \vec{e}_n$$

simultáneamente, si se toma la matriz aumentada

$$\left(\ A \,|I_n \ \right)$$

y se reduce y escalona. Se termina en

$$\left(\ I_n \,|B \ \right),$$

donde B satisface $AB = I_n$, es decir que $B = A^{-1}$.

Ejemplo 61 *Reduciendo y escalonando la matriz:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 90 *Calcular la inversa de*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

en $M_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5)$, $M_{4\times 4}(\mathbb{Z}_7)$.

Ejercicio 91 *Calcular la inversa de*

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 7 & 11 & 18 \\ 2 & 4 & 7 & 10 \\ -2 & -5 & -8 & -13 \end{pmatrix}$$

en $M_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

3.5. La matriz de cambio de base

Sea $T : V \to W$ una función lineal, β, β' dos bases para ${}_F V$, $\gamma, \gamma\prime$ dos bases para W. Como

$$T = Id_W \circ T \circ Id_V$$

entonces

$$[T]_\beta^\gamma = [Id_W]_{\gamma\prime}^{\gamma} \circ [T]_{\beta\prime}^{\gamma\prime} \circ [Id_V]_\beta^{\beta\prime}.$$

En particular, para $T : V \to V$, $\beta, \beta\prime$ bases para ${}_F V$ tenemos que

$$[T]_\beta^\beta = [Id_W]_{\beta\prime}^{\beta} \circ [T]_{\beta\prime}^{\beta\prime} \circ [Id_V]_\beta^{\beta\prime}.$$

Su uno hace $Q = [Id_V]_\beta^{\beta\prime}$, notemos que $Q^{-1} = [Id_V]_{\beta\prime}^{\beta}$ y uno puede escribir

$$[T]_\beta^\beta = Q^{-1} \circ [T]_{\beta\prime}^{\beta\prime} \circ Q.$$

Definición 51 *La matriz $[Id_V]_\beta^{\beta\prime}$ se llama la matriz de cambio de base de β a $\beta\prime$, ya que el siguiente cuadrado es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rrr, "Id_V"] \arrow[ddd, "\varphi_\beta"'] & & & V \arrow[ddd, "\varphi_\beta"] \\
& \vec{x} \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & \vec{x} \arrow[d] & \\
& {[\vec{x}]_\beta} \arrow[r, mapsto] & {[\vec{x}]_{\beta'}} & \\
F^{|\beta|} \arrow[rrr, "{[Id_V]_\beta^{\beta'} \cdot _}"'] & & & F^{|\beta'|}
\end{tikzcd}$$

de donde se vé que $[Id_V]_\beta^{\beta\prime} \cdot \_$ manda el vector de coordenadas de $\vec{x}$ respecto a la base β al vector de coordenadas de $\vec{x}$ respecto a la base $\beta\prime$.

Así, si $\beta = \{\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n\}$, $\gamma = \{\vec{y}_1, ..., \vec{y}_n\}$ y $\vec{x} = a_1\vec{x}_1 + ... + a_n\vec{x}_n$ entonces

$$[Id_V]_\beta^{\beta\prime} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = b_1\vec{y}_1 + ... + b_n\vec{y}_n.$$

Definición 52 *Se dice que dos matrices A y $B \in M_{n\times n}(F)$ son similares si $\exists Q \in M_{n\times n}(F)$ invertible, tal que*

$$A = Q^{-1}BQ.$$

Ejercicio 92 *La relación de similaridad $\backsim$ es una relación de equivalencia en $M_{n\times n}(F)$.*

Definición 53 *1. Se dice que la matriz A representa a la función lineal $T : V \to W$ si existen β base de V, γ base de W tales que $A = [T]_\beta^\gamma$.*

2. Se dice que la matriz A representa a la función lineal $T : V \to V$ si existe β base de V, tal que $A = [T]_\beta^\beta$.

Teorema 44 *A es similar a $B \iff A$ y B representan al mismo operador lineal[4] $T : V \to V$.*

Demostración. $\Leftarrow$) Si $A = [T]_\beta^\beta$ y $B = [T]_\gamma^\gamma$, entonces:

$$T = Id \circ T \circ Id \Rightarrow [T]_\beta^\beta = [Id]_\gamma^\beta \cdot [T]_\gamma^\gamma \cdot [Id]_\beta^\gamma.$$

Como $[Id]_\gamma^\beta [Id]_\beta^\gamma = [Id]_\beta^\beta = I_n$, tenemos que $[Id]_\gamma^\beta = \left([Id]_\beta^\gamma\right)^{-1}$.

$\Rightarrow$) Si $A = Q^{-1}BQ$, entonces A representa a $A \cdot \_ : F^n \to F^n$. Entonces $A = [A \cdot \_]_\beta^\beta$, donde β es la base canónica de F^n.

$A = [A \cdot \_]_\beta^\beta = [Id]_\gamma^\beta [A \cdot \_]_\gamma^\gamma [Id]_\beta^\gamma$ y $A = Q^{-1}BQ$. Entonces es claro que si $[Id]_\gamma^\beta = Q^{-1}$, entonces $B = [A \cdot \_]_\gamma^\gamma$.

De $[Id]_\gamma^\beta = Q^{-1}$observemos que basta tomar

$$\gamma = \left\{ \left(Q^{-1}\right)^{\underline{1}}, \left(Q^{-1}\right)^{\underline{2}}, ..., \left(Q^{-1}\right)^{\underline{n}} \right\}.$$

■

Ejercicio 93 *Sea*

$$\begin{array}{cccc} T: & P_3(\mathbb{R}) & \to & M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & \begin{pmatrix} \int_0^1 f & \int_0^2 f \\ f'(0) & f(1) - f(0) \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Encuentre la matriz de T respecto de las bases canónicas.
2. Encuentre la inversa de la matriz anterior.
3. Encuentre T^{-1}, y diga cuánto es $T^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

[4]Cuando una función lineal $T : V \to V$, va de V a V, se dice que T es un operador.

4. Aplique la fórmula para encontrar $T^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 94 *1.* a*) Encuentre un polinomio cuya integral de* 0 *a* 1 *valga* 2*,*

b*) su integral de* 0 *a* 2 *sea* 4*,*

c*) su derivada en* 0 *sea* 7

d*) y su valor en* 1 *sea* 2 *más su valor en* 0*.*

Ejercicio 95 *Sea*

$$\begin{array}{ccc} P_5(\mathbb{R}) & \xrightarrow{T} & M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \begin{pmatrix} f(1) & f((2) & f(0) \\ \int_{-1}^{1} f & f'(0) & f'(0) \end{pmatrix} \end{array}.$$

1. Calcule la matriz de T respecto a las bases canónicas.

2. Encuentre el inverso de la matriz del inciso anterior.

3. Muestre que T es un isomorfismo.

4. Calcule T^{-1}.

5. Use T^{-1} para encontrar un polinomio que en 1 valga 2, en 2 valga 3, que en 0 valga 5, que tenga un máximo local en 0, y que su integral de -1 a 1 sea 2

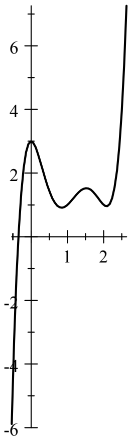
Ejercicio 96 *Muestre que el conjunto de todos los polinomios que satisfacen el inciso* 5 *del ejercicio anterior son tantos como* $|\mathbb{R}|$*.*

Ejercicio 97 *Sea*

$$\begin{array}{ccc} P_5(\mathbb{R}) & \xrightarrow{T} & M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \begin{pmatrix} f(1) & f((2) & f(0) \\ f'(1) & f'(2) & f'(0) \end{pmatrix} \end{array}.$$

1. *Calcule la inversa de* T*.*

2. *Use el inciso anterior para encontrar un polinomio que en* 1 *valga 1, en 2 valga* 1*, en* 0 *valga 3, y tales que sus derivadas en 1,2, y 0 sean 1,-1,0, respectivamente.*



Ejercicio 98 $\beta = \{sen\,(x)\,, \cos\,(x)\}$ *es una base para*

$$\{f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,|f''(x) = -f\,(x)\,,\ f \text{ tiene todas sus derivadas}\}\,.$$

$\gamma = \{sen\,(x+1)\,, \cos\,(x+1)\}$ *es otra base. Encuentre la matriz de cambio de coordenadas* $[Id]_\beta^\gamma$, *y las coordenadas de* $sen(x) - 3\cos\,(x)$ *respecto de* γ.

Ejercicio 99 *Recuerde que la proyección sobre* W *a lo largo de* Z, *es*

$$\begin{array}{rccc} p_W^Z: & W \bigoplus Z & \to & W \\ & \vec{w} + \vec{z} & \longmapsto & \vec{w} \end{array}.$$

1. Demuestre que p_W^Z es idempotente, es decir, que $p_W^Z \circ p_W^Z = p_W^Z$.

2. Muestre que todo operador lineal $T : V \to V$ idempotente es una proyección, mostrando que $T = p_{T(V)}^{\mathrm{Ker}(T)}$.

3. Sean W_1, W_2, W_3 los subespacios de $\mathbb{R}^2$, siguientes:

$$\begin{array}{l} W_1 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ W_2 = \{(0,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ W_3 = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}\,, \end{array}$$

   calcular $p_{W_1}^{W_2}$, $p_{W_1}^{W_3}$ y ver que son distintos.

Ejercicio 100 *Sean γ una base de W (W de dimensión m) y $T : V \to W$ una función.*

1. Demuestre que T es lineal $\Leftrightarrow \Phi_\gamma \circ T : V \to F^m$ es lineal.
2. Demuestre que $S : V \to F^m$ es lineal $\Leftrightarrow p_i \circ S$ es lineal para cada $i \in \{1, ..., m\}$.
3. Use lo anterior para mostrar que

$$\begin{array}{ccc} P_5(\mathbb{R}) & \xrightarrow{T} & M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \begin{pmatrix} f(1) & f((2) & f(0) \\ \int_{-1}^{1} f & f'(0) & f'(0) \end{pmatrix} \end{array}$$

es lineal.

Ejercicio 101 *Consideremos las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 8 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

1. *Calcule Q^{-1}*
2. *Verifique que* $QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. *Note que $QA^nQ^{-1} = (QAQ^{-1})^n, \forall n \in N$.*
4. *Calcule* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^8$.

1. Muestre que

$$\begin{array}{cccc} i_k : & F & \to & F^n \\ & r & \longmapsto & r\vec{e}_k^{\,t} \end{array},$$

es lineal, donde $\left(\vec{e}_k^{\,t} = \left(\underbrace{0, 0, ..., 0, 1}_{\text{k coordenadas}}, 0, ..., 0\right)\right)$.

2. Si $F^n \xrightarrow{T} F^n$ es lineal, entonces $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$
$$= (T \circ i_1)(x_1) + (T \circ i_2)(x_2) + ... + (T \circ i_n)(x_n)$$
3. $(i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 + ... + i_n \circ p_n) = Id_{F^n}$
4. Muestre que T es lineal si y sólo si $T \circ i_k$ es lineal, para cada $k \in \{1, ..., n\}$.

Ejercicio 102 *Suponga que* $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & Q \end{pmatrix}$ *son matrices de* $n \times m$ *y* $m \times r$*, respectivamente. Suponga que las submatrices* A, B, C, D, X, Y, Z, Q *son tales que se pueden realizar los productos*

$$AX, BY, AY, BQ, CX, DZ, CY, DQ.$$

Muestre que $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX+BZ & AY+BQ \\ CX+DZ & CY+DQ \end{pmatrix}$.

Ejercicio 103 *Verifique lo anterior multiplicando las matrices*

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -9 & -6 \\ 68 & 4 \end{bmatrix} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 104 *Se dice que* $W \leqslant V$ *es* $T-$*invariante,*$T : V \to V$ *lineal, si* $T(W) \leqslant W$*, es decir si*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] & V \\ W \arrow[u, "inc."] \arrow[r, "T_{|W}"] \arrow[ur, phantom, "="] & W \arrow[u, "inc."'] \end{tikzcd}$$

conmuta.

1. *Suponga que la dimensión de* V *es* n *y que la de* W *es* m*. Muestre que si* γ *es una base para* W*, entonces existe* β *base de* V *tal que*
$$[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} [T_{|W}]_\gamma^\gamma & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

2. *Muestre que T invertible $\Rightarrow T_{|W}$ invertible y C es invertible.*

3. *Muestre que T es invertible $\Longleftrightarrow$*

$$\begin{pmatrix} \left[T_{|W}\right]_\gamma^\gamma & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \left(\left[T_{|W}\right]_\gamma^\gamma\right)^{-1} & Y \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}^{-1},$$

donde Y satisface $\left[T_{|W}\right]_\gamma^\gamma Y + BC^{-1} = 0$. Es decir,

$$Y = \left(\left[T_{|W}\right]_\gamma^\gamma\right)^{-1}\left(-BC^{-1}\right).$$

Ejercicio 105 *Muestre que* $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ *es invertible $\Longleftrightarrow$ A y C son invertibles.*

Ejercicio 106 *Muestre que*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -9 & -51 & -7 & -7 \\ 3 & 3 & 5 & -9 & 1 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

es invertible, calculando

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1}, C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -9 & -51 & -7 & -7 \\ 5 & -9 & 1 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

y usando el ejercicio anterior.

Ejercicio 107 *Muestre que si $T : V \to V$ tiene un subespacio $T-$invariante W, son equivalentes:*

1. *T es invertible.*

2. *$T_{|W} : W \longrightarrow W$ y $p_Z^W \circ T \circ i_Z$, son invertibles, donde*

   a) *$V = W \bigoplus Z$,*

   b) *$Z \xrightarrow{i_Z} V$ es la inclusión,*

   c) *p_Z^W es la proyección sobre Z a lo largo de W.*

Ejercicio 108 *Muestre que*

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+2y+7z-3t \\ 3x+4y+2z-4t \\ z+t \\ 2z \end{pmatrix} \end{array}$$

tiene un subespacio $T-$invariante W de dimensión 2 que satisface las condiciones del inciso 2 del ejercicio anterior.

Ejercicio 109 1. *Muestre que $\mathbb{C} \xrightarrow{\overline{()}} \mathbb{C}$ la conjugación, no es una función $\mathbb{C}-$lineal. Es decir, que no respeta multiplicación por complejos.*

2. *Sin embargo, muestre que $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \end{array}$ es $\mathbb{R}-$lineal.*

3. *Concluya que $\mathbb{C} \xrightarrow{\overline{()}} \mathbb{C}$ respeta la suma pero no es lineal.*

Capítulo 4

Sistemas de ecuaciones lineales

4.1. Operaciones elementales

Observación 36 *Para una matriz* $A \in M_{n\times m}(F)$, $B \in M_{m\times r}(F)$, *se tiene que*

$$AB = \left(AB^{\underline{1}} \mid AB^{\underline{2}} \mid ... \mid AB^{\underline{r}}\right)$$

Demostración. $(AB)^{\underline{j}} = (AB)\vec{e}_j = A(B\vec{e}_j) = AB^{\underline{j}}$. ■

Observación 37 *Denotemos* $\vec{e}_i^{\,t} = \left(\underbrace{0, ..., 1}_{i\ lugares}, 0, ..,0\right)$. *Sea* $A \in M_{n\times m}(F)$, *entonces*

$$\vec{e}_i^{\,t} A = A_{\underline{i}},$$

el i-ésimo renglón de A.

Demostración.

$$\vec{e}_i^{\,t} A = \left(\vec{e}_i^{\,t} A^{\underline{1}} \mid \vec{e}_i^{\,t} A^{\underline{2}} \mid ... \mid \vec{e}_i^{\,t} A^{\underline{r}}\right).$$

Ahora,

$$\vec{e}_i^{\,t} A^{\underline{j}} = \left(\underbrace{0, ..., 1}_{i \text{ lugares}}, 0, ..,0\right) \begin{pmatrix} A_{1,j} \\ \vdots \\ A_{i,j} \\ \vdots \\ A_{n,j} \end{pmatrix} = A_{i,j}.$$

■

Observación 38 $AB = \begin{pmatrix} \underline{A_{\underline{1}}B} \\ \underline{A_{\underline{2}}B} \\ \vdots \\ \underline{A_{\underline{r}}B} \end{pmatrix}.$

Demostración. $(AB)_{\underline{i}} = \vec{e}_i^{\,t}(AB) = (\vec{e}_i^{\,t}A)B = A_{\underline{i}}B.$ ■

Definición 54 *1. Definimos la operación elemental*

$$\mathcal{J}_{i,j} : M_{n\times m}(F) \to M_{n\times m}(F),$$

como la operación que intercambia los renglones i-ésimo y j-ésimo.

2. Definimos la matriz elemental $\mathfrak{J}_{i,j} =: \mathcal{J}_{i,j}(I_n)$.

Teorema 45 *Si* $C \in M_{n\times m}(F)$ *entonces* $\mathcal{J}_{i,j}(C) = \mathfrak{J}_{i,j} \cdot (C)$

Demostración.

$$\mathfrak{J}_{\mathrm{i,j}} \cdot (C) = \begin{pmatrix} i \text{ lugares}\left\{\begin{array}{c} \vec{e}_1^{\,t} \\ \vdots \\ \vec{e}_j^{\,t} \end{array}\right. & \\ \vdots & \left.\right\} j \text{ lugares} \\ \vec{e}_i^{\,t} & \\ \vdots & \\ \vec{e}_n^{\,t} & \end{pmatrix} \cdot (C) =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{i lugares}\left\{\begin{array}{c} C_{\underline{1}} \\ \vdots \\ C_{\underline{j}} \end{array}\right. & \\ \vdots & \left.\right\} \text{j lugares} \\ C_{\underline{i}} & \\ \vdots & \\ C_{\underline{n}} & \end{pmatrix} = \mathfrak{J}_{i,j}(C).$$

■

Definición 55 *Definimos la función $M_{c,i} : F^n \to F^n$, $c \in F$ por medio de:*

$$M_{c,i} : F^n \to F^n$$

$$\vec{e}_i \mapsto c \cdot \vec{e}_i$$

$$\vec{e}_j \mapsto \vec{e}_j, \ j \neq i.$$

Así, $M_{c,i}$ multiplica por c la i-ésima coordenada de un vector en F^n.

Definición 56 *Sea β la base canónica de F^n, denotemos por $\mathfrak{M}_{c,i}$ la matriz $[M_{c,i}]_\beta^\beta$, es decir que*

$$\begin{tikzcd}
F^n \arrow[r, "M_{c,i}"] \arrow[d, "Id=\Phi_\beta"'] \arrow[dr, phantom, "="] & F^n \arrow[d, "\Phi_\beta."] \\
F^n \arrow[r, "\mathfrak{M}_{c,i}\cdot_"] & F^n
\end{tikzcd}$$

Nótese que $M_{c,i} = \mathfrak{M}_{c,i} \cdot \_$.

Definición 57 *Ahora definamos $\mathcal{M}_{c,i} : M_{n\times m}(F) \to M_{n\times m}(F)$ por medio de:* $\mathcal{M}_{c,i}\begin{pmatrix} A_{\underline{1}} \\ \vdots \\ A_{\underline{i}} \\ \vdots \\ A_{\underline{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\underline{1}} \\ \vdots \\ c \cdot A_{\underline{i}} \\ \vdots \\ A_{\underline{n}} \end{pmatrix}$, *es decir, $\mathcal{M}_{c,i}$ multiplica por c el $i-$ésimo renglón de una matriz. Nótese que $\mathcal{M}_{c,i}$ es lineal.*

Teorema 46 *Si $A \in M_{n\times m}(F)$ entonces $\mathcal{M}_{c,i}(A) = \mathcal{M}_{c,i}(I_n) \cdot A$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{c,i}(A) &= \left(M_{c,i}\left(A^{\underline{1}}\right) \mid M_{c,i}\left(A^{\underline{2}}\right) \mid ... \mid M_{c,i}\left(A^{\underline{m}}\right)\right) = \\
&= \left(\mathfrak{M}_{c,i} \cdot A^{\underline{1}} \mid \mathfrak{M}_{c,i} \cdot A^{\underline{2}} \mid ... \mid \mathfrak{M}_{c,i} \cdot A^{\underline{m}}\right) = \\
&= \mathfrak{M}_{c,i} \cdot A \\
&= \left(\mathfrak{M}_{c,i} \cdot \vec{e}_1 \mid \mathfrak{M}_{c,i} \cdot \vec{e}_2 \mid ... \mid \mathfrak{M}_{c,i} \cdot \vec{e}_n\right) \cdot A = \\
&= \left(M_{c,i}(\vec{e}_1) \mid M_{c,i}(\vec{e}_2) \mid ... \mid M_{c,i}(\vec{e}_n)\right) \cdot A = \\
&= \mathcal{M}_{c,i}(I_n) \cdot A.
\end{aligned}$$

■

Definición 58 *Definamos* $\mathcal{S}_{c,i,j}; M_{n\times m}(F) \to M_{n\times m}(F)$ *por*

$$\mathcal{S}_{c,i,j}(A)_{\underline{k}} = \begin{cases} A_{\underline{k}} \text{ si } k \neq j \\ cA_{\underline{i}} + A_{\underline{j}} \text{ si } k = j \end{cases}.$$

Teorema 47 $\mathcal{S}_{c,i,j}(A) = \mathcal{S}_{c,i,j}(I_n) \cdot A$.

Demostración.

$$\vec{e}^{\,t}_k \mathcal{S}_{c,i,j}(A) = \begin{cases} A_{\underline{k}} \text{ si } k \neq j \\ cA_{\underline{i}} + A_{\underline{j}} \text{ si } k = j \end{cases}.$$

Por otra parte,

$$\vec{e}^{\,t}_k \mathcal{S}_{c,i,j}(I_n) = \begin{cases} \vec{e}^{\,t}_{\underline{k}} \text{ si } k \neq j \\ c\vec{e}^{\,t}_{\underline{i}} + \vec{e}^{\,t}_{\underline{j}} \text{ si } k = j \end{cases},$$

entonces

$$\vec{e}^{\,t}_k \mathcal{S}_{c,i,j}(I_n) \cdot (A) = \begin{cases} A_{\underline{k}} \text{ si } k \neq j \\ cA_{\underline{i}} + A_{\underline{j}} \text{ si } k = j \end{cases}.$$

■

Definición 59
1. *Las funciones* $\mathcal{J}_{i,j}, \mathcal{M}_{c,i}$ $(c \neq 0)$, $\mathcal{S}_{c,i,j}$ *se llaman operaciones elementales de renglón y las matrices* $\mathcal{J}_{i,j}(I_n), \mathcal{M}_{c,i}(I_n)$ $(c \neq 0)$, $\mathcal{S}_{c,i,j}(I_n)$, *se llaman matrices elementales.*
2. *Se dice que* $\mathcal{J}_{i,j}$, *es de tipo* 1, $\mathcal{M}_{c,i}$ $(c \neq 0)$, *es de tipo* 2, $\mathcal{S}_{c,i,j}$ *es de tipo* 3.
3. *Se dice que las matrices* $\mathcal{J}_{i,j}(I_n), \mathcal{M}_{c,i}(I_n)$ $(c \neq 0)$, $\mathcal{S}_{c,i,j}(I_n)$, *son de tipo* 1, 2, 3, *respectivamente.*

Ejercicio 110
1. *Demuestre que las operaciones elementales son invertibles. De hecho, demuestre que* $\mathcal{J}_{i,j}^{-1} = \mathcal{J}_{i,j}$, $\mathcal{M}_{c,i}^{-1} = \mathcal{M}_{\frac{1}{c},i}$, $\mathcal{S}_{c,i,j} = \mathcal{S}_{-c,i,j}$.
2. *Demuestre que las matrices elementales son invertibles. Muestre que*

$$(\mathcal{R}(I_n))^{-1} = \mathcal{R}^{-1}(I_n).$$

3. *Concluya que el inverso de una matriz elemental* E, *es del mismo tipo que* E.

Notación 5
1. *Si* $A \in M_{n\times m}(F)$, *el rango (de renglones de* A*) es la dimensión del espacio generado por los renglones. Denotaremos por rango(*A*) al rango de renglones de* A.

2. *Si $A \in M_{n\times m}(F)$, el rango (de columnas de A) es la dimensión del espacio generado por las columnas. denotaremos rango$^*(A)$.*

Teorema 48 *Si $\mathcal{R}$ es una operación elemental de renglón, entonces para cualquier matriz*

$$A \in M_{n\times m}(F),$$

se tiene que

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(I_n) \cdot A.$$

Demostración. Teoremas 45, 46, 47. ■

Teorema 49 *rango$^*(A)$ = rango$(A \cdot _)$, donde $F^m \xrightarrow{A\cdot\_} F^n$.*

Demostración. $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_m\}$ genera F^m, por lo tanto

$$(A \cdot \_)(\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_m\}) = \left\{A^1, A^2, ..., A^m\right\}$$

genera la imagen de $(A \cdot \_)$. Entonces

$$\text{rango}(A \cdot \_) = \dim \mathfrak{L}\left(\left\{A^1, A^2, ..., A^m\right\}\right) = \text{rango}^*(A).$$

■

Lema 3 *Sea $T : V \to W$ una función lineal, y $\phi : Z \to V$, $\Psi : W \to Y$ isomorfismos entonces rango$(T \circ \phi)$ = rango(T) = rango$(\psi \circ T)$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}\text{rango}(T \circ \phi) &= \dim((T \circ \phi)(Z)) = \\ &= \dim(T(\phi(Z))) = \dim(T(V)) = \text{rango}(T).\end{aligned}$$

Por otro lado, si consideramos $V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{\psi} Z$, y tomamos β una base de $T(V)$, entonces $\psi(\beta)$ es una base para $\psi(T(V))$. Lo anterior se debe a que tenemos un isomorfismo

$$T(V) \xrightarrow{\psi_{|T(V)}} \psi(T(V)).$$

Entonces rango$(\psi \circ T) = \dim(\psi(T(V))) = \dim(T(V)) =$ rango(T). ■

Ejercicio 111 *Si el diagrama*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "="] & W \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "U"] & Y \end{tikzcd}$$

conmuta, y φ, ψ son isomorfismos, demuestre que rango$(T) =$ rango(U).

Teorema 50 *Las operaciones elementales de renglón no alteran el rango de renglón de una matriz.*

Demostración. Sea $\mathcal{R}$ una operación elemental de renglón, y sea A una matriz en $M_{n\times m}(F)$, veamos que el espacio generado por los renglones de A está incluído dentro del espacio generado por los renglones de $\mathcal{R}(A)$.

1. Si $\mathcal{R} = \mathcal{J}_{i,j}$, es claro que

$$\mathfrak{L}\left(\{A_{\underline{1}},...,A_{\underline{n}}\}\right) = \mathfrak{L}\left(\left\{(\mathcal{J}_{i,j}(A))_{\underline{1}},...,(\mathcal{J}_{i,j}(A_{\underline{n}}))\right\}\right).$$

2. Si $\mathcal{R} = \mathcal{M}_{c,i}$, entonces

$$\{A_{\underline{1}},...,A_{\underline{n}}\} \subseteq \mathfrak{L}\left(\left\{(\mathcal{M}_{c,i}(A))_{\underline{1}},...,(\mathcal{M}_{c,i}(A_{\underline{n}}))\right\}\right),$$

ya que

$$\left\{(\mathcal{M}_{c,i}(A))_{\underline{1}},...,(\mathcal{M}_{c,i}(A_{\underline{n}}))\right\} = \{A_{\underline{1}},...,cA_{\underline{i}},...,A_{\underline{n}}\}.$$

3. Si $\mathcal{R} = \mathcal{S}_{c,i,j}$, entonces el conjunto de renglones de $\mathcal{R}(A)$ es:

$$\left\{\underbrace{A_{\underline{1}},...,cA_{\underline{i}}+A_{\underline{j}}}_{j \text{ lugares}},...,A_{\underline{n}}\right\},$$

como $A_{\underline{j}} = \left(cA_{\underline{i}}+A_{\underline{j}}\right) - cA_{\underline{i}}$, entonces debe ser claro que

$$\{A_{\underline{1}},...,A_{\underline{n}}\} \subseteq \mathfrak{L}\left(\left\{(\mathcal{S}_{c,i,j}(A))_{\underline{1}},...,(\mathcal{S}_{c,i,j}(A))_{\underline{n}}\right\}\right).$$

En cualquier caso tenemos que

$$\mathfrak{L}\{A_{\underline{1}},...,A_{\underline{n}}\} \subseteq \mathfrak{L}\left(\left\{(\mathcal{R}(A))_{\underline{1}},...,(\mathcal{R}(A))_{\underline{n}}\right\}\right).$$

Una nueva aplicación del argumento, nos dice que

$$\mathfrak{L}\left(\left\{(\mathcal{R}(A))_{\underline{1}},...,(\mathcal{R}(A_{\underline{n}}))\right\}\right) \subseteq \mathfrak{L}\left(\left\{\left(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{R}(A)\right)_{\underline{1}},...,\left(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{R}(A)\right)_{\underline{n}}\right\}\right) =$$

$$= \mathfrak{L}\{A_{\underline{1}},...,A_{\underline{n}}\}.$$

Entonces, como una operación de renglón no cambia el espacio generado por los renglones de una matriz, tampoco cambia el rango de renglón. ■

Teorema 51 *Las operaciones elementales de renglón no alteran el rango de columna de una matriz.*

Demostración. Sea $\mathcal{R}$ una operación elemental de renglón, y sea $A \in M_{n\times m}(F)$. Como vimos en el Teorema 48, $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(I_n)\cdot A$.

Observando el diagrama

$$F^m \overset{A\cdot\_}{\rightarrow} F^n \overset{\mathcal{R}(I_n)\cdot\_}{\rightarrow} F^n,$$

y en vista de que $\mathcal{R}(I_n)\cdot\_$ es un isomorfismo[1] ($\mathcal{R}(I_n)$ tiene como inversa $\mathcal{R}^{-1}(I_n)$) concluímos, usando el Teorema 49 y el Lema 3 que

$$\text{rango}^*(A) = \text{rango}(A\cdot\_) = \text{rango}((\mathcal{R}(I_n)\cdot\_)\circ(A\cdot\_)) =$$

$$= \text{rango}^*(\mathcal{R}(I_n)\cdot A) = \text{rango}^*(\mathcal{R}(A)).$$

■

Definición 60 *Se definen las operaciones elementales de columna*

$$\mathcal{J}'_{i,j}, \mathcal{M}'_{c,i}, \mathcal{S}'_{c,i,j},$$

de la manera natural. Análogamente se definen las matrices elementales de columna

$$\mathcal{J}'_{i,j}(I_n), \mathcal{M}'_{c,i}(I_n), \mathcal{S}'_{c,i,j}(I_n).$$

Ejercicio 112 *Una matriz elemental de columna es una matriz elemental de renglón (y del mismo tipo). Por ejemplo,* $\mathcal{J}'_{i,j}(I_n) = \mathcal{J}_{i,j}(I_n)$.

[1] Recuérdese que una función lineal entre dos espacios de dimensión finita es invertible si y sólo si su matriz es invertible.

Ejercicio 113 *Denotemos por $\mathcal{E}\,'$ una operación elemental de columna y por $\mathcal{E}$ a la operación de renglón que se obtiene al suprimir el símbolo "$'$". (Es decir, si $\mathcal{E}\,' = \mathcal{J}'_{i,j}$, entonces $\mathcal{E} = \mathcal{J}_{i,j}$.) Demuestre que $\mathcal{E}\,'(A) = \left(\mathcal{E}\left(A^t\right)\right)^t$.*

Teorema 52 *Las operaciones elementales de columna no alteran el rango de renglón.*

Demostración. Usaremos el ejercicio anterior.

$$\operatorname{rango}\left(\mathcal{E}'(A)\right) = \operatorname{rango}\left(\mathcal{E}\left(A^t\right)\right)^t =$$
$$= \operatorname{rango}^* \mathcal{E}\left(A^t\right) = \operatorname{rango}^*\left(A^t\right) = \operatorname{rango}(A).$$

En donde hemos usado que una operación elemental de renglón no altera el rango de columna para afirmar que $\operatorname{rango}^* \mathcal{E}\left(A^t\right) = \operatorname{rango}^*\left(A^t\right)$, y el hecho obvio de que $\operatorname{rango}^*\left(A^t\right) = \operatorname{rango}(A)$. ■

Es claro que una operación elemental de columna no altera el espacio generado por las columnas de una matriz. En consecuencia, las operaciones elementales de columna no alteran el rango de columna de una matriz. Podemos resumir en el siguiente Teorema.

Teorema 53 *Una operación elemental (de renglón o de columna) no altera el rango (de renglón o de columna) de una matriz.* ■

4.1.1. Matrices reducidas y escalonadas

Definición 61 *Una matriz $A \in M_{n\times m}(F)$ está reducida y escalonada si*

1. $A_{\underline{i}} \neq \vec{0} \Rightarrow$ *el primer coeficiente distinto de cero de* $A_{\underline{i}}$ [2] *es* 1.

2. $\left(A_{\underline{j}} \neq \vec{0}, i < j\right) \Rightarrow$ *($A_{\underline{i}} \neq \vec{0}$ y el coeficiente principal de $A_{\underline{i}}$ va a la izquierda del coeficiente principal de $A_{\underline{j}}$).*

3. *Si $A_{i,k}$ es el coeficiente principal del renglón $i-$ésimo, entonces la columna k-ésima es $\vec{e}_i$.*

Ejemplo 62 1. *Una matriz de ceros está reducida y escalonada.*

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *está reducida y escalonada.*

[2] Este coeficiente se llama el coeficiente principal.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *está reducida y escalonada.*

4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *no está reducida y escalonada.*

5. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *no está reducida y escalonada*

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *no está reducida y escalonada.*

Definición 62 *En $M_{n\times m}(F)$ definimos la relación $\bowtie$ por:*

$$A \bowtie B$$

si B se puede obtener de A mediante operaciones elementales de renglón.

Observación 39 *Notemos que $A \bowtie B \Leftrightarrow \exists \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_s$ operaciones elementales de renglón tales que $\mathcal{E}_1 \circ ... \circ \mathcal{E}_s(A) = B \Leftrightarrow$ ($\exists E_1, ..., E_s$ matrices elementales tales que $E_1 \cdot ... \cdot E_s \cdot A = B$).*

Observación 40 *La relación $\bowtie$ es de equivalencia.*

Demostración. 1. $\forall A \in M_{n\times m}(F)$, $A = \mathcal{M}_{1,1}(A) = I_n \cdot A = A$.

2. $A \bowtie B \Rightarrow E_1 \cdot ... \cdot E_s \cdot A = B \Rightarrow A = E_s^{-1} \cdot ... \cdot E_1^{-1} \cdot B \Rightarrow B \bowtie A$.

3. $(A \bowtie B \wedge B \bowtie C) \Rightarrow E_1 \cdot ... \cdot E_s \cdot A \wedge H_1 \cdot ... \cdot H_t \cdot B = C$ para matrices elementales $E_1, ..., E_s, H_1, ...H_t$. Entonces

$$H_1 \cdot ... \cdot H_t \cdot E_1 \cdot ... \cdot E_s \cdot A = H_1 \cdot ... \cdot H_t \cdot B = C,$$

es decir, $A \bowtie C$. ■

Teorema 54 *Toda matriz $A \in M_{n\times m}(F)$ se puede reducir y escalonar por medio de un número finito de operaciones elementales de renglón.*

Demostración. Por inducción sobre m, el número de columnas de A. Notemos que si A es la matriz cero, entonces A ya está reducida y escalonada.

Base.

Si $m = 1$, entonces $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} \\ \vdots \\ A_{i,1} \\ \vdots \\ A_{n,1} \end{pmatrix}$. Si $A_{i,1} \neq 0$, entonces $\mathcal{J}_{i,j}(A)$ es una matriz cuya coordenada superior es distinta de 0: $\begin{pmatrix} A_{i,1} \\ \vdots \\ A_{1,1} \\ \vdots \\ A_{n,1} \end{pmatrix}$, aplicando $\mathcal{M}_{\frac{1}{A_{i,1}},1}$ obtenemos $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ A_{1,1} \\ \vdots \\ A_{n,1} \end{pmatrix}$, ahora aplicando

$$\mathcal{S}_{-A_{2,1},1,2}, \mathcal{S}_{-A_{3,1},1,2}, ..., \mathcal{S}_{-A_{n,1},1,2}$$

sucesivamente, obtenemos $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ que ya está reducida y escalonada.

Paso inductivo.

Supongamos que $m > 1$ y que la afirmación es cierta para matrices con menos de m columnas.

Por hipótesis de inducción, podemos encontrar matrices elementales

$$E_1, ..., E_s$$

tales que

$$E_s \cdot, ... \cdot E_1 \left(A^{\underline{1}}, ..., A^{\underline{m-1}}\right) = R,$$

está reducida y escalonada, entonces $E_s \cdot, ... \cdot E_1 \cdot A = (R \mid \vec{v})$, donde R está reducida y escalonada y $\vec{v} \in F^n$.[3]. Consideremos

$$(R \mid \vec{v}) = \left(\begin{array}{r} r \text{ renglones} \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & * & * & \cdots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * \end{array} \right),$$

si las coordenadas $r+1$, $r+2$,..., n de la última columna son 0, entonces la matriz completa ya está reducida y escalonada. En caso contrario, hay una $k-$ésima coordenada $(k > r)$ de la última columna distinta de cero. Intercambiando el renglón $k-$ésimo con el $r+1-$ésimo, conseguimos que el coeficiente $r+1, n-$ésimo de la matriz sea distinto de cero, enseguida lo podemos cambiar por un 1, multiplicando el $r+1-$ésimo renglón por el recíproco del $r+1, n-$ésimo coeficiente. Así el renglón $r+1-$ésimo es $(0,0,...,0,1)$, por medio de operaciones de renglón del tercer tipo, podemos cambiar los demás coeficientes en la última columna por 0. Obtenemos

$$\left(\begin{array}{r} r \text{ renglones} \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & * & * & \cdots & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & * & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

que ya está reducida y escalonada. ■

Ejercicio 114 *Demuestre que una matriz puede ser transformada en una única matriz reducida y escalonada.*

Teorema 55 *El rango de renglón y el rango de columna de una matriz coinciden.*

[3]Recordemos que $AB = \left(AB^{\underline{1}} \mid AB^{\underline{2}} \mid ... \mid AB^{\underline{r}}\right)$, si $A \in M_{n\times m}(F)$ y $B \in M_{m\times r}(F)$.

Demostración. Sea $A \in M_{n\times m}(F)$, por medio de operaciones elementales de renglón se puede escalonar y reducir A. Supongamos que se obtienen $r$renglones distintos de 0, entonces $\vec{e}_1$ es la columna que corresponde al coeficiente principal del primer renglón, $\vec{e}_2$ es la columna que corresponde al coeficiente principal del segundo renglón, ... $\vec{e}_r$ es la columna que corresponde al coeficiente principal del renglón r. Intercambiando columnas si fuera necesario, podemos llevar la matriz a la forma

$$\begin{pmatrix} I_r \left\{ \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \right. & \begin{matrix} * & \cdots & * \\ * & \cdots & * \\ * & \cdots & * \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \end{pmatrix},$$

esta matriz tiene el mismo rango de renglón que de columna: r. Pero tiene el mismo rango de renglón (y de columna) que A, pues se obtuvo de A por medio de operaciones elementales, que como hemos visto no alteran los rangos. ■

Observación 41 *El Ejercicio anterior se puede replantear en la siguiente manera: se ha observado que la relación $\bowtie$ es una relación de equivalencia en $M_{n\times m}(F)$. Entonces en cada clase de equivalencia hay una única matriz reducida y escalonada. En particular, hay tantas clases de equivalencia en $M_{n\times m}(F)/\bowtie$, como matrices reducidas y escalonadas.*

Notemos, como un caso particular de la observación anterior, lo siguiente.

Lema 4 *$A \in M_{n\times n}(F)$ es invertible $\Leftrightarrow A \bowtie I_n$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si A es invertible, entonces es equivalente a una matriz reducida y escalonada con rango de columna n

$$(\text{rango}^*(A) = \text{rango}(A \cdot \_) = n,$$

pues $A \cdot \_$ es un isomorfismo entre F^n y F^n). Si E es la matriz reducida y escalonada equivalente con A, entonces tiene n renglones distintos de cero. De la misma manera que en la demostración del Teorema 55, concluímos que las n columnas de E son $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, es decir que $E = I_n$.

$\Leftarrow$) Si $E_k \cdot E_{k-1} \cdot ... \cdot E_1 \cdot A = I_n$ entonces $E_k \cdot E_{k-1} \cdot ... \cdot E_1 = A^{-1}$. ■

Corolario 9 *$A \in M_{n\times n}(F)$ es invertible $\Leftrightarrow$ A es un producto de matrices elementales.*

Demostración. $\Leftarrow$) Es claro pues toda matriz elemental es invertible y un producto de matrices invertibles es invertible.

$\Rightarrow$) Como en la demostración del Lema anterior, tenemos que

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdot ... \cdot E_1 = A^{-1}.$$

entonces

$$A = E_1^{-1} \cdot ... \cdot E_{k-1}^{-1} \cdot E^{-1}.$$

■

4.2. La inversa de una matriz

En el último Lema tenemos que si $E_k \cdot E_{k-1} \cdot ... \cdot E_1 \cdot A = I_n$, entonces

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdot ... \cdot E_1 = A^{-1}.$$

Si ponemos $I_n$en la ecuación anterior obtenemos $E_k \cdot E_{k-1} \cdot ... \cdot E_1 \cdot I_n = A^{-1}$. Lo que sugiere los siguiente:

Para obtener el inverso de una matriz invertible $A \in M_{n\times m}(F)$, hay que reducir y escalonar A, y después aplicar a I_n las mismas operaciones elementales de renglón.

Es decir que si $E_k \cdot E_{k-1} \cdot ... \cdot E_1 \cdot A = I_n$, entonces $E_k \cdot E_{k-1} \cdot ... \cdot E_1 \cdot (A \mid I_n) = (I_n \mid A^{-1})$.

Si uno toma la matriz aumentada $(A \mid I_n)$ y uno la reduce y escalona por medio de operaciones elementales de renglón, al final obtiene uno $(I_n \mid A^{-1})$.

Ejemplo 63

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{30} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

por lo que

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{30} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}^{-1}.$$

De manera análoga, si uno reduce y escalona una matriz invertible A por medio de operaciones elementales de columna, obteniendo $I_n = AE_1E_2...E_s$, entonces $A^{-1} = I_nE_1E_2...E_s$. Así que

$$\left(\frac{A}{I_n}\right) E_1E_2...E_s = \left(\frac{I_n}{A^{-1}}\right).$$

Ejemplo 64 $\begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ -1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \\ -1/5 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -6 & 6 & 6 \\ 0 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -6 & 6 \\ 0 & 1/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 6 & -6 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{30} \\ -1 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1 & 1/3 \end{pmatrix},$$

de nuevo, hemos obtenido que

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{30} \\ -1 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Ejemplo 65 *Por último, podemos notar que si llevamos la matriz invertible A a la identidad I_n, por medio de operaciones elementales de renglón y columna, es decir, si*

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdot ... \cdot E_1 \cdot A \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot ... \cdot F_s = I_n,$$

entonces multiplicando por los inversos de las E_i del lado izquierdo y por los inversos de las F_j del lado derecho, obtenemos:

$$A = E_1^{-1} \cdot ... \cdot E_k^{-1} \cdot E_{k-1}^{-1} \cdot I_n \cdot F_s^{-1} \cdot ... \cdot F_2^{-1} \cdot F_1^{-1},$$

entonces $A^{-1} = (I_n \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot ... \cdot F_s) \cdot (E_k \cdot E_{k-1} \cdot ... \cdot E_1 \cdot I_n)$, *esto sugiere lo siguiente:*

$\begin{pmatrix} A \mid I_n \\ I_n \mid * \end{pmatrix}$ y uno lleva el bloque A a la identidad por medio de operaciones elementales de renglón y columna, obteniendo al final $\begin{pmatrix} I_n \mid C \\ B \mid * \end{pmatrix}$, entonces $A^{-1} = BC$.

Notemos que en el bloque indicado por un asterisco no hace falta poner nada (si se quiere se puede completar con ceros).

Ejemplo 66

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ -1/5 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/6 \\ -1/5 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/6 \\ -1/5 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/6 \\ -1/5 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 \\ -1/5 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * & * \\ 0 & -1 & 1 & * & * & * \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 \\ -1/5 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * & * \\ 0 & -1 & 1 & * & * & * \end{array} \right).$$

Así que

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} -1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1/6 \\ -1 & 1 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{30} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \end{array} \right).$$

4.3. Sistemas de ecuaciones

Notación 6 *Dado el sistema de m ecuaciones con n incógnitas*

$$\begin{array}{ccccc} A_{1,1}\,x_1+ & ... & +A_{1,n}\,x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{m,1}\,x_1+ & ... & +A_{m,n}\,x_n & = & b_m \end{array},$$

también lo podemos representar matricialmente por

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{4.1}$$

donde $A = \left(\begin{array}{ccc} A_{1,1} & ... & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & ... & A_{m,n} \end{array} \right), \vec{x} = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right), \vec{b} = \left(\begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \right).$

Además decimos que el sistema

$$A\vec{x} = \vec{0} \tag{4.2}$$

es el sistema homogéneo asociado a 4.1.

Teorema 56 *Sea S_H el conjunto de soluciones de 4.2, entonces $S_H \leqslant F^n$ y*

$$dim\,(S_H) = n - rango\,(A)\,.$$

Demostración. $S_H = \left\{ \vec{x} \in F^n \mid A\vec{x} = \vec{0} \right\} = \mathrm{Ker}\left(: F^n \overset{A\cdot\_}{\to} F^m \right) \leqslant F^n$ y

$$\dim(S_H) + \mathrm{rango}(A) = \mathrm{nul}(A \cdot \_) + \mathrm{rango}(A \cdot \_) = n.$$

$\therefore \dim(S_H) = n -$ rango(A). ■

Definición 63 $\left(A \mid \vec{b}\right)$ *se llama la matriz aumentada del sistema de* $n \times m$ *4.1.* $\left(A \mid \vec{b}\right)$ *es la matriz que se obtiene al agregarle a la matriz* A *la columna* $\vec{b}$*, como última columna.*

Ejemplo 67 *El sistema de ecuaciones*

$$\begin{array}{l} 2x + 3y = -1 \\ 2x + 5y = 2 \end{array}$$

tiene matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \end{array} \right).$$

Definición 64 *Si* $\mathcal{E}$ *es una operación elemental de renglones, podemos aplicar la operación* $\mathcal{E}$ *a un sistema de ecuaciones, aplicándosela a la matriz aumentada del sistema.*

Es decir, si $\mathcal{E}$ es una operación elemental, y $A\vec{x} = \vec{b}$ es un sistema de ecuaciones, entonces $\mathcal{E}\left(A\vec{x} = \vec{b}\right)$ es el sistema que tiene matriz aumentada $\mathcal{E}\left(\left(A \mid \vec{b}\right)\right)$.

Ejercicio 115 *Muestre que* $\mathcal{E}\left(A\vec{x} = \vec{b}\right) \Leftrightarrow \mathcal{E}(A)\,\vec{x} = \mathcal{E}(B)$.

Ejemplo 68 *Consideremos el sistema de ecuaciones*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ -3 & e & \sqrt{2} & \pi & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \pi \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

y tomemos la operación elemental $\mathcal{S}_{3,4,2}$*, la operación que suma* 3 *veces el cuarto renglón al segundo.. La matriz aumentada del sistema es:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 9 & 8 & 7 & 6 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \pi \\ -3 & e & \sqrt{2} & \pi & -1 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

el resultado de aplicar $\mathcal{S}_{3,4,2}$ a la matriz anterior es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ -9 & 9+3e & 8+3\sqrt{2} & 7+3\pi & 3 & -1+9\sqrt{2} \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \pi \\ -3 & e & \sqrt{2} & \pi & -1 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Así que el resultado de aplicar la operación elemental $\mathcal{S}_{3,4,2}$ al sistema original es el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -9 & 9+3e & 8+3\sqrt{2} & 7+3\pi & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ -3 & e & \sqrt{2} & \pi & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+9\sqrt{2} \\ \pi \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Es decir:

$$\begin{array}{rl} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5 = & 1 \\ -9x_1+(9+3e)\,x_2+\left(8+3\sqrt{2}\right)x_3+(7+3\pi)\,x_4+3x_5 = & -1+9\sqrt{2} \\ 2x_1+4x_2+6x_3+8x_4+10x_5 = & \pi \\ -3x_1+ex_2+\sqrt{2}x_3+\pi x_4-x_5 = & 3\sqrt{2} \end{array}.$$

Teorema 57 *Las operaciones elementales no alteran el conjunto de soluciones de los sistemas de ecuaciones.*

Demostración. Sean

$$S=\left\{\vec{x}\in F^n \mid A\vec{x}=\vec{b}\right\},\ S'=\left\{x_{-}\in F^n \mid \mathcal{E}\,(A)\,\vec{x}=\mathcal{E}\left(\vec{b}\right)\right\}.$$

Veremos que $S=S'$.

$\subseteq)\vec{v}\in S\Rightarrow A\vec{v}=\vec{b}\Rightarrow E\cdot(A\vec{v})=E\cdot\vec{b}$ (con $E=\mathcal{E}\,(I_m)$), por lo tanto $\mathcal{E}\,(I_m)\,A=\mathcal{E}\,(A)$. Entonces $\mathcal{E}\,(A)\cdot\vec{v}=(\mathcal{E}\,(I_m)\,A)\cdot\vec{v}=(EA)\cdot\vec{v}=E\,(A\cdot\vec{v})=E\cdot\vec{b}=\mathcal{E}\,(I_m)\cdot\vec{b}=\mathcal{E}\left(\vec{b}\right)$. Por lo tanto $\vec{v}\in S'$.

Por lo tanto $S\subseteq S'$.

$\supseteq$) Análogo al inciso anterior, usando que $\mathcal{E}^{-1}$ es una operación elemental. ■

Teorema 58 $A\vec{x}=\vec{b}$ *tiene solución* $\Leftrightarrow$ *rango*$(A)=$ *rango*$\left(A\mid\vec{b}\right)$.

Demostración.

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ tiene solución} \Leftrightarrow$$
$$x_1 A^{\underline{1}} + ... + x_n A^{\underline{n}} = \vec{b} \text{ tiene solución} \Leftrightarrow$$
$$\vec{b} \in \mathfrak{L}\left(\left\{A^{\underline{1}}, ..., A^{\underline{n}}\right\}\right) \Leftrightarrow$$
$$\mathfrak{L}\left(\left\{A^{\underline{1}}, ..., A^{\underline{n}}\right\}\right) = \mathfrak{L}\left(\left\{A^{\underline{1}}, ..., A^{\underline{n}}\right\} \cup \left\{\vec{b}\right\}\right) \Leftrightarrow$$
$$\text{rango}\,(A) = \text{rango}\left(A \mid \vec{b}\right).$$

■

Teorema 59 *Sean*

$$S = \left\{\vec{x} \in F^n \mid A\vec{x} = \vec{b}\right\} \neq \emptyset$$

y

$$S_H = \left\{\vec{x} \in F^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\right\},$$

entonces toda solución $\vec{c} \in S$ puede escribirse como

$$\vec{c} = \vec{s} + \vec{s}_{_H} \ \text{con } \vec{s}_{_H} \in S_H,$$

donde $\vec{s} \in S$.

Demostración. Sea $\vec{c} \in S$, entonces $\vec{c} = \vec{s} + (\vec{c} - \vec{s})$. Ahora, $\vec{c} - \vec{s} \in S_H$ pues $A(\vec{c} - \vec{s}) = A\vec{c} - A\vec{s} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$.

Recíprocamente, si $\vec{c} = \vec{s} + \vec{s}_{_H}$, entonces tenemos que

$$A(\vec{s} + \vec{s}_{_H}) = A\vec{s} + A\vec{s}_{_H} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b} y$$

por lo tanto $\vec{c} \in S$. ■

Como las matrices se pueden reducir y escalonar por medio de operaciones elementales de renglón y como las operaciones elementales no cambian las soluciones, podemos notar que para resolver un sistema de ecuaciones lineales de $n \times m$ basta hacer dos cosas:

1. Reducir y escalonar la matriz aumentada del sistema.
2. Resolver el sistema reducido y escalonado resultante.

En adelante, fijaremos nuestra atención en sistemas con matrices reducidas y escalonadas.

Definición 65 *Si un sistema de ecuaciones está reducido y escalonado, podemos partir el conjunto de las variables en dos conjuntos:*

1. El conjunto de las variables que corresponden a coeficientes principales de los renglones de la matriz (a estas variables les llamaremos principales).

2. El conjunto de las demás variables, a las que llamaremos *libres*.

Observación 42 *Si un sistema de ecuaciones está reducido y escalonado (y tiene solución), entonces se pueden intercambiar las columnas (si hiciera falta) a fin de obtener un sistema de la forma*

$$\begin{pmatrix} I_r \mid * \\ \mathbb{O} \mid \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

donde r es el rango de la matriz del sistema e I_r es la matriz identidad de $r \times r$.

Observación 43 *Sea*

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

es un sistema reducido y escalonado tal que $AQ = \begin{pmatrix} I_r \mid * \\ \mathbb{O} \mid \mathbb{O} \end{pmatrix}$. *Consideremos el sistema*

$$AQ\vec{x} = \vec{b}.$$

Entonces $Q \cdot \_ : S_{A\vec{x}=\vec{b}} \to S_{AQ\vec{x}=\vec{b}}$, es una biyección entre el conjunto de soluciones de $A\vec{x} = \vec{b}$ y el conjunto de soluciones de $AQ\vec{x} = \vec{b}$.

Demostración.

$\vec{s}$ es solución de $AQ\vec{x} = \vec{b} \Longleftrightarrow AQ\vec{s} = \vec{b} \Longleftrightarrow Q\vec{s}$ es solución de $A\vec{x} = \vec{b}$. El inverso de $Q \cdot \_$ es $Q^{-1} \cdot \_$. ■

Q es un producto de matrices elementales de columna del primer tipo: Q es de la forma siguiente:

$$Q = \mathcal{J}'_{1,i_1} \circ \mathcal{J}'_{2,i_2} \circ ... \circ \mathcal{J}'_{r,i_r},$$

(convengamos en que $\mathcal{J}'_{k,k} = I_m$, para la afirmación anterior).

Notemos ahora que $\mathcal{J}'_{i,j}(I_m) = \mathcal{J}_{i,j}(I_m)$ (ejercicio). Así que en la demostración del teorema anterior, si $\vec{s}$ es solución de $AQ\vec{x} = \vec{b}$, entonces $\mathcal{J}_{1,i_1} \circ \mathcal{J}_{2,i_2} \circ ... \circ \mathcal{J}_{r,i_r}\vec{s}$ es una solución de $A\vec{x} = \vec{b}$.

Lo anterior muestra que para resolver un sistema reducido y escalonado de ecuaciones, basta resolver el sistema que resulta al reordenar las columnas de manera que las r primeras sean $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_r$ (estamos suponiendo que el rango de la matriz del sistema es r). El párrafo anterior muestra como recuperar las soluciones del sistema original.

Ejemplo 69 *Para resolver el sistema con matriz aumentada*

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 & -7 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 6 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

podemos intercambiando las columnas 3 *y* 2, *luego las columnas* $3, 5$ *y por último las columnas* 4 *y* 6, *obtener:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 & 7 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 9 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 38 & 855 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 9 & 222 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -44 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

digamos que las variables son $x_1, ..., x_6$ *entonces las variables principales son* $x_1, ..., x_4$ *y las libres son* x_5 *y* x_6. *Entonces*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 855 \\ 222 \\ -44 \\ 5 \end{pmatrix} - x_5 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - x_6 \begin{pmatrix} 38 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 855 \\ 222 \\ -44 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - x_5 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - x_6 \begin{pmatrix} 38 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Así, asignando valores a x_5 y x_6 obtenemos las soluciones.

Si queremos recuperar las soluciones del sistema original 4.3 podemos aplicar las operaciones elementales de renglón $\mathcal{J}_{2,3} \circ \mathcal{J}_{3,5} \circ \mathcal{J}_{2,4}$ a

$$\begin{pmatrix} 855 \\ 222 \\ -44 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - x_5 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - x_6 \begin{pmatrix} 38 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

es decir, $\mathcal{J}_{2,3} \circ \mathcal{J}_{3,5} \circ \mathcal{J}_{4,6} \begin{pmatrix} 855 + 5x_5 - 38x_6 \\ 222 - 9x_6 \\ -44 \\ 5 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 855 + 5x_5 - 38x_6 \\ x_5 \\ 222 - 9x_6 \\ x_6 \\ -44 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 855 \\ 0 \\ 222 \\ 0 \\ -44 \\ 5 \end{pmatrix}$
$+ x_5 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} -38 \\ 0 \\ -9 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

En efecto:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -5 & -7 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 855 + 5x_5 - 38x_6 \\ x_5 \\ 222 - 9x_6 \\ x_6 \\ -44 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

En general, podemos observar lo siguiente:

Observación 44 *El sistema de n ecuaciones con m incógnitas*

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} I_r \mid * \\ \mathbb{O} \mid \mathbb{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ br \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

es equivalente a:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_r\vec{e}_r =$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - x_{r+1}\begin{pmatrix} \underline{A^{r+1}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - ... - x_m\begin{pmatrix} \underline{A^m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

así que una solución satisface

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - x_{r+1}\begin{pmatrix} \underline{A^{r+1}} \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - x_{r+2}\begin{pmatrix} \underline{A^{r+2}} \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - ... - x_m\begin{pmatrix} \underline{A^m} \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Que como se vé está incluída en la matriz A.

Ejemplo 70

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -51 & -73 & -86 & 43 \\ 0 & 1 & 0 & -73 & -91 & -50 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & -39 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 67 \\ -49 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tiene las soluciones dadas por

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 67 \\ -49 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -51 \\ -73 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -73 \\ -91 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -86 \\ -50 \\ -39 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 43 \\ 50 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 71 *Consideremos el sistema*

$$x + 2y + z = 1$$

$$x + 2y - z = 2$$

cuya matriz aumentada es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$*, intercambiando la segunda columna con la tercera, obtenemos*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

el sistema correspondiente tiene solución

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in F,$$

intercambiando los renglones (en realidad, coordenadas) 2 *y* 3 *obtenemos las soluciones del sistema original:*

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in F.$$

En efecto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + 2t \\ -t \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 72

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Intercambiando las columnas 2 *y* 4, *y* 3 *y* 7 *obtenemos:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Cuyas soluciones son:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - t_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - t_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - t_5 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

intercambiando los renglones 2 *y* 4 *y después los renglones* 3 *y* 7, *obtenemos las soluciones del sistema original:*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - t_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - t_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - t_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

en efecto:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2t_1-2t_2-5t_3-t_4+t_5 \\ t_1 \\ t_4 \\ 2-2t_2-3t_3+2t_5 \\ t_2 \\ t_3 \\ 3-3t_5 \\ t_5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4.4. Espacios duales

Definición 66 *Se define el espacio dual de* $_FV$ *como* $V^* = Hom_F(V, F)$.

Observación 45 *Si la dimensión de* V *es finita, entonces*

$$\dim(V^*) = \dim(V).$$

Demostración. Supongamos que $\beta = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ es una base para $_FV$, definimos la base dual de β, $\beta^* = \{f_1, ..., f_n\}$ por medio de

$$f_i(\vec{x}_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

esto suele expresarse también así:

$$f_i(\vec{x}_j) = \delta_{i,j},$$

[4] donde δ denota la delta de Kronecker.

$\beta^* = \{f_1, ..., f_n\}$ es *l. i.*

Supongamos que $c_1f_1, ..., c_nf_n = \vec{0} : V \to F$, evaluando en $\vec{x}_j$ obtenemos

$$c_j = (c_1f_1, ..., c_nf_n)(\vec{x}_j) = \hat{0}(\vec{x}_j) = 0.$$

[4] $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

Como esto sucede para cada j, tenemos que β^* es $l.\ i.$

$\beta^* = \{f_1, ..., f_n\}$ genera V^* :

Si $h : V \to F$ es lineal, entonces h está determinada por sus valores en β, así es natural que

$$h = h(\vec{x}_1) \cdot f_1 + ... + h(\vec{x}_n) \cdot f_n,$$

en efecto, si evalúamos en $\vec{x}_j$ obtenemos

$$h(\vec{x}_1) \cdot f_1(\vec{x}_j) + ... + h(\vec{x}_n) \cdot f_n(\vec{x}_j) = h(\vec{x}_j).$$

Como h y $h(\vec{x}_1) \cdot f_1 + ... + h(\vec{x}_n) \cdot f_n$ coinciden en la base β, entonces

$$h = h(\vec{x}_1) \cdot f_1 + ... + h(\vec{x}_n) \cdot f_n.$$

Así, $\beta^* = \{f_1, ..., f_n\}$ genera V^*. ■

4.4.1. Cálculo de la base dual para un espacio de dimensión finita

Supongamos que $\gamma = \{\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n\}$ es una base para F^n, y denotemos $\beta = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ la base canónica.

Denotemos $\gamma^* = \{f_1, ..., f_n\}$ la base dual de γ. Entonces

$$\begin{array}{c} F^n \xrightarrow{f_i} F \\ \vec{x}_j \longmapsto \delta_{i,j} \end{array}.$$

Ahora,

$$\begin{tikzcd} F^n \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\Phi_\beta"'] & F \arrow[d, "Id"] \\ F^n \arrow[r, "{[f_i]_\beta^{can}\cdot\_}"] & F \end{tikzcd}$$

$$\vec{x}_j \qquad \longmapsto \qquad [f_i]_\beta^{can} \cdot [\vec{x}_j]_\beta = \delta_{i,j}$$

muestra que la matriz cuyo renglón $i-$ésimo es $[f_i]_\beta^{can}$ es la inversa de la matriz cuyas columnas son $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n$. Pues se tiene que

$$\left(\begin{array}{c} [f_1]_\beta^{can} \\ \hline \vdots \\ \hline [f_i]_\beta^{can} \\ \hline \vdots \\ \hline [f_n]_\beta^{can} \end{array}\right) (\vec{x}_1 \mid ... \mid \vec{x}_j \mid ... \mid \vec{x}_n) = (\delta_{i,j}) = I_n.$$

De lo anterior, es claro que para calcular la base dual de γ, basta encontrar la matriz inversa de la matriz cuyas columnas son los elementos de γ. Si $[f_i]_\beta^{can} = (c_1, ..., c_n)$, entonces $f_i(\vec{e}_j) = c_j$. Esto querría decir que $f_i(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1 x_1 + ... + c_n x_n$.

Podemos resumir la discusión anterior en el siguiente Teorema.

Teorema 60 *Si $\gamma = \{\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n\}$ es una base para F^n, y*

$$Q = (\vec{x}_1 \mid ... \mid \vec{x}_j \mid ... \mid \vec{x}_n),$$

entonces el elemento $i-$ésimo de la base dual, f_i se calcula de la siguiente manera:

$$f_i(x_1, x_2, ..., x_n) = Q_{i,1}^{-1} x_1 + ... + Q_{i,n}^{-1} x_n.$$

Ejemplo 73 *Encontrar la base dual de $\gamma = \{(1,2,3), (1,1,1), (0,1,0)\}$ en $\mathbb{R}^3$.*

Tomemos $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, su inversa es: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Así que la base dual $\{f_1, f_2, f_3\}$ satisface:

$$\begin{array}{l} f_1(x,y,z) = -(1/2)x + (1/2)z, \\ f_2(x,y,z) = (3/2)x - (1/2)z, \\ f_3(x,y,z) = (1/2)x + y - (1/2)z, \end{array}.$$

Una vez que sabemos encontrar la base dual γ^* para una base de F^n, podemos también encontrar la base dual de un espacio de dimensión finita:

Observación 46 *En el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \gamma \arrow[r, hook, "base"'] & V \arrow[d, "\Phi_\beta"'] & & F \arrow[d, "Id_F"] \\ \Phi_\beta(\gamma) \arrow[r, hook, "base"'] & F^n \arrow[rr, "f_i"] & & F \end{tikzcd}$$

si $\{f_1, ..., f_n\}$ *es la base dual de* $\Phi_\beta(\gamma)$, *entonces* $f_i \circ \Phi_\beta$ *es la base dual de* γ.

Demostración. Sea $\vec{y}_j$, el $j-$ésimo elemento de γ, entonces $\delta_{i,j} = f_i(\Phi_\beta(\vec{y}_j)) = (f_i \circ \Phi_\beta)(\vec{y}_j)$ ■

Ejemplo 74 *Encontrar la base dual de* $\{1 + x^2, 1 - 2x, 1 + x\}$ *en* $P_2(\mathbb{R})$. *Usando el diagrama anterior, esto equivale a encontrar la base dual de*

$$\Phi_\beta \left\{1 + x^2, 1 - 2x, 1 + x\right\},$$

en $\mathbb{R}^3$, *donde* $\beta = \{1, x, x^2\}$.

Como $\Phi_\beta \{1 + x^2, 1 - 2x, 1 + x\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, *formando la matriz con estas columnas obtenemos:* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *cuya inversa es* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Entonces la base dual de $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ *es* $\{f_1, f_2, f_3\}$, *con*

$$\begin{aligned} f_1(a, b, c) &= c, \\ f_2(a, b, c) &= \left(\frac{1}{3}\right) a - \left(\frac{1}{3}\right) b - \left(\frac{1}{3}\right) c, \\ f_3(a, b, c) &= \left(\frac{2}{3}\right) a + \left(\frac{1}{3}\right) b - \left(\frac{2}{3}\right) c. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la base dual de $\{1 + x^2, 1 - 2x, 1 + x\}$ *es*

$$f_1 \circ \Phi_\beta, f_1 \circ \Phi_\beta, f_1 \circ \Phi_\beta.$$

Es decir que

$$
\begin{aligned}
(f_1 \circ \Phi_\beta)\left(a+bx+cx^2\right) &= c, \\
(f_2 \circ \Phi_\beta)\left(a+bx+cx^2\right) &= \left(\frac{1}{3}\right)a - \left(\frac{1}{3}\right)b - \left(\frac{1}{3}\right)c, \\
(f_3 \circ \Phi_\beta)\left(a+bx+cx^2\right) &= \left(\frac{2}{3}\right)a + \left(\frac{1}{3}\right)b - \left(\frac{2}{3}\right)c.
\end{aligned}
$$

Por ejemplo, notemos que

$$
\begin{aligned}
(f_2 \circ \Phi_\beta)\left(1+x^2\right) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0, \\
(f_2 \circ \Phi_\beta)(1-2x) &= \left(\frac{1}{3}\right) + 2 \cdot \frac{1}{3} = 1, \\
(f_2 \circ \Phi_\beta)(1+x) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0.
\end{aligned}
$$

4.4.2. La dimensión del espacio dual

Observación 47 *Si ${}_FV$ es de dimensión infinita entonces*

$$\dim(V^*) = \dim(Hom(V,F)) = \left|F^\beta\right|,$$

donde β es una base de V (para afirmar esto nos apoyamos en la propiedad universal de las bases).

Ejemplo 75 $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$ *es un espacio vectorial de dimensión $|\mathbb{N}|$ sobre $\mathbb{Q}$. Ahora,* $\left|\left(\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}\right)^*\right| = \left|\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}\right| > \left|2^{\mathbb{N}}\right| = |\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.
$\left(\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}\right)^*$ *es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, por lo tanto $\left(\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}\right)^*$ es isomorfo a $\mathbb{Q}^{(\gamma)}$, para algún conjunto γ cuya cardinalidad es la dimensión de $\left(\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}\right)^*$. Si $|\gamma| = |\mathbb{N}|$, entonces*

$$|\mathbb{N}| < \left|\left(\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}\right)^*\right| = \left|\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}\right| = |\mathbb{N}| \underset{\circ}{\nabla}.$$

Por lo tanto, $\dim\left(\left(\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}\right)^*\right) = |\gamma| > |\mathbb{N}| = \dim\left(\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}\right)$ ■

Ejercicio 116 *Demuestre que* $\left|\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}\right| = |\mathbb{N}|$*: Sugerencia:*

1. $\left|\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}\right| = \left|\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}\right|$.
2. $\left|\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}\right| = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{A} \text{ es finito}\}$.

3. $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{A} \text{ es finito}\} = \cup \{F_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $F_k = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |\mathbb{A}| = \daleth\}$. Por ejemplo $F_0 = \{\emptyset\}$.

4. $|F_k| = |\mathbb{N}|$ si $k > 0$.

5. Como $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{A} \text{ es finito}\}$ es una unión numerable de numerables (más un elemento) entonces $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{A} \text{ es finito}\}$ es numerable.

Ejercicio 117 *Demuestre las afirmaciones de la proposición siguiente:*
Si X es un conjunto infinito, entonces

$$\left|\left(F^{(X)}\right)^*\right| = \left|F^X\right| \geqq \left|2^X\right| > |X| = \dim\left(F^{(X)}\right).$$

Recordemos que si X es un conjunto infinito, entonces $|X \times X| = |X|$, de aquí se sigue que si $|X| \leqslant |Y|$, entonces $|X \times Y| = |Y|$.

Ejercicio 118 *Demuestre que son equivalentes para conjuntos infinitos X y Y :*

1. $|X \times X| = |X|$.

2. $|X \times Y| = \text{máx}\{|X|, |Y|\}$.

1. De $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$, deduzca que una unión numerable de conjuntos ajenos numerables es numerable.

2. Deduzca que una unión numerable de conjuntos infinitos todos de cardinalidad $|X|$ es $|X|$.

Lema 5 *Si X es un conjunto infinito y F es una campo infinito, entonces* $\left|F^{(X)}\right| = \text{máx}\{|F|, |X|\}$.

Demostración. $\geq$) $F^{(X)}$ tiene una base de cardinalidad $|X|$, por lo que $\left|F^{(X)}\right| \geq |X|$. Por otra parte, es claro que si f es un elemento distinto de $\hat{0}$ en $F^{(X)}$, entonces Ff es un subconjunto de $F^{(X)}$ de cardinalidad $|F|$. Entonces $\left|F^{(X)}\right| \geq |F|$. Así que $\left|F^{(X)}\right| \geq \text{máx}\{|F|, |X|\}$.

$\leqslant$)

$$\left|F^{(X)}\right| = \left|\bigcup_{\substack{G\subseteq X \\ G \text{ finito}}} \{f \mid \text{sop}(f) = G\}\right|. \tag{4.4}$$

Ahora, $|\{f \mid \operatorname{sop}(f) = G\}| = \left|(F\backslash\{0\})^G\right| = |(F\backslash\{0\})|$ pues G es finito. Además como F es infinito, entonces $|(F\backslash\{0\})| = |(F)|$.

Supongamos que Z es un conjunto infinito. Denotemos por $\wp_{fin}(Z)$ el conjunto de los subconjuntos finitos de Z, y denotemos $\wp_k(Z)$ el conjunto de los subconjuntos de X de cardinalidad k. Es claro que

$$\wp_{fin}(Z) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{\wp_k(Z)\}.$$

$\wp_0(Z) = \{\emptyset\}$. Ahora, $\begin{matrix} \wp_1(Z) \to Z \\ \{x\} \mapsto x \end{matrix}$ es una biyección, por lo que $|\wp_1(Z)| = |Z|$.

Tenemos también, que $\begin{matrix} Z \times Z & \to & \wp_1(Z) \cup \wp_2(Z) \\ (x,y) & \mapsto & \{x\} \cup \{y\} \end{matrix}$ es una función suprayectiva, luego,

$$|Z| = |Z \times Z| \geq |\wp_1(Z) \cup \wp_2(Z)| \geq |Z|.$$

Entonces $|\wp_2(Z)| \leqslant |Z|$. Análogamente,

$$|\wp_3(Z)| \leqslant |Z|, ..., |\wp_k(Z)| \leqslant |Z|, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Entonces, un conjunto infinito Z satisface:

$$\left|\wp_{fin}(Z)\right| = |Z|.$$

Viendo ahora 4.4, notamos que $F^{(X)} = \bigcup \{f \mid \operatorname{sop}(f) = G\}_{\substack{G\subseteq X \\ G \text{ finito}}}$ es la unión de una familia de conjuntos de cardinalidad $\leqslant |F|$, con índices en un conjunto de cardinalidad $|X|$. Entonces

$$\left|F^{(X)}\right| \leqslant |F \times X| \leqslant \max\{F, X\}.$$

■

Corolario 10 *Si ${}_FV$ es un espacio vectorial de dimensión infinita sobre un campo infinito F, entonces $|{}_FV| = \max\{|F|, \dim(V)\}$.*

Ejemplo 76 *Consideremos el espacio vectorial ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$, entonces*

$$|{}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}| = \max\{|\mathbb{Q}|, \dim({}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})\} = \max\{|\mathbb{N}|, \dim({}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})\}.$$

Por lo que $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, de dimensión $|\mathbb{R}|$.

Ejercicio 119 *Si X es un conjunto infinito, use el resultado del ejercicio 117:*

$$\left|\left(F^{(X)}\right)^*\right| = \left|F^X\right| \geqq \left|2^X\right| > |X| = \dim\left(F^{(X)}\right),$$

para concluir que si $|X| \geq |F|$, F infinito, entonces

$$\dim\left(\left(F^{(X)}\right)^*\right) = \left|\left(F^{(X)}\right)^*\right| = \left|F^X\right| > \dim\left(F^{(X)}\right).$$

Ejercicio 120 *Concluya que* $\dim\left(\left(\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}\right)^*\right) > \dim\left(\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}\right).$

Ejercicio 121

1. *Muestre que* $\dim\left(\left(\mathbb{Q}^{(\mathbb{R})}\right)^*\right) > \dim\left(\mathbb{Q}^{(\mathbb{R})}\right).$
2. *Muestre que* $\dim\left(\left(\mathbb{R}^{(\mathbb{R})}\right)^*\right) > \dim\left(\mathbb{R}^{(\mathbb{R})}\right).$

Ejercicio 122 *Demuestre que para todo campo F existe un conjunto X tal que* $\dim\left(\left(F^{(X)}\right)^*\right) > \dim\left(F^{(X)}\right).$

Ejercicio 123 *Muestre que si ${}_FV$ es de dimensión infinita o si F es infinito entonces* $|{}_FV| = \max\{|F|, \dim(V)\}.$

4.5. La transpuesta de una función lineal

Teorema 61 *Si $T : V \to W$ es una función lineal, entonces*

$$\begin{array}{c} W^* \xrightarrow{\_\circ T} V^* \\ f \longmapsto f \circ T \end{array}$$

es una función lineal.

Demostración. Si $W \xrightarrow{f} F$ es una función lineal, entonces $V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{f} F$ también lo es. Por otra parte, si $f, g \in W^*, c \in F$, entonces

$$(\_ \circ T)(f + cg) = (f + cg) \circ T = f \circ T + (cg) \circ T = f \circ T + c((g) \circ T).$$

■

Observación 48 $\ker\left(W^* \xrightarrow{\_\circ T} V^*\right) =$

$$= \left\{f \in W^* \mid f \circ T = \hat{0} : V \to F\right\} = \{f \in W^* \mid T(V) \subseteq Ker(f)\}.$$

Teorema 62 *Si V, W son de dimensión finita n y m, con bases β y γ respectivamente y $T : V \to W$ es una función lineal, entonces $[\_ \circ T]_{\gamma^*}^{\beta^*} = \left([T]_\beta^\gamma\right)^t$.*

Demostración. Sean

$$\begin{aligned}\beta &= \{\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n\},\\ \gamma &= \{\vec{y}_1, ..., \vec{y}_m\},\\ \beta^* &= \{f_1, ..., f_n\},\\ \gamma^* &= \{g_1, ..., g_m\}.\end{aligned}$$

Entonces $\left([\_ \circ T]_{\gamma^*}^{\beta^*}\right)^{\underline{j}} = [(\_ \circ T)(g_j)]_{\beta^*} = [(g_j \circ T)]_{\beta^*}$.

Supongamos que

$$[(g_j \circ T)]_{\beta^*} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

esto equivale a: $g_j \circ T = c_1 f_1 + ... + c_i f_i + ... + c_n f_n$.

Aplicando esta función a $\vec{x}_i$, obtenemos

$$g_j(T(\vec{x}_i)) = (g_j \circ T)(\vec{x}_i) = c_i.$$

Por otra parte, dada la definición de $[T]_\beta^\gamma$, tenemos que (denotando los coeficientes de $[T]_\beta^\gamma$, con aes, $[T]_\beta^\gamma = (a_{k,l})$):

$T(\vec{x}_i) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{k,i}\vec{y}_k$, así que aplicando g_j, obtenemos

$$c_i = g_j(T(\vec{x}_i)) = g_j\left(\sum_{k=1}^{m} a_{k,i}\vec{y}_k\right) = a_{j,i}.$$

Si recordamos que c_i está en el renglón $i-$ésimo de la columna $j-$ésima de $[\_ \circ T]_{\gamma^*}^{\beta^*}$, tenemos que

$$\left([\_ \circ T]_{\gamma^*}^{\beta^*}\right)_{i,j} = c_i = a_{j,i} = \left([T]_\beta^\gamma\right)_{j,i}.$$

Es decir que $\left([\_ \circ T]_{\gamma^*}^{\beta^*}\right) = \left([T]_\beta^\gamma\right)^t$. ■

Como $\left([\_ \circ T]_{\gamma^*}^{\beta^*}\right) = \left([T]_\beta^\gamma\right)^t$, $\_ \circ T$ también se denota T^t.

Teorema 63 *La función* $\begin{array}{l} V \overset{ev_{()}}{\rightarrow} V^{**} \\ \vec{v} \mapsto ev_{(\vec{v})},\ \textit{tal que}\ \left(ev_{(\vec{v})}\right)(f) = f(\vec{v}) \end{array}$ *es una función lineal inyectiva.*

Demostración. 1. $ev_{(\vec{v})}$ es efectivamente un elemento de V^{**} :
Supongamos que $f, g \in V^*$ y que $c \in F$, entonces

$$\begin{gathered} ev_{(\vec{v})}(f+cg) = (f+cg)(\vec{v}) = \\ = f(\vec{v}) + (cg)(\vec{v}) = f(\vec{v}) + c(g(\vec{v})) = \\ = ev_{(\vec{v})}(f) + c\left(ev_{(\vec{v})}(g)\right). \end{gathered}$$

2. $ev_{()}$ es lineal:, queremos ver que

$$ev_{()}(\vec{v}+c\vec{w}) = ev_{(\vec{v}+c\vec{w})} = ev_{(\vec{v})} + c \cdot ev_{(\vec{w})}.$$

En efecto: si $f \in V^*$, entonces

$$\begin{gathered} ev_{(\vec{v}+c\vec{w})}(f) = f(\vec{v}+c\vec{w}) = \\ = f(\vec{v}) + f(c\vec{w}) = f(\vec{v}) + cf(\vec{w}) = \\ = ev_{(\vec{v})}(f) + \left(c \cdot ev_{(\vec{w})}\right)(f) = \\ \left(ev_{(\vec{v})} + \left(c \cdot ev_{(\vec{w})}\right)\right)(f). \end{gathered}$$

3. Si $\vec{v} \in \operatorname{Ker}\left(ev_{()}\right)$, entonces $ev_{(\vec{v})} = \hat{0} : V^* \to F$, es decir que $ev_{(\vec{v})}(f) = 0, \forall f \in V^*$. Por lo tanto $\vec{v} \in \operatorname{Ker}(f), \forall f \in V^*$. Demostraremos que esto sólo es posible si $\vec{v} = \vec{0}$.

Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, *y* $\vec{v} \in \bigcap_{f \in V^*} \{\operatorname{Ker}(f)\}$, entonces $\{\vec{v}\}$ es *l. i.*, por lo tanto $\{\vec{v}\}$ es parte de una base β de V. Tomemos la función constante $\hat{1} : \beta \to F$, por la propiedad universal de las bases, existe una función lineal $H : V \to F$, que extiende a h. Entonces $H(\vec{v}) = 1 \neq 0$. Así que $\vec{v} \notin \operatorname{Ker}(H)$, pero $H \in V^*$, $\underset{\circ}{\nabla}$. Esta contradicción muestra que $\operatorname{Ker}\left(ev_{()}\right) = \left\{\vec{0}\right\}$, por lo que la función lineal $ev_{()}$ es inyectiva. ■

Ejercicio 124 *Dé un ejemplo de un espacio vectorial* ${}_FV$ *tal que* $ev_{()} : V \to V^{**}$, *no sea un isomorfismo.*

Teorema 64 *Si* $T : V \to W$ *es una función lineal, entonces el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "ev_{(\ )}"] \arrow[d, "T"'] \arrow[dr, phantom, "="] & V^{**} \arrow[d, "T^{tt}"] \\ W \arrow[r, "ev_{(\ )}"] & W^{**} \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $\vec{v} \in V$, entonces

$$\left(T^{tt} \circ ev_{()}\right)(\vec{v}) = T^{tt}\left(ev_{(\vec{v})}\right) = \left(\_ \circ T^t\right)\left(ev_{(\vec{v})}\right) = ev_{(\vec{v})} \circ T^t.$$

Apliquémosla a una función $f \in W^*$:

$$\left(ev_{(\vec{v})} \circ T^t\right)(f) = \left(ev_{(\vec{v})}\right)\left(T^t(f)\right) = \left(ev_{(\vec{v})}\right)(f \circ T) = (f \circ T)(\vec{v}).$$

Por otra parte, $\left(ev_{()} \circ T\right)(\vec{v}) = ev_{()}(T(\vec{v})) = ev_{(T(\vec{v}))}$, aplicándola en f, obtenemos $ev_{(T(\vec{v}))}(f) = f(T(\vec{v}))$.

Por lo tanto,

$$\forall f \in W^* : \left(ev_{(\vec{v})} \circ T^t\right)(f) = ev_{(T(\vec{v}))}(f),$$

así que $ev_{(\vec{v})} \circ T^t = ev_{(T(\vec{v}))}$. ■

Corolario 11 *Si $_FV$ es de dimensión finita, entonces $V \overset{ev_{()}}{\to} V^{**}$ es un isomorfismo.*

Demostración. Basta observar que en este caso, $\dim(V) = \dim(V^*) = \dim(V^{**})$. ■

Corolario 12 *Si $_FV$ es de dimensión finita, y γ es una base de V^*, entonces γ es la base dual de una base β de $_FV$.*

Demostración. Digamos que

$$\gamma = \{f_1, ..., f_n\}.$$

Tomemos

$$\gamma^* = \{\theta_1, ..., \theta_n\}$$

la base dual de γ. Como $V \xrightarrow{ev_{(\ )}} V^{**}$ es un isomorfismo, entonces $\theta_i = ev_{(\vec{v}_i)}$ para alguna $\vec{v}_i$, para cada i. Entonces $\delta_{i,j} = \theta_i(f_j) = ev_{(\vec{v}_i)}(f_j) = f_j(\vec{v}_i)$. De donde tenemos que $\gamma = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}^*$. ■

Ejemplo 77 *Consideremos el diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
P_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{T=\begin{pmatrix} ev_{(1)} \\ ev_{(2)} \\ \vdots \\ ev_{(n)} \end{pmatrix}} & \mathbb{R}^n \\
\uparrow & & \| \\
\mathfrak{L}(\{x, x^2, ..., x^n\}) & \xrightarrow{T_{|\mathcal{S}(\{x,x^2,...,x^n\})}} & \mathbb{R}^n,
\end{array}$$

entonces $T_{|\mathfrak{L}(\{x,x^2,\ldots,x^n\})}$ *es una función suprayectiva, pues para cada sucesión*

$$c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R},$$

existe un polinomio de grado $\leqslant n$ *tal que (ver el ejemplo 29)*

$$f(0) = 0, f(1) = c_1, \ldots, f(n) = c_n.$$

Un polinomio f *con esta propiedad es un múltiplo de* x *y por la tanto pertenece al subespacio* $\mathfrak{L}(\{x, x^2, \ldots, x^n\})$ *.*

Entonces la función lineal $\mathfrak{L}(\{x, x^2, \ldots, x^n\}) \xrightarrow{T_{|\mathfrak{L}(\{x,x^2,\ldots,x^n\})}} \mathbb{R}^n$ *es suprayectiva, y como el dominio y codominio son ambas de dimensión* n*, entonces* $T_{|\mathfrak{L}(\{x,x^2,\ldots,x^n\})}$ *es un isomorfismo. Por lo tanto la matriz de* $T_{|\mathfrak{L}(\{x,x^2,\ldots,x^n\})}$ *respecto a las bases* $\{x, x^2, \ldots, x^n\}$ *y canónica es invertible, esta matriz es la siguiente:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1^2 & \cdots & 1^n \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{pmatrix}.$$

Ejemplos 78 *1.* $\begin{pmatrix} 1 & 1^2 \\ 2 & 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$*, cuya inversa es:* $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1^2 & 1^3 \\ 2 & 2^2 & 2^3 \\ 3 & 3^2 & 3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$*, cuya inversa es :*

$$\begin{pmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 79 *1.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1^2 & 1^3 & 1^4 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 \\ 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 4 & 16 & 64 & 256 \end{pmatrix},$$

y su inversa es: $\begin{pmatrix} 4 & -3 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{13}{3} & \frac{19}{4} & -\frac{7}{3} & \frac{11}{24} \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{7}{6} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}$.

Ejemplo 80 $(P_n(F))^*$ *tiene dimensión* $n+1$.

$$\left\{\int_o^1, \int_o^2, ..., \int_o^n, \int_o^{n+1}\right\} \subseteq (P_n(F))^*.$$

Además $\left\{\int_o^1, \int_o^2, ..., \int_o^n, \int_o^{n+1}, ...\right\}$ *es l. i. en* $(\mathbb{R}(x))^*$

Demostración. Supongamos que

$$a_1\int_o^1 + a_2\int_o^2 + ... + a_n\int_o^n + a_{n+1}\int_o^{n+1} = \hat{0}.$$

Por inducción sobre n.

Base: si $n=1$, entonces

$$a_1\int_o^1 = \hat{0} \Rightarrow \left(a_1 = a_1\int_o^1 1 = \hat{0}(1) = 0\right).$$

Por lo tanto $\left\{\int_o^1\right\}$ es linealmente independiente.

Paso inductivo: Supongamos que

$$a_1\int_o^1 + a_2\int_o^2 + ... + a_n\int_o^n + a_{n+1}\int_o^{n+1} = \hat{0}.$$

Basta demostrar que existe un polinomio $f \in P_n(F)$ tal que

$$\int_o^1 f = ... = \int_o^n f = 0, \text{ pero con } \int_o^{n+1} f \neq 0.$$

Consideremos la función

$$\begin{array}{l} P_n(F) \xrightarrow{\Gamma} F^{n+1} \\ g \mapsto \left(\int_o^1 g, \int_o^2 g, ..., \int_o^n g, \int_o^{n+1} g\right) \end{array}$$

. Entonces

$$1 \longmapsto (1, 2, 3, ..., n, n+1)$$

$$2x \longmapsto \left(1^2, 2^2, 3^2, ..., n^2, (n+1)^2\right)$$

$$3x^2 \longmapsto \left(1^3, 2^3, 3^3, ..., n^3, (n+1)^3\right)$$

$$\vdots$$
$$(n+1)\,x^n \longmapsto \left(1^{n+1}, 2^{n+1}, 3^{n+1}, ..., n^{n+1}, (n+1)^{n+1}\right).$$

Ahora, el conjunto

$$\left\{ \begin{array}{c} (1,2,3,...,n,n+1)\,, \left(1^2,2^2,3^2,...,n^2,(n+1)^2\right),..., \\ ,\left(1^{n+1},2^{n+1},3^{n+1},...,n^{n+1},(n+1)^{n+1}\right) \end{array} \right\}$$

es linealmente independiente, por el ejemplo 77.

Como la función lineal Γ manda una base de $P_n(F)$ en una base de F^{n+1} y como ambos espacios tienen la misma dimensión, tenemos que Γ es un isomorfismo. ■

Entonces $\Gamma^{-1}((0,0,...,0,1)) =: f$ es un polinomio tal que

$$\int_o^1 f = ... = \int_o^n f = 0$$

pero $\int_o^{n+1} f \neq 0$.

Ejercicio 125 *En vista del ejemplo 80,* $\left\{\int_o^1, \int_o^2, ..., \int_o^n, \int_o^{n+1}\right\}$ *es una base de* $(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}))^*$*. Así que debe ser la base dual de una base de* $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$*, encontrar esta base para* $n \in \{1,2,3,4\}$.

Capítulo 5

Espacios con producto interior I

5.1. Productos interiores

En lo que sigue, $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definición 67 *Sea $_FV$ un espacio vectorial, un producto interior (definido positivamente)*

$$\langle , \rangle : V \times V \to F$$

es una función tal que

1. $\forall \vec{w} \in V$, $\langle \_, \vec{w} \rangle : V \to F$ *es una función lineal.*
2. $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \overline{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}$, *donde la barra denota conjugación compleja.*
3. $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \in \mathbb{R}^{+} \cup \left\{ \vec{0} \right\}$.
4. $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$.

Definición 68 *El producto interior usual en $\mathbb{R}^n$ está dado por*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{v}^t \cdot \vec{u} = (v_1, v_2, ..., v_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n.$$

Observación 49 *El producto anterior efectivamente es un producto interior:*

Demostración.

1. Notemos que $\langle\ ,\vec{v}\rangle = \vec{v}^t \cdot (\ ) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función lineal (es un caso particular de que $F^n \xrightarrow{A\cdot\_} F^m$ es una función lineal, para una matriz $A \in M_{m\times n}(F)$).

2. $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = \langle\vec{v},\vec{u}\rangle = \overline{\langle\vec{v},\vec{u}\rangle}$. Pues aquí, conjugar equivale a no hacer nada).

3. $\langle\vec{v},\vec{v}\rangle = v_1v_1 + v_2v_2 + ... + v_nv_n \geq 0$.

4.
$$(\langle\vec{v},\vec{v}\rangle = v_1v_1 + v_2v_2 + ... + v_nv_n = 0) \iff$$
$$\iff (v_i = 0, \forall i \in \{1,...,n\}) \iff \left(\vec{v} = \vec{0}\right). \blacksquare$$

Definición 69 *Sea $A \in M_{n\times m}(F)$, definimos la matriz conjugada de A por: $\left(\overline{A}\right)_{i,j} = \overline{A_{i,j}}$. Es decir que los coeficientes de $\overline{A}$, se obtienen conjugando cada uno de los coeficientes de A.*

Ejemplo 81 $\overline{\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1-2i \\ 7 & -5-10i & 1+i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 1+2i \\ 7 & -5+10i & 1-i \end{pmatrix}$.

Definición 70 *El producto interior usual en $\mathbb{C}^n$ está dado por $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = \overline{(\vec{v}^t)} \cdot \vec{u} =$*
$$(\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = u_1\overline{v}_1 + u_2\overline{v}_2 + ... + u_n\overline{v}_n.$$

Observación 50 *El producto anterior es en efecto un producto interior:*

Demostración.

1. $\langle\ ,\vec{v}\rangle = \overline{(\vec{v}^t)} \cdot \_$ es lineal, y el argumento es el mismo que en la Observación 49.

2. $\langle\vec{w},\vec{v}\rangle = \overline{(\vec{v}^t)}\vec{w} = \left(\overline{(\vec{v}^t)}\vec{w}\right)^t$ (pues esto es un escalar). Ahora,
$$\begin{aligned} \langle\vec{w},\vec{v}\rangle &= \left(\overline{(\vec{v}^t)}\vec{w}\right)^t = \vec{w}^t\left(\overline{(\vec{v}^t)}\right)^t = \\ &= \vec{w}^t\left(\overline{(\vec{v})}\right)^{tt} = \overline{\overline{\vec{w}^t\left(\overline{(\vec{v})}\right)^{tt}}} = \overline{\overline{\vec{w}^t}\,(\vec{v})} = \overline{\langle\vec{v},\vec{w}\rangle}.. \end{aligned}$$

3.
$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \overline{(\vec{v}^t)} \cdot \vec{v} = (\bar{v}_1, ..., \bar{v}_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i v_i = \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} .$$

4. Por último, si $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$, entonces $\sum\limits_{i=1}^{n} |v_i|^2 = 0$. Por lo anterior, $|v_i| = 0 \ \forall i$, así que $v_i = 0, \forall i$. Por lo tanto $\vec{v} = \vec{0}$. ■

Observación 51 $\langle \vec{v}, \_ \rangle : {}_{\mathbb{C}}V \to \mathbb{C}$, *puede no ser lineal:*

$$\langle \vec{v}, \_ \rangle (c\vec{w}) = \langle \vec{v}, c\vec{w} \rangle = \overline{\langle c\vec{w}, \vec{v} \rangle} = \overline{c \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle} =$$
$$= \overline{c} \overline{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle} = \overline{c} \overline{\overline{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}} = \overline{c} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = (\overline{c} \langle \vec{v}, \_ \rangle) (\vec{w}) .$$

En particular,
$$\langle \vec{v}, \_ \rangle (i\vec{w}) = (-i \langle \vec{v}, \_ \rangle) (\vec{w}) \neq (i \langle \vec{v}, \_ \rangle) (\vec{w}) ,$$
si $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \neq 0$.

Por ejemplo, con el producto usual en $\mathbb{C}^2$ tenemos que
$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -i.$$

Por otra parte, $\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, pero
$$-i = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \neq i \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle =$$
$$= i \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = i. \ ■$$

Ejercicio 126 *Demuestre que si* $\langle \ , \ \rangle$ *es un producto interior en* ${}_F V$ *y* $c \in \mathbb{R}^+$, *entonces* $c \langle \ , \ \rangle : V \times V \to F$ *es un producto interior definido positivamente. Sugerencia: note que* $c \langle \ , \ \rangle = (c\_) \circ \langle \ , \ \rangle$, *y que* $(c\_) : F \to F$ *es una función lineal.*

5.2. La norma inducida por un producto interior

Definición 71 *Si ${}_FV$ es un espacio con producto interior (definido positivamente), definimos*

$$\begin{array}{rccc} \|\ \|: & V & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ & \vec{v} & \longmapsto & \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \end{array}.$$

Esta función se llama la norma de V respecto a $\langle\ ,\ \rangle$.

Una notación más adecuada sería $\|\ \|_{\langle\ ,\ \rangle}$, pero esto haría más pesada la notación.

Observación 52 $\|\ \|: \ V \ \to \ \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *tiene las siguientes propiedades:*

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$, *y* $\left(\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}\right)$.
2. $\|\vec{v}\|^2 = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$.
3. $\|c\vec{v}\| = \sqrt{\langle c\vec{v}, c\vec{v} \rangle} = \sqrt{c\bar{c}\,\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{|c|^2\,\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = |c|\,\sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = |c|\,\|\vec{v}\|$. *Aquí* $|c| = \sqrt{c\bar{c}}$ *es el módulo del número complejo c.*

5.2.1. El Teorema de Cauchy-Schwarz

Teorema 65 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *En un espacio vectorial ${}_FV$ con $\langle\ ,\ \rangle$*[1] *entonces*

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leqslant \|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|.$$

Demostración.
Consideremos el producto interior de $\vec{v} - \lambda\vec{w}$ consigo mismo:
$\langle \vec{v} - \lambda\vec{w}, \vec{v} - \lambda\vec{w} \rangle$ esto es un número real mayor o igual que 0. Podemos escribir:

$$0 \leqslant \langle \vec{v} - \lambda\vec{w}, \vec{v} - \lambda\vec{w} \rangle = \langle\ \vec{v}, \vec{v} - \lambda\vec{w}\ \rangle + \langle\ -\lambda\vec{w}, \vec{v} - \lambda\vec{w}\ \rangle =$$

$$= \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, -\lambda\vec{w} \rangle + \langle -\lambda\vec{w}, \vec{v} \rangle + \langle -\lambda\vec{w}, -\lambda\vec{w} \rangle =$$
$$= \|\vec{v}\|^2 + \langle \vec{v}, -\lambda\vec{w} \rangle + \langle -\lambda\vec{w}, \vec{v} \rangle + \lambda\overline{\lambda}\,\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle =$$
$$= \|\vec{v}\|^2 + -\overline{\lambda}\,\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle - \lambda\,\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle + \lambda\overline{\lambda}\,\|\vec{w}\|^2 =$$

[1] En esta sección consideramos sólo productos interiores definidos positivamente, así que ya no haremos esta aclaración.

$$= \|\vec{v}\|^2 + -\overline{\lambda}\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle - \lambda\overline{\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle} + \lambda\overline{\lambda}\|\vec{w}\|^2 .$$

Escojamos ahora $\lambda = \frac{\langle \vec{v},\vec{w}\rangle}{\langle \vec{w},\vec{w}\rangle} = \frac{\langle \vec{v},\vec{w}\rangle}{\|\vec{w}\|^2}$[2], y sustituyámosla en

$$0 \leqslant \|\vec{v}\|^2 + -\overline{\lambda}\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle - \lambda\overline{\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle} + \lambda\overline{\lambda}\|\vec{w}\|^2 :$$

obtenemos

$$0 \leqslant \|\vec{v}\|^2 + -\frac{\overline{\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle}}{\|\vec{w}\|^2}\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle - \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle}{\|\vec{w}\|^2}\overline{\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle} + \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle}{\|\vec{w}\|^2}\frac{\overline{\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle}}{\|\vec{w}\|^2}\|\vec{w}\|^2 :$$

Multiplicando ahora por $\|\vec{w}\|^2$obtenemos

$$0 \leqslant \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 + -\overline{\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle}\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle - \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle\overline{\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle} + \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle\overline{\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle},$$

por lo tanto

$$0 \leqslant \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 + -\overline{\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle}\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle ,$$

es decir que

$$|\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle|^2 = \overline{\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle}\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle \leqslant \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 ,$$

así que

$$|\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle|^2 \leqslant \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 ,$$

por lo que

$$|\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle| \leqslant \|\vec{v}\|\|\vec{w}\| . \blacksquare$$

Ejemplo 82

$$\begin{array}{rccc} \langle\ ,\ \rangle : & \mathcal{C}[0,1]\times\mathcal{C}[0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \mapsto & \int_0^1 fg \end{array}$$

es un producto interior en el espacio de las funciones reales continuas definidas en el intervalo $[0,1]$ *. La desigualdad de Cauchy-Schwarz afirma en este caso que*

$$\left|\int_0^1 fg\right| \leqslant \sqrt{\left|\int_0^1 ff\right|\left|\int_0^1 gg\right|}.$$

Por ejemplo,

$$\left|\int_0^1 sen(x)\cos(x)\right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2(1) = ,35404... \leqslant$$

[2]Esta elección de λ resulta de considerar la componente de $\vec{v}$ a lo largo de $\vec{w}$, cuya definición se dá en la sección de ortogonalidad.

$$\leqslant \sqrt{\int_0^1 (sen\,(x))^2 \int_0^1 (\cos x)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(-\cos^2 1 + \cos^4 1 + 1)} = ,44534...$$

Otro ejemplo:
$\int_0^1 x\,(x^2+5) = \frac{11}{4} = 2{,}75$
$\sqrt{\int_0^1 (x)^2 \int_0^1 (x^2+5)^2} = \frac{2}{15}\sqrt{535} = 3{,}084....$

Ejercicio 127 *Compruebe que en efecto*

$$\begin{array}{rccc} \langle\ ,\ \rangle : & \mathcal{C}\,[0,1] \times \mathcal{C}\,[0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \mapsto & \int_0^1 fg \end{array}$$

es un producto interior en el espacio de las funciones reales continuas definidas en el intervalo $[0,1]$.

Teorema 66 (Desigualdad del triángulo) *En un espacio vectorial* ${}_FV$ *con* $\langle\ ,\ \rangle$, *se tiene que*

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

Demostración.

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}\rangle = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \langle \vec{u},\vec{v}\rangle + \langle \vec{v},\vec{u}\rangle.$$

Como $\langle \vec{u},\vec{v}\rangle + \langle \vec{v},\vec{u}\rangle = \langle \vec{u},\vec{v}\rangle + \overline{\langle \vec{u},\vec{v}\rangle} = 2\,\mathrm{Re}\,(\langle \vec{u},\vec{v}\rangle)$, es claro que basta demostrar que $2\,\mathrm{Re}\,(\langle \vec{u},\vec{v}\rangle) \leqslant 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$. A la vista del Teorema de Cauchy-Schwarz, basta demostrar que $|\mathrm{Re}\,(\langle \vec{u},\vec{v}\rangle)| \leqslant |\langle \vec{u},\vec{v}\rangle|$. Pero esto es algo que se cumple para todo número complejo $z = a + bi$:

$$|z|^2 = z\bar{z} = a^2 + b^2 \geq a^2.$$

$$\therefore |z| \geq |a| = |\mathrm{Re}\,(z)|$$

■

5.3. La traza y la adjunta de una matriz

Teorema 67 *1.*

$$\begin{array}{rccc} tr: & M_{n\times n}(F) & \to & F \\ & A & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} A_{i,i} \end{array}$$

es una función lineal.

2. *Si* $A \in M_{n\times m}(F), B \in M_{m\times n}(F)$, *entonces* $tr(AB) = tr(BA)$.

3. *Si* $A \in M_{n\times n}(F)$, *entonces* $tr(A) = tr(A^t)$.

4. *Si* $A \in M_{n\times n}(F)$, *entonces* $tr\left(\overline{A}\right) = \overline{tr(A)}$.

Demostración. 1. Esto se sigue del hecho de que $\begin{array}{cccc} p_i : & M_{n\times n}(F) & \to & F \\ & A & \mapsto & A_{i,i} \end{array}$ es una función lineal, y del hecho de que $Hom_F(M_{n\times n}(F), F) = (M_{n\times n}(F))^*$ es un espacio vectorial.

2. $tr(AB) = \sum\limits_i \left(\sum\limits_k A_{i,k}B_{k,i}\right) = \sum\limits_{i,k} A_{i,k}B_{k,i} = tr(BA)$.

3. Basta observar que una matriz cuadrada tiene la misma diagonal principal que su transpuesta, y que la traza es la suma de los elementos de la diagonal.

4. $tr\left(\overline{A}\right) = \sum \overline{A}_{i,i} = \overline{\sum A_{i,i}} = \overline{tr(A)}$. ■

Observación 53 *Las operaciones de transponer y conjugar matrices conmutan. Es decir que si* $A \in M_{n\times m}(F)$, *entonces* $\overline{A^t} = \overline{A}^t$.

Demostración. $\left(\overline{A^t}\right)_{i.j} = \overline{(A^t)_{i.j}} = \overline{(A)_{j,i}}$. Por otro lado, $\left(\overline{A}^t\right)_{i,j} = \left(\overline{A}\right)_{j,i} = \overline{(A)_{j,i}}$. ■

Observación 54 *Si* $A \in M_{n\times m}(F), B \in M_{m\times r}(F)$, *entonces* $\overline{(AB)} = \overline{A}\,\overline{B}$.

Demostración.

$$\overline{(AB)}_{i,j} = \overline{\sum_k A_{i,k}B_{k,l}} = \sum_k \overline{A_{i,k}B_{k,l}}$$

$$= \sum_k \overline{A_{i,k}}\,\overline{B_{k,l}} = \left(\overline{A}\,\overline{B}\right)_{i,j}$$

■

Teorema 68

$$\begin{gathered} \langle\ ,\ \rangle : M_{n\times n}(F) \times M_{n\times n}(F) \to F \\ \langle A, B\rangle = tr\left(\overline{B^t}A\right) \end{gathered}$$

es un producto interior en $M_{n\times n}(F)$.

Demostración. 1. $\langle\ ,B\rangle = tr\circ\left(\overline{B^t}\cdot \_\right)$ es una composición de funciones lineales, por lo tanto es lineal.

2.

$$\langle B,A\rangle = tr\left(\overline{A^t}B\right) = tr\left(B\overline{A^t}\right) =$$

$$= tr\left(B^{tt}\overline{A^t}\right) = tr\left(\left(\overline{A}B^t\right)^t\right) = tr\left(\overline{A}B^t\right) =$$

$$= tr\left(\overline{A\overline{B^t}}\right) = tr\left(\overline{A\overline{B^t}}\right) = \overline{tr\left(A\overline{B^t}\right)} = \overline{tr\left(\overline{B^t}A\right)} =$$

$$= \overline{\langle A,B\rangle}.$$

3.

$$\langle A,A\rangle = tr\left(\overline{A^t}A\right) = \sum_i\left(\sum_k \overline{A^t}_{i,k}A_{k,i}\right) =$$

$$= \sum_i\left(\sum_k \overline{A^t}_{i,k}A_{k,i}\right) = \sum_i\left(\sum_k \overline{A}_{k,i}A_{k,i}\right) =$$

$$= \sum_{i,k}\left|A_{k,i}\right|^2 \in \mathbb{R}^+\cup\{0\}\,.$$

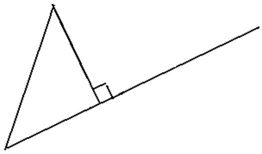
4. Por último, es claro que $\sum\limits_{i,k}\left|A_{k,i}\right|^2 = 0 \Rightarrow A$ es la matriz cero. ■

Notación 7 *Si $A\in M_{n\times m}(F)$, denotaremos $A^* = \overline{A^t} = \overline{A}^t$. A^* se llama la matriz adjunta de A.*

5.4. Ortogonalidad y el Teorema de Gram-Schmidt

Definición 72 *Diremos que $\vec{u},\vec{v}$ en un espacio con producto interior son perpendiculares u ortogonales si $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle = 0$. Representaremos esta situación escribiendo $\vec{u}\perp\vec{v}$.*

Observación 55 *Si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es un conjunto linealmente independiente en un espacio vectorial ${}_FV$ de dimensión finita, entonces $\exists\lambda \in F$ tal que $(\vec{u} - \lambda\vec{v}) \perp \vec{v}$.*



Demostración. Simplemente resolvamos $0 = \langle(\vec{u} - \lambda\vec{v}), \vec{v}\rangle$:
$0 = \langle(\vec{u} - \lambda\vec{v}), \vec{v}\rangle = \langle\vec{u}, \vec{v}\rangle - \lambda\langle\vec{v}, \vec{v}\rangle \Rightarrow \lambda = \frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle}$, donde notamos que $\langle\vec{v}, \vec{v}\rangle = \|\vec{v}\|^2 \neq 0$, pues $\vec{v} \neq \vec{0}$, por ser $\vec{v}$ un elemento de un conjunto linealmente independiente. ■

Notación 8 $\frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle}\vec{v} = \frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$ *se llama "la componente de $\vec{u}$ a lo largo de $\vec{v}$".*

Observación 56 *En $\mathbb{R}^2$ uno tiene que la componente de $\vec{u}$ a lo largo de $\vec{v}$ es $(\|\vec{u}\|\cos(\alpha))\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Donde α es el "ángulo de $\vec{v}$ a $\vec{u}$".*

Esto sugiere la siguiente definición.

Definición 73 *Si $\vec{u}, \vec{v}$ son dos vectores en ${}_FV$ con $\langle\ ,\ \rangle$,*

$$cos\,(\alpha) = \frac{\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}.$$

Observación 57
1. *Notemos que una consecuencia del Teorema de Cauchy-Schwarz, es que*
$$|cos\,(\alpha)| \leqslant 1.$$
2. *Notemos también que $\vec{u}, \vec{v}$ son vectores ortogonales $\Leftrightarrow cos\,(\alpha) = 0$, que también es compatible con nuestra experiencia geométrica acerca de $\mathbb{R}^2$.*

Definición 74 *Si $S \leqslant {}_FV$, V con $\langle\ ,\ \rangle$, entonces*

$$S^{\perp} = \{\vec{w} \mid \langle\vec{v}, \vec{w}\rangle = 0, \forall\vec{v} \in S\}$$

.

Teorema 69 $S^{\perp} \leqslant {}_F V$.

Demostración. 1. $\left\langle \vec{v}, \vec{0} \right\rangle = \overline{\left\langle \vec{0}, \vec{v} \right\rangle} = \overline{\langle \ , \vec{v} \rangle \left(\vec{0} \right)} = \bar{0} = 0$. Por lo tanto $\vec{0} \in S^{\perp}$.
2. $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in S^{\perp}, c \in F \Rightarrow \langle \vec{v}, \vec{w}_1 + c\vec{w}_2 \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle + \bar{c} \langle \vec{v}, \vec{w}_2 \rangle = 0 + 0 = 0$ ■

Podemos considerar que $\begin{array}{cccc} (\ )^{\perp}: & \wp(V) & \rightarrow & \left[\left\{ \vec{0} \right\}, {}_F V \right] \\ & S & \mapsto & S^{\perp} \end{array}$ es una función que manda un subconjunto S de V en un subespacio de ${}_F V$.

Teorema 70

$$\begin{array}{cccc} (\ )^{\perp}: & \wp(V) & \rightarrow & \left[\left\{ \vec{0} \right\}, {}_F V \right] \\ & S & \mapsto & S^{\perp} \end{array}$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $(\ )^{\perp}$ *invierte el orden.*
2. $S^{\perp} = (\mathfrak{L}(S))^{\perp}$.
3. $(X \cup Y)^{\perp} = X^{\perp} \cap Y^{\perp}$.
4. $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$, *si* W_1, W_2 *son subespacios de* ${}_F V$.
5. $(W_1 \cap W_2)^{\perp} \supseteq W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$.

Demostración.

1. Si $X \subseteq Y$ y $\vec{v} \in Y^{\perp}$, entonces $\langle \vec{y}, \vec{v} \rangle = 0, \forall \vec{y} \in Y$, en particular $\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0, \forall \vec{x} \in W_1$, es decir, $\vec{v} \in X^{\perp}$.

2. $S \subseteq \mathfrak{L}(S) \Rightarrow (\mathfrak{L}(S))^{\perp} \subseteq S^{\perp}$.
   Recíprocamente si $\vec{v} \in S^{\perp}$ y $\vec{x} \in \mathfrak{L}(S)$, entonces $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \vec{x}_i$ con $\vec{x}_i \in S, c_i \in F$, así:
$$\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} c\vec{x}_i, \ \vec{v} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \langle \vec{x}_i, \vec{v} \rangle = 0.$$

3. $X \subseteq (X \cup Y) \Rightarrow (X \cup Y)^{\perp} \subseteq X^{\perp}$. De la misma manera,
$$(X \cup Y)^{\perp} \subseteq Y^{\perp}$$
. Entonces
$$(X \cup Y)^{\perp} \subseteq X^{\perp} \cap Y^{\perp}.$$
Por otra parte,
$$\vec{v} \in X^{\perp} \cap Y^{\perp} \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0, \forall \vec{x} \in X, \forall \vec{y} \in Y.$$
Es decir,
$$\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0, \forall \vec{x} \in X \cup Y.$$
Por lo que
$$X^{\perp} \cap Y^{\perp} \subseteq (X \cup Y)^{\perp}.$$

4. $(W_1 + W_2)^{\perp} = (\mathfrak{L}(W_1 \cup W_2))^{\perp} = (W_1 \cup W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$.

5. $W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 \Rightarrow (W_1)^{\perp} \subseteq (W_1 \cap W_2)^{\perp}$. Análogamente,
$$(W_2)^{\perp} \subseteq (W_1 \cap W_2)^{\perp},$$
así que
$$(W_1)^{\perp} + (W_2)^{\perp} \subseteq (W_1 \cap W_2)^{\perp}. \blacksquare$$

Ejercicio 128 *Sea V un espacio con producto interior de dimensión finita y sea W un subespacio de V. Demostrar que* $\dim(V) = \dim(W) + \dim\left(W^{\perp}\right)$.

Ejercicio 129 *Demostrar que si dimensión de ${}_FV$ es finita entonces*
$$(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}.$$
Sugerencia, usar el Corolario 13 y el inciso 4 del Teorema anterior.

Ejercicio 130 *Encontrar un ejemplo de que* $(W_1 \cap W_2)^{\perp} \supsetneqq W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$.

Ejercicio 131 *Mostrar que si ${}_FV$ es un espacio de dimensión finita, entonces son equivalentes para dos subconjuntos X, Y de V:*

1. $X^{\perp} = Y^{\perp}$.

2. $\mathfrak{L}(X) = \mathfrak{L}(Y)$.

Definición 75 *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial con $\langle\ ,\ \rangle$, se dice que $Z \leqslant V$ es un complemento ortogonal de $W \leqslant V$ si*

1. $V = W \bigoplus Z$.

2. $\langle \vec{w}, \vec{z} \rangle = 0, \forall \vec{w} \in W, \forall \vec{z} \in Z$.

Definición 76 *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial con $\langle\ ,\ \rangle$ y sea $\beta \subseteq V$.*

1. *$\beta \subseteq {}_FV$ se llama ortogonal, si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, $\forall \vec{u} \neq \vec{v} \in \beta$.*

2. *$\beta \subseteq {}_FV$ se llama ortonormal, si*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \delta_{\vec{u},\vec{v}} = \begin{cases} 0 \ si\ \vec{u} \neq \vec{v} \\ 1 \ si\ \vec{u} = \vec{v} \end{cases}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \beta.$$

Teorema 71 (Gram-Schmidt) *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial con $\langle\ ,\ \rangle$. Sea $\{\vec{v}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \underset{l.i}{\hookrightarrow} V$, entonces*

$$\exists \{\vec{w}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \underset{ortonormal}{\hookrightarrow} V,$$

tal que

$$\mathfrak{L}(\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m\}) = \mathfrak{L}(\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\}), \ para\ cada\ m \in \mathbb{N}.$$

Demostración.

Construiremos $\{\vec{w}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ recursivamente:

$\vec{w}_1 =: \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}$, notemos que $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ puesto que $\vec{v}_1$ es un elemento de un conjunto linealmente independiente. Notemos que $\{\vec{w}_1\}$ es un conjunto ortonormal y que los espacios generados por $\vec{v}_1$ y $\vec{w}_1$ coinciden.

Supongamos ahora que hemos construído $\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\}$ conjunto ortonormal de vectores tal que $\mathfrak{L}(\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_j\}) = \mathfrak{L}(\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_j\}), \forall j \leqslant m$.

En particular, estamos suponiendo que $\mathfrak{L}(\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m\}) = \mathfrak{L}(\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\})$.

Definimos

$$\vec{z} =: \vec{v}_{m+1} - \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\langle \vec{v}_{m+1}, \vec{w}_j \rangle}{\langle \vec{w}_j, \vec{w}_j \rangle} \vec{w}_j \right) = \vec{v}_{m+1} - \left(\sum_{j=1}^{m} \langle \vec{v}_{m+1}, \vec{w}_j \rangle \vec{w}_j \right).$$

$$\vec{w}_{m+1} = \frac{\vec{z}}{\|\vec{z}\|}.$$

1. A $\vec{v}_{m+1}$ se le están restando sus componentes a lo largo de cada uno de los vectores $\vec{w}_i$. Ahora tenemos que comprobar que

2.
$$\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\} \cup \{\vec{w}_{m+1}\}$$
es ortonormal y

3. $\mathfrak{L}(\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\} \cup \{\vec{w}_{m+1}\}) = \mathfrak{L}(\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{m+1}\})$.

Por construcción, todos los vectores de $\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\}$ tienen norma 1. Tomemos ahora $k \leqslant m$ y calculemos $\langle \vec{w}_{m+1}, \vec{w}_k \rangle$:

$$\langle \vec{w}_{m+1}, \vec{w}_k \rangle = \left\langle \frac{\vec{z}}{\|\vec{z}\|}, \vec{w}_k \right\rangle = \frac{1}{\|\vec{z}\|} \langle \vec{z}, \vec{w}_k \rangle =$$
$$= \frac{1}{\|\vec{z}\|} \left\langle \vec{v}_{m+1} - \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\langle \vec{v}_{m+1}, \vec{w}_j \rangle}{\langle \vec{w}_j, \vec{w}_j \rangle} \vec{w}_j \right), \vec{w}_k \right\rangle =$$
$$= \frac{1}{\|\vec{z}\|} \left\langle \vec{v}_{m+1} - \frac{\langle \vec{v}_{m+1}, \vec{w}_k \rangle}{\langle \vec{w}_k, \vec{w}_k \rangle} \vec{w}_k, \vec{w}_k \right\rangle =$$
$$= \frac{1}{\|\vec{z}\|} \left(\langle \vec{v}_{m+1}, \vec{w}_k \rangle - \left\langle \frac{\langle \vec{v}_{m+1}, \vec{w}_k \rangle}{\langle \vec{w}_k, \vec{w}_k \rangle} \vec{w}_k, \vec{w}_k \right\rangle \right) =$$
$$= \frac{1}{\|\vec{z}\|} \left(\langle \vec{v}_{m+1}, \vec{w}_k \rangle - \frac{\langle \vec{v}_{m+1}, \vec{w}_k \rangle}{\langle \vec{w}_k, \vec{w}_k \rangle} \langle \vec{w}_k, \vec{w}_k \rangle \right) =$$
$$= \frac{1}{\|\vec{z}\|} \left(\langle \vec{v}_{m+1}, \vec{w}_k \rangle - \langle \vec{v}_{m+1}, \vec{w}_k \rangle \right) = 0.$$

Ahora, tenemos que

$$\vec{w}_{m+1} \in \mathfrak{L}(\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\} \cup \{\vec{v}_{m+1}\}) = \mathfrak{L}(\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\}) + \mathfrak{L}\{\vec{v}_{m+1}\} =$$
$$= \mathfrak{L}(\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m\}) + \mathfrak{L}\{\vec{v}_{m+1}\} = \mathfrak{L}(\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m\} \cup \{\vec{v}_{m+1}\}).$$

De aquí se sigue que

$$\mathfrak{L}(\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\} \cup \{\vec{w}_{m+1}\}) \subseteq \mathfrak{L}(\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m\} \cup \{\vec{v}_{m+1}\}).$$

Como $\vec{z} =: \vec{v}_{m+1} - \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\langle \vec{v}_{m+1}, \vec{w}_j \rangle}{\langle \vec{w}_j, \vec{w}_j \rangle} \vec{w}_j \right)$, entonces

$$\vec{v}_{m+1} = \|\vec{z}\| \frac{\vec{z}}{\|\vec{z}\|} + \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\langle \vec{v}_{m+1}, \vec{w}_j \rangle}{\langle \vec{w}_j, \vec{w}_j \rangle} \vec{w}_j \right) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\langle \vec{v}_{m+1}, \vec{w}_j \rangle}{\langle \vec{w}_j, \vec{w}_j \rangle} \vec{w}_j \right) + \|\vec{z}\| \, \vec{w}_{m+1} \in \mathfrak{L}\left(\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\} \cup \{\vec{w}_{m+1}\}\right).$$

Así que $\mathfrak{L}\left(\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m\} \cup \{\vec{v}_{m+1}\}\right) \subseteq \mathfrak{L}\left(\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\} \cup \{\vec{w}_{m+1}\}\right)$ ■

Nota 1 *El proceso recursivo descrito en la demostración del Teorema anterior se llama "proceso de Gram-Schmidt".*

Teorema 72 *Un espacio $_FV$ con $\langle \ , \ \rangle$ de dimensión numerable (finita) tiene una base ortonormal.*

Demostración. Tómese una base numerable (finita) y aplíquesele el proceso de Gram Schmidt. Se obtiene un conjunto ortonormal que genera V. En el Ejercicio 132 se pide demostrar que un conjunto ortonormal es linealmente independiente. ■

Ejemplo 83 *Encontremos un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^4$ que genere el espacio generado por*

$$\{(1,2,3,4), (1,1,1,1), (-1,2,-1,2)\}.$$

$w_1 = \frac{(1,2,3,4)}{\sqrt{(1,2,3,4)(1,2,3,4)}} = .$

$(1,1,1,1) - \left\langle (1,1,1,1), \left(\frac{1}{30}\sqrt{30}, \frac{1}{15}\sqrt{30}, \frac{1}{10}\sqrt{30}, \frac{2}{15}\sqrt{30}\right) \right\rangle w_1 = \frac{1}{3}\sqrt{30}$ *:*

$= (1,1,1,1) - \frac{1}{3}\sqrt{30}\frac{1}{\sqrt{30}}(1,2,3,4) = \frac{1}{3}(2,1,0,-1).$

Entonces $w_2 = \frac{\frac{1}{3}(2,1,0,-1)}{\left\|\frac{1}{3}(2,1,0,-1)\right\|} = \frac{\frac{1}{3}(2,1,0,-1)}{\frac{1}{3}\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,0,-1).$

Por último:

$$(-1,2,-1,2) - \left\langle (-1,2,-1,2), \frac{(1,2,3,4)}{\sqrt{(1,2,3,4)(1,2,3,4)}} \right\rangle \frac{(1,2,3,4)}{\sqrt{(1,2,3,4)(1,2,3,4)}} -$$

$- \left\langle (-1,2,-1,2), \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,0,-1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,0,-1) =$

$= (-1,2,-1,2) - \frac{8}{\langle (1,2,3,4),(1,2,3,4) \rangle}(1,2,3,4) - \frac{-2}{6}(2,1,0,-1) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{9}{5}, -\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right).$

Así que $w_3 = \frac{(-3,9,-9,3)}{\|(-3,9,-9,3)\|} = \frac{\sqrt{5}}{30}(-3,9,-9,3).$

Veamos que $\{(1,2,3,4), (2,1,0,-1), (-3,9,-9,3)\}$ *es un conjunto ortogonal:*

$$\langle (1,2,3,4), (2,1,0,-1) \rangle = 2 + 2 - 4 = 0$$

$$\langle (1,2,3,4), (-3,9,-9,3) \rangle = -3 + 18 - 27 + 12 = 0.$$

$$\langle (2,1,0,-1), (-3,9,-9,3) \rangle = -6 + 9 - 3 = 0.$$

Para ver que $\{w_1, w_2, w_3\}$ *generan el mismo espacio que*

$$\{(1,2,3,4), (1,1,1,1), (-1,2,-1,2)\},$$

basta ver que las matrices cuyos renglones son w_1, w_2, w_3 *y*

$$(1,2,3,4)\,,(1,1,1,1)\,,(-1,2,-1,2)\,,$$

respectivamente son equivalentes por renglones. Para esto basta ver que ambas matrices tienen la misma forma reducida y escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

cuya forma reducida y escalonada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Comprobarlo).
Por otra parte,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 9 & -9 & 3 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ -3 & 9 & -9 & 3 \end{pmatrix} \bowtie$$

$$\bowtie \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & 15 & 0 & 15 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 15 & 0 & 15 \end{pmatrix} \bowtie$$

$$\bowtie \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -30 & -30 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bowtie$$

$$\bowtie \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bowtie$$

$$\bowtie \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observación 58 *Un conjunto ortogonal de vectores distintos de* $\vec{0}$ *es l. i.*

Demostración. Si $\beta \subseteq V \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ es un conjunto ortogonal, para ver que es *l. i.* basta demostrar que cualquier subconjunto finito es *l. i.* Sea $\gamma \subseteq \beta$ finito, digamos que $\gamma = \{x_1, ...x_m\}$, supongamos que $c_1x_1 + ... + c_mx_m = \vec{0}$. Multiplicando por x_i, obtenemos $0 = c_i \langle x_i, x_i \rangle = c_i \|x_i\|^2$. Como $\|x_i\|^2 \neq 0$, esto implica que $c_i = 0$, como esto sucede para cada i, concluímos que γ es *l. i.* ■

Ejercicio 132 *Demuestre que un conjunto ortonormal de vectores es l. i.*

Teorema 73 *Un subespacio W de dimensión finita de un espacio ${}_FV$ con $\langle\ ,\ \rangle$, tiene un complemento ortogonal.*

Demostración. Sea W de dimensión finita con base $\gamma = \{x_1, ...x_n\}$. Entonces $W^\perp = \gamma^\perp = x_1^\perp \cap ... \cap x_n^\perp$ para ver que esto es un complemento ortogonal de W, basta ver que

$$W \bigoplus W^\perp = V.$$

$\cap$) Es claro que $\vec{v} \in W \cap W^\perp \Rightarrow \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$.

$+$) Si $\vec{v} \notin W$, entonces $\gamma \cup \{\vec{v}\}$ es linealmente independiente. Aplicando el procedimiento de Gram-Schmidt, obtenemos un conjunto $\gamma' \cup \{\vec{v}'\}$ ortonormal tal que γ' es una base para W y tal que $\vec{v} \in \mathfrak{L}(\gamma' \cup \{\vec{v}'\}) = \mathfrak{L}(\gamma') + \mathfrak{L}(\{\vec{v}'\}) = W + \mathfrak{L}(\{\vec{v}'\}) \subseteq W + W^\perp$, ya que $\vec{v}' \in W^\perp$, por ser ortogonal a una base de W. Por lo tanto $V \setminus W \subseteq W + W^\perp$, por otra parte $W \subseteq W + W^\perp$, así que $V = (V \setminus W \cup W) \subseteq W + W^\perp$. Entonces $V = W + W^\perp$. ■

Corolario 13 *Si* $\dim(V)$ *es finita, entonces* $dimW + \dim W^\perp = \dim V$. ■

Ejercicio 133 *Sea* $\mathbb{R}^6 \xrightarrow{A\cdot\_} \mathbb{R}^3$ *tal que* $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, *encuentre* $(Ker(A \cdot \_))^\perp$, *y compruebe que tiene dimensión igual al rango de* $(A \cdot \_)$.

Ejercicio 134 *Encuentre una base ortonormal para* $Ker(A \cdot \_)^\perp$.

Ejercicio 135

1. *Sea* $\mathbb{R}^6 \xrightarrow{B\cdot\_} \mathbb{R}^3$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & -2 \\ 6 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, *encuentre* $(Ker(B \cdot \_))^\perp$.

2. *Encuentre una base ortonormal para* $(Ker(B \cdot \_))^\perp$.

3. *Encuentre* $Ker(A \cdot \_) \cap Ker(B \cdot \_)$ *. (la misma A de los dos ejercicios anteriores) resolviendo*

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & -2 \\ 6 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Ejercicio 136 *Tómese A y B como en el ejercicio previo.*

1. *Encuentre la dimensión de* $(Ker(A \cdot \_) \cap (Ker(B \cdot \_)))^{\perp}$ *, y una base ortonormal.*

2. *Compruebe que*

$$(Ker(A \cdot \_) \cap (Ker(B \cdot \_)))^{\perp} = (Ker(A \cdot \_))^{\perp} + (Ker(B \cdot \_))^{\perp}.$$

Ejercicio 137 *Muestre que*

$$\langle \ , \ \rangle : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$$

tal que

$$\langle a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n, b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m \rangle = \sum a_i b_i$$

es un producto interior.

Ejercicio 138 *Ortonormalice el conjunto* $\{1, x, x^2, x^3\}$ *respecto al producto interior del ejercicio anterior.*

Ejercicio 139 *Ortonormalizar el siguiente conjunto:*

$$S = \{(1,0,1), (0,1,1), (1,3,3)\}$$

y expresar $v = (1,1,2)$ *como combinación de la base ortonormalizada.*

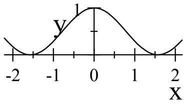
Ejercicio 140 *Sea* $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,1,1), (1,-1,2)\}$. *Calcular* $S^{\perp}$.

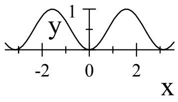
Ejercicio 141 *Muestre que* $\langle \ , \ \rangle : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ *tal que* $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$ *es un producto interior.*

Ejercicio 142 *Ortonormalice el conjunto* $\{1, x, x^2, x^3\}$ *respecto al producto interior del ejercicio anterior.*

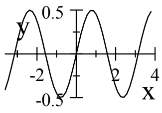
Ejercicio 143 *Muestre que* $\langle\ f, g\ \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} fg$ *define un producto interior en* $\mathcal{C}\,[-\pi, \pi]$, *el espacio de las funciones reales continuas definidas en* $[-\pi, \pi]$. *Demuestre que*

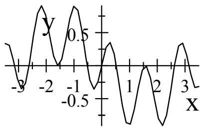
1. *senx y* $\cos x$ *son ortogonales respecto a este producto interior.*
2. *sen*(nx), $\cos(mx)$, *son ortogonales*
3. $\|\cos(x)\| = \sqrt{\pi}$.
4. $\|sen\,(x)\| = \sqrt{\pi}$.





$\cos(x)\cos(x)$ $\quad$ $\mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(x)$





$\mathrm{sen}(x)\cos(x)$ $\quad$ $\mathrm{sen}(2x)\cos(3x)$

5.4.1. Matrices respecto a una base ortonormal

Teorema 74 *Sea* $T : V \to V$ *un operador lineal en un espacio de dimensión finita* V *con* $\langle\ ,\ \rangle$. *Si* $\beta = \{\vec{x}_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ *es una base ortonormal de* V, *entonces*

$$\left([T]_\beta^\beta\right)_{i,j} = \langle T(\vec{x}_j), \vec{x}_i\rangle .$$

Demostración. Escribamos $a_{i,j} = \left([T]_\beta^\beta\right)_{i,j}$. Entonces

$$\left([T]_\beta^\beta\right)^{\mathrm{j}} = [T(\vec{x}_j)]_\beta = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix},$$

es decir que

$$T(\vec{x}_j) = a_{1,j}\vec{x}_1 + a_{2,j}\vec{x}_2 + ... + a_{n,j}\vec{x}_n.$$

Aplicando $\langle\ ,\vec{x}_i\rangle$ obtenemos $a_{i,j}$:

$$\langle T(\vec{x}_j), \vec{x}_i\rangle = \langle a_{1,j}\vec{x}_1 + a_{2,j}\vec{x}_2 + ... + a_{n,j}\vec{x}_n, \vec{x}_i\rangle = a_{i,j}.$$

■

5.4.2. Representación de elementos del espacio dual

Teorema 75 *Si ${}_FV$ es un espacio con $\langle\ ,\ \rangle$ de dimensión finita, entonces $\forall f \in V^*, \exists \vec{w} \in V$ tal que $f = \langle\ ,\vec{w}\rangle$.*

Demostración. Si $f = \hat{0}$, entonces $\vec{w} = \vec{0}$ satisface la afirmación.

Si $f \neq \hat{0}$, entonces $V \overset{f}{\twoheadrightarrow} F$ es lineal suprayectiva, así que

$$\text{nul}(f) + \text{rango}(f) = \dim(V).$$

Es decir que Ker(f) es un subespacio de V de dimensión $\dim(V) - 1$. Como

$$V = \text{Ker}(f) \bigoplus (\text{Ker}(f))^{\perp},$$

escojamos $\vec{0} \neq \vec{z} \in (\text{Ker}(f))^{\perp}$, entonces $f(z) \neq 0$.

Tomemos

$$\vec{w} = \lambda\vec{z},$$

de tal manera que $f(\vec{z}) = \langle\vec{z}\ ,\lambda\vec{z}\ \rangle = \bar{\lambda}\langle\vec{z},\vec{z}\rangle = \|\vec{z}\|^2$. Así que $\lambda = \overline{\frac{f(\vec{z})}{\|\vec{z}\|^2}}$.

Es claro ahora que

$$\langle\ \ ,\vec{w}\rangle_{|(\text{Ker}(f))^{\perp}} = f_{|(\text{Ker}(f))^{\perp}}$$

por otra parte,

$$\langle\ ,\vec{w}\rangle_{|\text{Ker}(f)} = \hat{0}_{|\text{Ker}(f)} = f_{|\text{Ker}(f)},$$

pues $\vec{w} \in (\text{Ker}(f))^{\perp}$. ■

5.5. El operador adjunto

Teorema 76 *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial de dimensión finita con $\langle\ ,\ \rangle$. Sea $T : V \to V$ un operador lineal en V. Entonces existe un operador lineal $T^* : V \to V$ tal que*

$$\langle T(\vec{v}), \vec{w}\rangle = \langle\vec{v}, T^*(\vec{w})\rangle\ \forall\vec{v},\vec{w} \in V.$$

Demostración. Dada $\vec{w} \in W$, entonces $\langle\ ,\vec{w}\rangle \circ T : V \to F$ es lineal por ser composición de funciones lineales. Por el Teorema 75, $\exists \vec{w'} \in V$ tal que $\langle\ ,\vec{w}\rangle \circ T = \langle\ ,\vec{w}'\rangle$. Definamos $T^*(\vec{w}) =: \vec{w}'$.

Por definición,

$$\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle \circ T = \langle \vec{v}, T^*(\vec{w})\rangle .$$

Resta ver que $T^* : V \to V$,así definida es una función lineal:

tenemos que

$$\forall \vec{v}, \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in V, \forall c \in F, \langle \vec{v}, T^*(\vec{w}_1 + c\vec{w}_2)\rangle = \langle T(\vec{v}), \vec{w}_1 + c\vec{w}_2\rangle =$$
$$= \langle T(\vec{v}), \vec{w}_1\rangle + \langle T(\vec{v}), c\vec{w}_2\rangle = \langle T(\vec{v}), \vec{w}_1\rangle + \bar{c}\langle T(\vec{v}), \vec{w}_2\rangle =$$
$$= \langle \vec{v}, T^*(\vec{w}_1)\rangle + \bar{c}\langle \vec{v}, T^*(\vec{w}_2)\rangle = \langle \vec{v}, T^*(\vec{w}_1)\rangle + \langle \vec{v}, cT^*(\vec{w}_2)\rangle =$$
$$= \langle \vec{v}, T^*(\vec{w}_1) + cT^*(\vec{w}_2)\rangle .$$

De $\langle \vec{v}, T^*(\vec{w}_1 + c\vec{w}_2)\rangle = \langle \vec{v}, T^*(\vec{w}_1) + cT^*(\vec{w}_2)\rangle$, obtenemos

$$0 = \langle \vec{v}, T^*(\vec{w}_1 + c\vec{w}_2)\rangle - \langle \vec{v}, T^*(\vec{w}_1) + cT^*(\vec{w}_2)\rangle =$$
$$= \langle \vec{v}, [T^*(\vec{w}_1 + c\vec{w}_2)] - [T^*(\vec{w}_1) + cT^*(\vec{w}_2)]\rangle .$$

Como esto vale para toda $\vec{v}$, en particular vale si ponemos

$$\vec{v} = [T^*(\vec{w}_1 + c\vec{w}_2)] - [T^*(\vec{w}_1) + cT^*(\vec{w}_2)] .$$

De aquí obtenemos que

$$[T^*(\vec{w}_1 + c\vec{w}_2)] - [T^*(\vec{w}_1) + cT^*(\vec{w}_2)] = \vec{0},$$

es decir que T^* es lineal. ■

Definición 77 *Si T, T^* son operadores lineales en un ${}_FV$ un espacio vectorial con $\langle\ ,\ \rangle$ tales que*

$$\langle T(\vec{v}), \vec{w}\rangle = \langle \vec{v}, T^*\vec{w}\rangle, \forall \vec{v}, \vec{w} \in V,$$

T^* se llama el operador adjunto de T.

Ejercicio 144 *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineal, definida por*

$$T(x, y) = (x + 2y, 2x + y) .$$

Calcular T^*.

Ejercicio 145 *Para un operador lineal T en V un espacio con producto interior, demostrar que si $T^*T = \hat{0}$ entonces $T = \hat{0}$.*

5.6. Propiedades del operador adjunto

Teorema 77 *Sea* ${}_FV$ *un espacio vectorial de dimensión finita*[3] *con* $\langle\ ,\ \rangle$. *Sean* $T, U \in Hom\,(V, V)\,, c \in F$.

1. $(Id_V)^* = Id_V$.
2. $(0_V)^* = 0_V : V \to V$.
3. $(cT)^* = \bar{c}\,(T^*)\,.$
4. $(U \circ T)^* = T^* \circ U^*$.
5. $(U + T)^* = T^* + U^*$.
6. $T^{**} = T$.
7. *Si* T *es invertible, entonces* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*\,.$

Demostración.

1. $\langle Id_V\,(\vec{v})\,, \vec{w}\ \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w}\ \rangle = \langle \vec{v}, Id_V\,(\vec{w})\ \rangle\,.$
2. $\langle 0_V\,(\vec{v})\,, \vec{w}\ \rangle = \left\langle \vec{0}, \vec{w}\ \right\rangle = 0 = \langle \vec{v}, 0_V\,(\vec{w})\ \rangle\,.$
3. $\langle (cT)(\vec{v}), \vec{w}\rangle = \langle (c(T))(\vec{v}), \vec{w}\rangle = c\langle T(\vec{v}), \vec{w}\rangle = c\langle \vec{v}, T^*(\vec{w})\rangle$
   $= \langle \vec{v}, \bar{c}T^*(\vec{w})\rangle\langle \vec{v}, (\bar{c}T^*)(\vec{w})\rangle$.
4. Ejercicio.
5. Ejercicio.
6. $\langle T^*\,(\vec{v})\,, \vec{w}\rangle = \overline{\langle \vec{w}, T^*\,(\vec{v})\rangle} = \overline{\langle T\,(\vec{w})\,, \vec{v}\rangle} = \overline{\overline{\langle \vec{v}, T\,(\vec{w})\rangle}} = \langle \vec{v}, T\,(\vec{w})\rangle\,.$
7. $Id_V = (Id_V)^* = (T \circ T^{-1})^* = (T^{-1})^* \circ T^*$, esto muestra que $(T^{-1})^*$ es inverso izquierdo de T^*. Simétricamente, $(T^{-1})^*$ es inverso derecho de T^*. Por lo tanto $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$. ■

Ejercicio 146 *Demuestre los incisos 4 y 5 del Teorema anterior.*

[3] La hipótesis de que ${}_FV$ es de dimensión finita sólo se usa para poder contar con los adjuntos de los operadores. Las mismas afirmaciones se pueden hacer suponiendo la existencia de estos adjuntos, quitando la hipòtesis de finitud.

Teorema 78 *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial de dimensión finita con $\langle\ ,\ \rangle$. Sea $\beta = \{\vec{x}_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ una base ortonormal de ${}_FV$. Sea T un operador en V. La matriz del operador adjunto T^*respecto a β está dada por*

$$[T^*]_\beta^\beta = \overline{\left([T]_\beta^\beta\right)^t} = \left([T]_\beta^\beta\right)^*.$$

Demostración.

$$\left([T^*]_\beta^\beta\right)_{i,j} = \langle T^*(\vec{x}_j), \vec{x}_i\rangle = \langle \vec{x}_j, T^{**}(\vec{x}_i)\rangle = \langle \vec{x}_j, T(\vec{x}_i)\rangle =$$

$$= \overline{\langle T(\vec{x}_i), \vec{x}_j\rangle} = \overline{\left([T]_\beta^\beta\right)_{j,i}} = \overline{\left([T]_\beta^\beta\right)^t_{i,j}} = \left(\left([T]_\beta^\beta\right)^*\right)_{i,j}$$

■

Corolario 14 $T^* = \Phi_\beta^{-1} \circ \left(\left([T]_\beta^\beta\right)^* \cdot \_\right) \circ \Phi_\beta$.

Demostración. El diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T^*"] \arrow[d, "\Phi_\beta"'] \arrow[dr, phantom, "="] & V \arrow[d, "\Phi_\beta"] \\ F^n \arrow[r, "\left([T]_\beta^\beta\right)^* \cdot \_"] & F^n \end{tikzcd}$$

es conmutativo, en vista del teorema anterior. ■

Ejemplo 84 $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{T} & \mathbb{C}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(-5-5i) + y(-3-7i) \\ x(9+7i) + y(5i) \end{pmatrix} \end{array}$ *tiene matriz*

$$\begin{pmatrix} -5-5i & -3-7i \\ 9+7i & 5i \end{pmatrix}.$$

Su matriz adjunta es

$$\begin{pmatrix} -5+5i & 9-7i \\ -3+7i & -5i \end{pmatrix}$$

Entonces $T^* = \Phi_\beta^{-1} \circ \left(\left([T]_\beta^\beta\right)^* \cdot \_\right) \circ \Phi_\beta$, *calculando en* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *obtenemos.*

$$T^*\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\Phi_\beta^{-1} \circ \left(\left([T]_\beta^\beta\right)^* \cdot \_\right) \circ \Phi_\beta\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= \Phi_\beta^{-1} \circ \left(\left([T]_\beta^\beta \right)^* \cdot \_ \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$
$$= \Phi_\beta^{-1} \left(\left([T]_\beta^\beta \right)^* \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) =$$
$$= \Phi_\beta^{-1} \left(\begin{pmatrix} -5+5i & 9-7i \\ -3+7i & -5i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) =$$
$$= \Phi_\beta^{-1} \left(\begin{pmatrix} -5+5i & 9-7i \\ -3+7i & -5i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) =$$
$$= \begin{pmatrix} -5x+5ix+9y-7iy \\ -3x+7ix-5iy \end{pmatrix}.$$

A manera de verificación, tomemos

$$\left\langle T \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -2-20i \\ 6+8i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} \right\rangle =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2-20i \\ 6+8i \end{pmatrix} =: 14-32i$$

Pues

$$T \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-5i & -3-7i \\ 9+7i & 5i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+2i \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -2-20i \\ 6+8i \end{pmatrix}.$$

Por otra parte,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+2i \end{pmatrix}, T^* \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9+23i \\ 7+7i \end{pmatrix} \right\rangle =$$
$$= \begin{pmatrix} 9-23i & 7-7i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i \\ 2+2i \end{pmatrix} =$$
$$= 14-32i,$$

pues

$$T^* \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+5i & 9-7i \\ -3+7i & -5i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 147 *Calcular el operador adjunto de*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \xrightarrow{T} & \mathbb{C}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(-5)+y(-7i)+iz \\ x(3+7i)+y(5i)+z(-5) \\ x(-5)+y(-7i)+z(-1-i) \end{pmatrix} \end{array}.$$

5.7. Transformaciones lineales y productos interiores

Recomendamos a los lectores el libro de la M. en C. Ana Irene Ramírez Galarza [6] para los aspectos y aplicaciones en Geometría del producto interior.

Teorema 79 *Son equivalentes para un operador lineal suprayectivo $T : V \twoheadrightarrow V$ en un espacio vectorial con $\langle\ ,\ \rangle$:*

1. *T respeta el producto interior, es decir $\langle T(\vec{u}), T(\vec{v})\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$.*
2. *T respeta la norma,. es decir $\|T(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|, \forall \vec{u} \in V$.*
3. *T manda conjuntos ortonormales en conjuntos ortonormales.*
4. *T es invertible y $T^{-1} = T^*$.*

Demostración. 1)$\Rightarrow$ 2) Se sigue de la definición de norma.
2)$\Rightarrow$1)

$$\|T(\vec{u} - \lambda\vec{v})\|^2 = \|(\vec{u} - \lambda\vec{v})\|^2$$

Así que

$$\begin{aligned} \langle \vec{u} - \lambda\vec{v}, \vec{u} - \lambda\vec{v}\rangle &= \langle T(\vec{u} - \lambda\vec{v}), T(\vec{u} - \lambda\vec{v})\rangle = \\ &= \langle T(\vec{u}) - T(\lambda\vec{v}), T(\vec{u}) - T(\lambda\vec{v})\rangle . \end{aligned}$$

Entonces

$$\|\vec{u}\|^2 + \langle \vec{u}, -\lambda\vec{v}\rangle + \langle -\lambda\vec{v}, \vec{u}\rangle + \|\vec{v}\|^2 =$$
$$= \|T(\vec{u})\|^2 + \langle T\vec{u}, T(-\lambda\vec{v})\rangle + \langle T(-\lambda\vec{v}), T(\vec{u})\rangle + \|T(\vec{v})\|^2 ,$$

de donde tenemos, cancelando $\|\vec{u}\|^2$ con $\|T(\vec{u})\|^2$ y $\|\vec{v}\|^2$ con $\|T(\vec{v})\|^2$ que:

$$\overline{-\lambda}\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle - \lambda\langle \vec{v}, \vec{u}\rangle = \overline{-\lambda}\langle T\vec{u}, T(\vec{v})\rangle + -\lambda\langle T(\vec{v}), T(\vec{u})\rangle .$$

Así que

$$\overline{\lambda}\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \lambda\overline{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle} = \overline{\lambda}\langle T\vec{u}, T(\vec{v})\rangle + \lambda\overline{\langle T(\vec{u}), T(\vec{v})\rangle},$$

por lo que $2\operatorname{Re}\left(\overline{\lambda}\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle\right) = 2\operatorname{Re}\left(\overline{\lambda}\langle T\vec{u}, T(\vec{v})\rangle\right)$, así que

$$\operatorname{Re}\left(\overline{\lambda}\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle\right) = \operatorname{Re}\left(\overline{\lambda}\langle T\vec{u}, T(\vec{v})\rangle\right), \forall \lambda \in F. \tag{5.1}$$

Si tomamos $\lambda = 1$, tenemos que

$$\operatorname{Re}\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \operatorname{Re}\langle T(\vec{u}), T(\vec{v})\rangle .$$

Por otra parte, dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, tenemos que

$$\operatorname{Re}(-iz) = \operatorname{Re}(i(-a-bi)) = \operatorname{Re}(-ia+b) = b = \operatorname{Im}(a+bi) = \operatorname{Im}(z).$$

Así que si tomamos $\lambda = -i$ en 5.1, obtenemos

$$\operatorname{Im}\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \operatorname{Im}\langle T(\vec{u}), T(\vec{v})\rangle .$$

Dado que los números $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$ y $\langle T(\vec{u}), T(\vec{v})\rangle$ comparten sus partes reales e imaginarias, concluímos que

$$\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle T(\vec{u}), T(\vec{v})\rangle .$$

1)$\Rightarrow$ 3) Es claro.

3) $\Rightarrow$ 4) T es inyectiva, pues si $\vec{x} \neq \vec{0}$, entonces $\left\{\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right\}$ es un conjunto ortonormal, así que también lo es $\left\{\frac{T(\vec{x})}{\|\vec{x}\|}\right\}$, en particular, $\|T(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$, y $T(\vec{x}) \neq \vec{0}$. Luego $\operatorname{Ker}(T) = \left\{\vec{0}\right\}$, por hipótesis tenemos que T es suprayectivo.

Hemos visto en el párrafo precedente que $\|T(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|, \forall \vec{x} \in V$. Así que también tenemos que T respeta el producto interior, ya que hemos demostrado que 1) y 2) son equivalentes.

Así, $\langle T(\vec{v}), \vec{w}\rangle = \langle T(\vec{v}), TT^{-1}\vec{w}\rangle = \langle \vec{v}, T^{-1}\vec{w}\rangle$, de donde vemos que $T^{-1} = T^*$.

4)$\Rightarrow$ 1) $\langle T(\vec{v}), T(\vec{w})\rangle = \langle \vec{v}, T^*T(\vec{w})\rangle = \langle \vec{v}, T^{-1}T(\vec{w})\rangle = \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle$. ∎

Teorema 80 *Sea ${}_FV$ un espacio vectorial de dimensión finita con $\langle\ ,\ \rangle$. Son equivalentes para un operador lineal T :*

1. *T respeta el producto interior.*
2. *Para cualquier base ortonormal β, $[T^*]_\beta^\beta = \left([T]_\beta^\beta\right)^{-1}$.*
3. *Los renglones de $[T]_\beta^\beta$ forman una base ortonormal de F^n.*
4. *Las columnas de $[T]_\beta^\beta$ forman una base ortonormal de F^n.*

Demostración. 1)$\Rightarrow$ 2) Si T respeta el producto interior, entonces con el mismo argumento del Teorema de arriba, vemos que T también respeta la norma y por lo tanto T es inyectivo. Dada la hipótesis de que $\dim(V)$ es finita, tenemos que T es invertible. Cuando T es invertible, cualquier matriz que lo represente es invertible también. Como estamos dentro de las hipótesis del Teorema anterior, tenemos que $T^{-1} = T^*$.

Ahora,

$$[T^*]^\beta_\beta = \left[T^{-1}\right]^\beta_\beta = \left([T]^\beta_\beta\right)^{-1}.$$

2)$\Rightarrow$ 3)

$$\delta_{i,j} = \left([T]^\beta_\beta \left[T^{-1}\right]^\beta_\beta\right)_{i,j} = \left([T]^\beta_\beta [T^*]^\beta_\beta\right)_{i,j}$$

$$= \left([T]^\beta_\beta\right)_{\underline{i}} \left([T^*]^\beta_\beta\right)^{\underline{j}} = \left([T]^\beta_\beta\right)_{\underline{i}} \left(\left([T]^{\beta *}_\beta\right)^{\underline{j}}\right) =$$

$$= \left([T]^\beta_\beta\right)_{\underline{i}} \left(\left(\overline{\left([T]^\beta_\beta\right)^t}\right)^{\underline{j}}\right) = \left([T]^\beta_\beta\right)_{\underline{i}} \left(\overline{\left([T]^\beta_\beta\right)_{\underline{j}}}\right)^t =$$

$$= \left(\left([T]^\beta_\beta\right)_{\underline{i}} \left(\overline{\left([T]^\beta_\beta\right)_{\underline{j}}}\right)^t\right)^t = \left(\overline{\left([T]^\beta_\beta\right)_{\underline{j}}}\right)^{tt} \left(\left([T]^\beta_\beta\right)_{\underline{i}}\right)^t =$$

$$= \left(\left\langle \left(\left([T]^\beta_\beta\right)_{\underline{i}}\right)^t, \left(\left([T]^\beta_\beta\right)_{\underline{j}}\right)^t \right\rangle\right)^t.$$

Luego $\left\langle \left(\left([T]^\beta_\beta\right)_{\underline{i}}\right)^t, \left(\left([T]^\beta_\beta\right)_{\underline{j}}\right)^t \right\rangle = \delta_{j,i}$. Esto muestra que los renglones de $[T]^\beta_\beta$ forman un conjunto ortonormal.

3)$\Rightarrow$4)

$$\delta_{i,j} = \left\langle \left(\left([T]^\beta_\beta\right)_{\underline{i}}\right)^t, \left(\left([T]^\beta_\beta\right)_{\underline{j}}\right)^t \right\rangle = \left(\overline{\left(\left([T]^\beta_\beta\right)_{\underline{j}}\right)^t}\right)^t \left(\left([T]^\beta_\beta\right)_{\underline{i}}\right)^t =$$

$$= \overline{\left(\left([T]^\beta_\beta\right)_{\underline{j}}\right)} \left(\left([T]^\beta_\beta\right)_{\underline{i}}\right)^t = \left(\overline{\left(\left([T]^\beta_\beta\right)_{\underline{j}}\right)} \left(\left([T]^\beta_\beta\right)_{\underline{i}}\right)^t\right)^{tt} =$$

$$= \left(\left(\left([T]^\beta_\beta\right)_{\underline{i}}\right) \overline{\left(\left([T]^\beta_\beta\right)^t\right)^{\underline{j}}}\right)^t = \left(\left(\left([T]^\beta_\beta\right)_{\underline{i}}\right) \left(\left([T]^\beta_\beta\right)^*\right)^{\underline{j}}\right)^t =$$

$$= \left(\left(\overline{\left(\left(\overline{[T]_\beta^\beta}\right)^t\right)^{\underline{\mathrm{i}}}}\right)^t \left(\left([T]_\beta^\beta\right)^*\right)^{\underline{\mathrm{j}}}\right)^t = \left(\left(\overline{\left(\left([T]_\beta^\beta\right)^*\right)^{\underline{\mathrm{i}}}}\right)^t \left(\left([T]_\beta^\beta\right)^*\right)^{\underline{\mathrm{j}}}\right)^t =$$

$$= \left\langle \left(\left([T]_\beta^\beta\right)^*\right)^{\underline{\mathrm{j}}}, \left(\left([T]_\beta^\beta\right)^*\right)^{\underline{\mathrm{i}}} \right\rangle.$$

Tenemos que las columnas de $\left([T]_\beta^\beta\right)^* = \left([T^*]_\beta^\beta\right)$forman un conjunto ortonormal. Esto equivale a decir que $T^*(\beta)$ es un conjunto ortonormal. Si $\vec{v} = \sum_{\vec{x}\in\beta} c_{\vec{x}}\vec{x}$, entonces

$$\|\vec{v}\|^2 = \left\langle \sum_{\vec{x}\in\beta} c_{\vec{x}}\vec{x}, \sum_{\vec{x}\in\beta} c_{\vec{x}}\vec{x} \right\rangle = \sum_{\vec{x}\in\beta} c_{\vec{x}} \left|c_{\vec{x}}\right|^2,$$

aquí hemos usado la ortonormalidad de β.

Como también $T^*(\beta)$ es ortonormal, entonces

$$\|T^*(\vec{v})\|^2 = \left\langle \sum_{\vec{x}\in\beta} T^*(c_{\vec{x}}\vec{x}), \sum_{\vec{x}\in\beta} T^*(c_{\vec{x}}\vec{x}) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{\vec{x}\in\beta} c_{\vec{x}} T^*(\vec{x}), \sum_{\vec{x}\in\beta} c_{\vec{x}} T^*(\vec{x}) \right\rangle = \sum_{\vec{x}\in\beta} \left|c_{\vec{x}}\right|^2.$$

De donde vemos que T^* preserva la norma. Entonces los renglones de $[T^*]_\beta^\beta$ forman un conjunto ortonormal, así que las columnas de $[T^{**}]_\beta^\beta = [T]_\beta^\beta$ forman un conjunto ortonormal.

4)$\Rightarrow$ 1) Parte del argumento anterior muestra que si las columnas de $[T^*]_\beta^\beta$ forman un conjunto ortonormal entonces T^* respeta la norma. Apliquemos esto a $T = (T^*)^*$.

■

Definición 78 *Los operadores que respetan el producto interior se llaman unitarios (u ortogonales si $F = \mathbb{R}$)..*

5.8. Operadores unitarios en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo 85 *Un operador unitario en $\mathbb{R}^2$ es una rotación ó una reflexión.*

Demostración.

La matriz de un operador unitario $U:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, respecto de la base canónica es una matriz con columnas (y renglones) ortonormales.

Digamos que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es dicha matriz, entonces:

1. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

3. $a^2 + b^2 = 1$. Ahora, la función

$$\begin{array}{ccc} [0,1) & \overset{\binom{\cos(\ )}{\operatorname{sen}(\ )}}{\to} & \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1 \right\} \\ & \theta \longmapsto \binom{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)} & \end{array}$$

es una biyección. Equivalentemente,

$$\begin{array}{ccc} [0,1) & \overset{e^{i(\ )}}{\to} & \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \\ \theta & \longmapsto & e^{i(\theta)} \end{array}$$

es una biyección.

Entonces existe $\theta \in [0,1)$ tal que $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) \end{pmatrix}.$

Como $a^2 + b^2 = 1 = (\cos(\theta))^2 + b^2$ entonces $b^2 = 1 - (\cos\theta)^2$, así que

$b = \pm\sqrt{1 - (\cos(\theta))^2} = \pm\sqrt{(\operatorname{sen}(\theta))^2} = \pm\operatorname{sen}(\theta)\,,$

Así las posibilidades son:

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \right\}$. tomando

en cuenta que las columnas deben ser ortogonales.

$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ corresponde a la rotación por un ángulo θ.

Como $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta - \pi/2) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \operatorname{sen}(\theta - \pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$, tenemos que

esta es la matriz de la reflexión sobre una línea que hace un ángulo $\theta/2$ con la parte positiva del eje x. ∎

Ejercicio 148 *Escriba el inverso de la matriz* $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -sen(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ sen(\theta) & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ *sin efectuar ningún cálculo. ¿Qué resultado usó?*

Ejercicio 149 *Demuestre que el inverso de un operador unitario es unitario.*

Ejercicio 150 *Escriba los coeficientes que faltan en*

$$\begin{pmatrix} 1/2 & a & 0 \\ b & 1/3 & c \\ h & k & l \end{pmatrix}$$

de manera que se obtenga una matriz unitaria en $M_{3\times3}(\mathbb{R})$.

5.9. Movimientos rígidos (Isometrías)

Definición 79 *Sea V un espacio real con producto interior. Una función $f : V \to V$ se llama movimiento rígido (o isometría) si*

$$\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\| \ \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in V.$$

Proposición 7 *Para una tal función f, defínase $T : V \to V$ mediante $T(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f\left(\vec{0}\right)$. Entonces f es lineal y además:*

1. a) $\|T(\vec{x})\| = \|\vec{x}\| \ \ \forall \vec{x} \in V.$
   b) $\|T(\vec{x}) - T(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\| \ \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in V.$

Ejercicio 151 1. a) $\langle T(\vec{x}), T(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle \ \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in V.$
   b) $\|T(\vec{x} + a\vec{y}) - T(\vec{x}) - aT(\vec{y})\| = 0 \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in V, a \in \mathbb{R}$. *(Es decir que T es lineal)*

2. *Todo movimiento rígido es un operador ortogonal seguido de una traslación.*

3. $\det(T) = \pm 1$.

4. *Si* $V = \mathbb{R}^2$ *y* β *es la base ordenada canónica para* $\mathbb{R}^2$**??**, *entonces existe un ángulo* θ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$ *tal que*

$$[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ si } det(T) = 1$$

y

$$[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ sen(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ si } det(T) = -1$$

5. *Todo movimiento rígido en* $\mathbb{R}^2$ *es una rotación (con respecto al origen) seguida de una traslación o una reflexión (con respecto ale eje y) seguida de una rotación (con respecto al origen) seguida de una traslación. Obsérvese que:*

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ sen(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Demostración.

1. *a*)

$$\|T(x)\| = \|f(x) - f(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|.$$

b) $\|T(\vec{x}) - T(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$:

$$\begin{aligned} \|T(\vec{x}) - T(\vec{y})\| &= \\ &= \|f(\vec{x}) - f(0) - (f(\vec{y}) - f(0))\| = \\ &= \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \\ &\underbrace{=}_{\text{porque f es isometría}} \|\vec{x} - \vec{y}\|. \end{aligned}$$

c) $\langle T(\vec{x}), T(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$:
Como

$$\|T(\vec{x}) - T(\vec{y})\|^2 = \|\vec{x} - \vec{y}\|^2,$$

entonces

$$\begin{gathered} \|T(\vec{x})\|^2 - 2\langle T(\vec{x}), T(\vec{y})\rangle + \|T(\vec{y})\|^2 = \\ = \langle T(\vec{x}) - T(\vec{y}), T(\vec{x}) - T(\vec{y})\rangle = \\ = \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}\rangle = \|\vec{x}\|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle + \|\vec{y}\|^2. \end{gathered}$$

Cancelando $\|T(\vec{x})\|^2$ con $\|\vec{x}\|^2$ y $\|T(\vec{y})\|^2$ con $\|\vec{y}\|^2$, acabamos.

d)

$$
\begin{gathered}
\left\langle T\left(\vec{x}+a\vec{y}\right)-T\left(\vec{x}\right)-aT\left(\vec{y}\right),T\left(\vec{x}+a\vec{y}\right)-T\left(\vec{x}\right)-aT\left(\vec{y}\right)\right\rangle = \\
=\left\langle T\left(\vec{x}+a\vec{y}\right),T\left(\vec{x}+a\vec{y}\right)\right\rangle - \\
-2\left\langle T\left(\vec{x}+a\vec{y}\right),T\left(\vec{x}\right)+aT\left(\vec{y}\right)\right\rangle + \\
+\left\langle T\left(\vec{x}\right)+aT\left(\vec{y}\right),T\left(\vec{x}\right)+aT\left(\vec{y}\right)\right\rangle = \\
=\left\langle T\left(\vec{x}+a\vec{y}\right),T\left(\vec{x}+a\vec{y}\right)\right\rangle - \\
-2\left[\left\langle T\left(\vec{x}+a\vec{y}\right),T\left(\vec{x}\right)\right\rangle + a\left\langle T\left(\vec{x}+a\vec{y}\right),T\left(\vec{y}\right)\right\rangle\right] + \\
+\left\langle T\left(\vec{x}\right),T\left(\vec{x}\right)\right\rangle + 2a\left\langle T\left(\vec{x}\right),T\left(\vec{y}\right)\right\rangle + a^{2}\left\langle T\left(\vec{y}\right),T\left(\vec{y}\right)\right\rangle = \\
=\left\langle \left(\vec{x}+a\vec{y}\right),\left(\vec{x}+a\vec{y}\right)\right\rangle - \\
-2\left[\left\langle \left(\vec{x}+a\vec{y}\right),\left(\vec{x}\right)\right\rangle + a\left\langle \left(\vec{x}+a\vec{y}\right),\left(\vec{y}\right)\right\rangle\right] + \\
+\left\langle \left(\vec{x}\right),\left(\vec{x}\right)\right\rangle + 2a\left\langle \left(\vec{x}\right),\left(\vec{y}\right)\right\rangle + a^{2}\left\langle \left(\vec{y}\right),\left(\vec{y}\right)\right\rangle = \\
=\left\langle \left(a\vec{y}\right),\left(\vec{x}+a\vec{y}\right)\right\rangle + \left\langle \left(\vec{x}\right),\left(\vec{x}+a\vec{y}\right)\right\rangle - \\
-2\left[\left\langle \vec{x},\vec{x}\right\rangle + a\left\langle \vec{y},\vec{x}\right\rangle + a\left\langle \left(\vec{x}\right),\left(\vec{y}\right)\right\rangle + aa\left\langle \vec{y},\left(\vec{y}\right)\right\rangle\right] + \\
+\left\langle \left(\vec{x}\right),\left(\vec{x}\right)\right\rangle + 2a\left\langle \left(\vec{x}\right),\left(\vec{y}\right)\right\rangle + a^{2}\left\langle \left(\vec{y}\right),\left(\vec{y}\right)\right\rangle = \\
=\underline{aa\left\langle \vec{y},\vec{y}\right\rangle} + \underline{\underline{a\left\langle \vec{y},\vec{x}\right\rangle}} + \underline{\underline{a\left\langle \vec{x},\vec{y}\right\rangle}} + \underbrace{\left\langle \vec{x},\vec{x}\right\rangle} - \\
-2\left[\underbrace{\left\langle \vec{x},\vec{x}\right\rangle} + \underline{\underline{a\left\langle \vec{y},\vec{x}\right\rangle + a\left\langle \vec{x},\vec{y}\right\rangle}} + \underline{aa\left\langle \vec{y},\vec{y}\right\rangle}\right] + \\
+\underbrace{\left\langle \vec{x},\vec{x}\right\rangle} + \underline{\underline{2a\left\langle \vec{x},\vec{y}\right\rangle}} + \underline{a^{2}\left\langle \vec{y},\vec{y}\right\rangle} = 0.
\end{gathered}
$$

2. Ahora, tenemos que T es un operador ortogonal y de

$$T\left(\vec{x}\right)=f\left(\vec{x}\right)-f\left(\vec{0}\right),$$

tenemos que $f\left(\vec{x}\right)=T\left(\vec{x}\right)+f\left(\vec{0}\right)$, por lo que

$$f=\left(\_+f\left(\vec{0}\right)\right)\circ T.$$

3. Ya hemos visto que
$$[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
o
$$[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$
Por lo tanto
$$f = \left(\_ + f\left(\vec{0}\right)\right) \circ \left[\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \_.\right]$$
o
$$f = \left(\_ + f\left(\vec{0}\right)\right) \circ \left[\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \_.\right] =$$
Resolviendo,
$$\left[\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \_.\right]$$
tenemos que
$$X = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$
$$f = \left(\_ + f\left(\vec{0}\right)\right) \circ \left[\left[\begin{pmatrix} -\cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \_.\right] =$$
$$f = \left(\_ + f\left(\vec{0}\right)\right) \circ \left[\left[\begin{pmatrix} \cos(\theta+\pi) & -\operatorname{sen}(\theta+\pi) \\ \operatorname{sen}(\theta+\pi) & \cos(\theta+\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \_.\right].$$
Pues $\operatorname{sen}(\theta+\pi) = -\operatorname{sen}(\theta)$ y $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$.
En resumen:
$$f = \left(\_ + f\left(\vec{0}\right)\right) \circ \left[\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \_.\right]$$
ó
$$f = \left(\_ + f\left(\vec{0}\right)\right) \circ \left[\left[\begin{pmatrix} \cos(\theta+\pi) & -\operatorname{sen}(\theta+\pi) \\ \operatorname{sen}(\theta+\pi) & \cos(\theta+\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \_.\right]$$
Es decir, tenemos una rotación seguida de una traslación o una reflexión seguida de una rotación, seguida de una traslación. ∎

Ejercicio 152 *Dar un ejemplo de un operador ortogonal que no sea ni reflexión ni rotación.*

Regresaremos después a estudiar con más detalle el producto interior, cuando dispongamos de la Teoría de los subespacios T-invariantes, de los conceptos de vector y valor propios, además de la Teoría acerca de las formas canónicas para un operador.

Capítulo 6

Determinantes

6.1. Funciones n-lineales

Observación 59 *Recuérdese que* $T : F^n \to F$ *es lineal sii* $\exists a_1, ..., a_n \in F$ *tales que*

$$T(x_1, ..., x_n) = a_1 x_1 + ... + a_n x_n.$$

Definición 80 *Una función* $\delta : M_{m\times n}(F) \to F$ *es* $n-$*lineal si*

$$\forall A \in M_{m\times n}(F), \forall j \in \{1, ..., n,\} \text{ la siguiente función es lineal}$$

$$\begin{array}{rccc} \delta_j^A : & F^n & \to & F \\ & \vec{x} & \mapsto & \begin{pmatrix} A_{\underline{1}} \\ \vdots \\ A_{\underline{j-1}} \\ \vec{x} \\ A_{\underline{j+1}} \\ \vdots \\ A_{\underline{n}} \end{pmatrix} \end{array}$$

donde $A_{\underline{i}}$ *denota el* $i-$*ésimo renglón de* A.

Ejemplo 86 $\delta : M_{m\times n}(F) \to F$ *con*

$$\delta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

es $2-$*lineal ya que para* $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(F)$,

$$\delta_1^A(x,y)=\delta\begin{pmatrix} x & y \\ c & d \end{pmatrix}=dx-cy,$$

que es una función lineal, en vista de la Observación anterior y

$$\delta_2^A(x,y)=\delta\begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}=-bx+ay,$$

que también es lineal.

Ejemplo 87 $\hat{0}: M_{n\times m}(F)\rightarrow F$ *es* $n-$*lineal, ya que si* $A\in M_{m\times n}(F)$*, se cumple que*

$$\hat{0}_j^A : F^n \rightarrow F = \hat{0} : F^n \rightarrow F$$

pues

$$\hat{0}_j^A(\vec{x})=\hat{0}\left(\begin{pmatrix} A_{\underline{1}} \\ \vdots \\ \vec{x} \\ \vdots \\ A_{\underline{n}} \end{pmatrix}\right)=0.$$

Ejemplo 88 $\Delta : M_{m\times n}(F)\rightarrow F$ *con* $\Delta(A)=\prod_{k=1}^{n}A_{k,1}$ *es* $n-$*lineal ya que si* $A\in M_{m\times n}(F)$*, entonces*

$$\Delta_j^A(\vec{x})=\Delta\left(\begin{pmatrix} A_{\underline{1}} \\ \vdots \\ A_{\underline{j-1}} \\ \vec{x} \\ A_{\underline{j+1}} \\ \vdots \\ A_{\underline{n}} \end{pmatrix}\right)=\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}A_{k,1}\right)\cdot x_1,$$

que lineal por la Observación 59.

Teorema 81 *El conjunto de funciones* $n-$*lineales es un subespacio de*

$$F^{M_{n\times n}(F)}$$

el espacio vectorial de las funciones de $M_{n\times n}(F)$ *a* F.

Demostración. Ya hemos observado que la función constante $\hat{0} : M_{n\times n}(F) \to F$ es $n-$lineal.

Veamos ahora que la suma de dos funciones $n-$lineales es $n-$lineal:

Supongamos que

$$\delta, \lambda : M_{n\times n}(F) \rightrightarrows F$$

son dos funciones $n-$lineales. Tomemos una matriz $A \in M_{n\times n}(F)$ y escojamos una j en $\{1, 2, ..., n\}$.

Queremos demostrar que

$$(\delta + \lambda)_A^j : F^n \to F$$

es lineal.

Ahora,

$$\begin{array}{rccc} (\delta+\lambda)_A^j : & F^n & \to & F \\ & \vec{x} & \mapsto & (\delta+\lambda)\begin{pmatrix} A^{\underline{1}} & \cdots & A^{\underline{j-1}} & \vec{x} & A^{\underline{j+1}} & \cdots & A^{\underline{n}} \end{pmatrix} \end{array},$$

y

$$(\delta+\lambda)\begin{pmatrix} A^{\underline{1}} & \cdots & A^{\underline{j-1}} & \vec{x} & A^{\underline{j+1}} & \cdots & A^{\underline{n}} \end{pmatrix} =$$

$$= (\delta+\lambda)_A^j(\vec{x}) = \delta\begin{pmatrix} A^{\underline{1}} & \cdots & A^{\underline{j-1}} & \vec{x} & A^{\underline{j+1}} & \cdots & A^{\underline{n}} \end{pmatrix} +$$

$$+\lambda\begin{pmatrix} A^{\underline{1}} & \cdots & A^{\underline{j-1}} & \vec{x} & A^{\underline{j+1}} & \cdots & A^{\underline{n}} \end{pmatrix} =$$

$$= \delta_A^j(\vec{x}) + \lambda_A^j(\vec{x}) = \left(\delta_A^j + \lambda_A^j\right)(\vec{x}).$$

Por lo tanto $(\delta+\lambda)_A^j = \delta_A^j + \lambda_A^j$,así que es lineal por ser la suma de dos funciones lineales.

Por último, si δ es una función $n-$lineal y $c \in F$, entonces $c\delta$ también es $n-$lineal:

$$(c\delta)_A^j\,\delta(\vec{x}) = (c\delta)\begin{pmatrix} A^{\underline{1}} & \cdots & A^{\underline{j-1}} & \vec{x} & A^{\underline{j+1}} & \cdots & A^{\underline{n}} \end{pmatrix} =$$

$$= c\left(\delta\begin{pmatrix} A^{\underline{1}} & \cdots & A^{\underline{j-1}} & \vec{x} & A^{\underline{j+1}} & \cdots & A^{\underline{n}} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= c\left(\delta_A^j(\vec{x})\right) = \left(c\delta_A^j\right)(\vec{x})$$

Por lo tanto $(c\delta)_A^j = \left(c\delta_A^j\right) = (c \cdot \_) \circ \delta_A^j$, que es lineal por ser la composición de la funciones lineales $\delta_A^j : F^n \to F$ y $(c \cdot \_) : F \to F$. ■

Una manera alternativa de enunciar el último Teorema es afirmando que las combinaciones lineales de funciones $n-$lineales son $n-$lineales.

Definición 81 *Sea $\delta : M_{m\times n}(F) \to F$ $\underline{n-lineal}$, δ es "alternante" si*

$$\delta\begin{pmatrix} \vdots \\ A_{\underline{i}} \\ A_{\underline{i+1}} = A_{\underline{i}} \\ \vdots \end{pmatrix} = 0,$$

es decir, si la función δ aplicada a una matriz con dos renglones consecutivos iguales es cero.

Ejemplo 89 $\det : M_{2\times 2}(F) \to F$ *definida por* $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$, *es alternante.*

Ejercicio 153 *Demostrar que el conjunto de funciones alternantes de*

$$M_{n\times n}(F) \to F$$

es un subespacio de $F^{M_{n\times n}(F)}$.

Definición 82 *Un determinante de orden n es una función*

$$\delta : M_{n\times n}(F) \to F$$

que es $n-$lineal alternante, y tal que

$$\delta(I_n) = \delta\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Observación 60 *La función del Ejemplo 89,* $\det : M_{2\times 2}(F) \to F$ *es un determinante.*

Demostración. Resta sólo observar que

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Permutaciones ■

6.1.1. Factorización única como producto de ciclos

Definición 83 *Denotemos por* S_n *al conjunto de permutaciones de* $\{1,...,n\}$. *Sea* $\alpha \in S_n$, *definimos la relación* $\blacktriangleleft_\alpha$ *en* $\{1,..,n\}$ *por*

$$i \blacktriangleleft_\alpha j \text{ si } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } i = \alpha^k(j).$$

Observación 61 $\blacktriangleleft_\alpha$ *es una relación de equivalencia en* $\{1,...,n\}$.

Demostración. Reflexividad) $i \blacktriangleleft_\alpha i$ pues $i = Id_{\{1,...,n\}}(i) = \alpha^0(i)$.
Simetría) $i \blacktriangleleft_\alpha j \Rightarrow i = \alpha^k(j)$, para alguna $k \in \mathbb{Z}$. Aplicando α^{-k}, obtenemos

$$\alpha^{-k}(i) = \alpha^{-k}\left(\alpha^k(j)\right) = \alpha^0(j) = j,$$

por lo que $j \blacktriangleleft_\alpha i$.
Transitividad)

$$(i \blacktriangleleft_\alpha j,\ j \blacktriangleleft_\alpha m) \Rightarrow \left(i = \alpha^k(j), j = \alpha^l(m), \text{ para algunas } k, l \in \mathbb{Z}\right).$$

Entonces

$$i = \alpha^k(j) = \alpha^k\left(\alpha^l(m)\right) = \alpha^{k+l}(m),$$

por lo que $i \blacktriangleleft_\alpha m$. ■

Notación 9 *Si* $\sigma \in S_n$, *escribiremos* σ *de la siguiente forma:*

$$\sigma = \underbrace{\left(1, \sigma(1), \sigma^2(1), ..., \sigma^{k_1}(1)\right)}_{ciclo} \circ \left(r, \sigma(r), \sigma^2(r), ..., \sigma^{k_r}(r)\right) \circ ...$$

en esta notación, estamos suponiendo que

$$\sigma\left(\sigma^{k_1}(1)\right) = 1,$$

y que k_1 *es el menor natural* s *tal que* $\sigma^{s+1}(1) = 1$. *También estamos suponiendo que* $\sigma\left(\sigma^{k_r}(r)\right) = r$ *y que* k_r *es el natural menor con esa propiedad. Desde luego,* σ *podría ser un solo* $n-$*ciclo:*

$$(1, 2, 3, 4) \in S_4$$

es la permutación que manda 1 *a* 2, 2 *a* 3, 3 *a* 4 *y* 4 *a* 1.

Ejemplo 90 1. *Sea*

$$\begin{array}{ccc} \sigma \in S_5 & \text{tal que} & \\ 1 & \overset{\sigma}{\longmapsto} & 2 \\ 2 & \overset{\sigma}{\longmapsto} & 1 \\ 3 & \overset{\sigma}{\longmapsto} & 4 \\ 4 & \overset{\sigma}{\longmapsto} & 5 \\ 5 & \overset{\sigma}{\longmapsto} & 3 \end{array},$$

entonces

$$\sigma = (1, 2)(3, 4, 5).$$

2. *Sea*

$$\begin{array}{ccc} \sigma \in S_4 & \text{tal que} & \\ 1 & \overset{\sigma}{\longmapsto} & 2 \\ 2 & \overset{\sigma}{\longmapsto} & 3 \\ 3 & \overset{\sigma}{\longmapsto} & 1 \\ 4 & \overset{\sigma}{\longmapsto} & 4 \end{array},$$

entonces

$$\sigma = (1, 2, 3)(4).$$

3. *La permutación*

$$(1, 2, 3)(5, 8)(6, 12) \in S_{12}$$

hace lo siguiente

$$\begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 3 \\ 3 & \mapsto & 1 \\ 4 & \mapsto & 4 \\ 5 & \mapsto & 8 \\ 6 & \mapsto & 12 \\ 7 & \mapsto & 7 \\ 8 & \mapsto & 5 \\ 9 & \mapsto & 9 \\ 10 & \mapsto & 10 \\ 11 & \mapsto & 11 \\ 12 & \mapsto & 6 \end{array}.$$

Notación 10 *Si* $\sigma \in S_n$ *y*

$$\sigma = \left(1, \sigma(1), \sigma^2(1), ..., \sigma^{k_1}(1)\right) \circ ... \circ (j) \circ ...$$

es decir si $\sigma(j) = j$, *omitiremos escribir el ciclo* (j). *Por ejemplo, en el ejemplo* 2) *anterior, en lugar de escribir* $(1,2,3)(4)$, *escribiremos*

$$(1,2,3)$$

simplemente. Un ciclo de la forma (j), *se llama un ciclo trivial.*

Proposición 8 *Si* $f : X \to X$ *es una función biyectiva tal que* $f(x) = x$, *entonces*

$$f^m(x) = x, \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. 1) Si $m = 0$, entonces $f^m(x) = f^0(x) = id_X(x) = x$.
Supongamos ahora que

$$f^m(x) = x,$$

entonces $f^{m+1}(x) = f(f^m(x)) = f(x) = x$.
Con lo anterior, tenemos que

$$f^m(x) = x, \forall m \in \mathbb{N}.$$

2)Si $f(x) = x$, entonces

$$x = id_X(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x).$$

Entonces

$$\left(f^{-1}\right)^m(x) = x, \forall m \in \mathbb{N},$$

por el inciso anterior.
Por lo tanto

$$f^{-m}(x) = \left(f^{-1}\right)^m(x) = x, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Combinando las conclusiones de este inciso y del anterior, tenemos que

$$f^m(x) = x, \forall m \in \mathbb{Z}.$$

■

Observación 62 *En vista de la Observación 61, tenemos que* $\{1, ..., n\}$*se parte en clases de equivalencia, respecto a la relación* $\blacktriangleleft_\alpha$. *Es claro que la clase de equivalencia de* i *es*

$$[i]_{\blacktriangleleft_\alpha} = \{\alpha^m(i) \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

Observación 63

$$[i]_{\blacktriangleleft_\alpha} = \{\alpha^m(i) \mid 0 \leqslant m \leqslant l, \; p.\ a.\ l \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración. $\supseteq$) Claro.
$\subseteq$) La función

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \{1,..,n\} \\ m & \mapsto & \alpha^m(i) \end{array}$$

no es inyectiva ($\{1,..,n\}$ es finito). Por lo tanto, existe $k \neq l$, tales que $\alpha^k(i) = \alpha^l(i)$.

Tomemos $k \in \mathbb{N}$, mínimo con la propiedad anterior. Si $k > 0$ entonces $\alpha^k(i) = \alpha^l(i)$, con $l > k > 0$,así que de

$$\alpha \circ \alpha^{k-1}(i) = \alpha^{1+k-1}(i) = \alpha^k(i) = \alpha^l(i) = \alpha^{1+l-1}(i) = \alpha \circ \alpha^{l-1}(i)$$

y del hecho de que α es inyectiva, obtenemos

$$\alpha^{k-1}(i) = \alpha^{l-1}(i),$$

contradiciendo la elección de k.

Así tenemos que $k = 0$ y por lo tanto

$$i = \alpha^0(i) = \alpha^l(i),$$

para alguna $l > 0$, que podemos suponer mínima con esta propiedad.

Dada $z \in \mathbb{Z}$, aplicando el algoritmo de la división con l,

$$\begin{array}{rl} & q \\ l & \overline{\big| \; z} \\ & r \quad 0 \leqslant r < l \end{array},$$

así que

$$\begin{aligned} \alpha^z(i) &= \alpha^{ql+r}(i) = \alpha^{r+ql}(i) = \\ &= \alpha^r\left(\alpha^{lq}(i)\right) = \alpha^r\left(\left(\left(\alpha^l\right)^q\right)(i)\right) = \\ &= \alpha^r(i). \end{aligned}$$

En el último paso hemos usado la proposición 8. Pues $\alpha^l(i) = i$ implica que $\left(\left(\alpha^l\right)^q\right)(i) = i$. ∎

Definición 84 *$\alpha \in S_n$, es ajena con $\beta \in S_n$ si lo que mueve α lo fija β.*

Ejemplo 91 $(1,2,3)$ *es ajena con* $(5,7)(4,9)$ *en* S_{10}*, pues los elementos movidos por* $(1,2,3)$, *1,2,3, son fijados por* $(5,7)(4,9)$.

Observación 64 $\alpha \in S_n$*, es ajena con* $\beta \in S_n$ *si y sólo si* β *es ajena con* α.

Demostración. Supongamos que α es ajena con β. Sea $i \in \{1,..,n\}$ tal que $\beta(i) \neq i$. Es claro que entonces $\alpha(i) = i$, pues si $\alpha(i) \neq i$, entonces $\beta(i) = i \underset{\circ}{\nabla}$. ■

Observación 65 *Si* $\alpha, \beta \in S_n$ *son permutaciones ajenas, entonces*

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha.$$

Demostración. Tomemos $i \in \{1,...,n\}$. Consideremos los siguientes casos:

1) i es movido por α (simétrico con el caso de que i sea movido por β).

2) i es fijado por α y β. (Notemos que i no puede ser movido por α y β a la vez puesto que α y β son ajenas).

En el primero de los casos, i es fijado por β. Así que

$$(\alpha \circ \beta)(i) = \alpha(\beta(i)) = \alpha(i),$$

mientras que $(\beta \circ \alpha)(i) = \beta(\alpha(i)) = \alpha(i)$. Esto se debe a que $\alpha(i)$ es un elemento movido por α :

$$\alpha(\alpha(i)) = \alpha(i) \Rightarrow \alpha(i) = i \underset{\circ}{\nabla}.$$

En el segundo caso,

$$(\alpha \circ \beta)(i) = \alpha(\beta(i)) = \alpha(i) = i$$

y también

$$(\beta \circ \alpha)(i) = \beta(\alpha(i)) = \beta(i) = i.$$

Entonces $\forall i \in \{1,...,n\}$ se tiene que $(\alpha \circ \beta)(i) = (\beta \circ \alpha)(i)$. Por lo tanto $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.
■

Teorema 82 *Toda permutación* $Id \neq \alpha \in S_n$*, se puede factorizar como producto de ciclos ajenos no triviales, de manera única, excepto por el orden de los factores.*

Demostración. Por inducción sobre el número de puntos movidos por α.

Base. Si α mueve cero elementos, es porque $\alpha = Id$, en este caso convenimos en que α es producto vacío de ciclos no triviales.

Paso inductivo. Supongamos que α mueve $k > 1$ elementos , y la afirmación cierta para permutaciones que mueven menos de k elementos.

Tomemos un elemento x movido por α, y formemos el ciclo

$$\gamma = \left(x, \alpha\left(x\right), \alpha^2\left(x\right), ..., \alpha^s\left(x\right)\right),$$

donde $\alpha^{s+1}\left(x\right) = x$.

Ahora $\gamma^{-1} \circ \alpha$ fija todos los elementos $x, \alpha\left(x\right), \alpha^2\left(x\right), ..., \alpha^s\left(x\right)$, es decir que mueve menos puntos que α. Pues si v es un punto movido por $\gamma^{-1} \circ \alpha$, entonces $v \neq \left(\gamma^{-1} \circ \alpha\right)\left(v\right)$. Así que $\alpha\left(v\right) \notin \left\{x, \alpha\left(x\right), \alpha^2\left(x\right), ..., \alpha^s\left(x\right)\right\}$, por lo que $v \neq \left(\gamma^{-1} \circ \alpha\right)\left(v\right) = \alpha\left(v\right)$, de donde tenemos que $v$es movido por α.

Por hipótesis de induccción, tenemos que $\gamma^{-1} \circ \alpha = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ ... \circ \gamma_m$ un producto de ciclos no triviales ajenos dos a dos y que no mueven puntos de
$\{x, \alpha(x), \alpha^2(x), ..., \alpha^s(x)\}$. Por lo tanto

$$\alpha = \gamma \circ \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ ... \circ \gamma_m$$

es una factorización en ciclos no triviales ajenos dos a dos.

Unicidad. Supongamos que

$$\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ ... \circ \gamma_m = \beta_1 \circ \beta_2 \circ ... \circ \beta_s$$

son dos factorizaciones en ciclos no triviales de α.

Demostremos que ambas factorizaciones son iguales, por inducción sobre m.

Base. Si $m = 1$, entonces $\alpha = \gamma_1$ y entonces las clases de equivalencia de $\blacktriangleleft_\alpha$ son todas triviales excepto por la clase de los elementos movidos por γ_1. Esto demuestra que $s = 1$, pues elementos en distintos ciclos β_i, no estarían en la misma clase de equivalencia y serían movidos por α. Pero entonces tendríamos que

$$\gamma_1 = \beta_1.$$

Paso inductivo. Supongamos que $m > 1$. Tomemos un elemento movido por γ_1, digamos w, entonces $\gamma_1 = \left(w, \alpha\left(w\right), \alpha^2\left(w\right), ...\right)$.

Como w es movido por α, entonces α debe ser movido por alguna β_j, y podemos suponer, sin perder generalidad que $j = 1$(las β_i conmutan entre sí).

Como antes, $\beta_1 = \left(w, \alpha\left(w\right), \alpha^2\left(w\right), ...\right)$, así que en

$$\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ ... \circ \gamma_m = \beta_1 \circ \beta_2 \circ ... \circ \beta_s$$

podemos cancelar γ_1 con β_1. De donde

$$\gamma_2 \circ ... \circ \gamma_m = \beta_2 \circ ... \circ \beta_s$$

Podemos aplicar la hipótesis de inducción para concluir la demostración. $\blacksquare$

6.1.2. Estructura cíclica y signo de una permutación

Sea γ un ciclo, definimos la longitud del ciclo como el número de elementos movidos por él. Una trasposición es un ciclo de longitud dos, por ejemplo $(1,2)$.

Definición 85 *Sea $(1) \neq \alpha \in S_n$, definimos la estructura cíclica de α es la sucesión*

$$\ell(\gamma_1), \ell(\gamma_2), ..., \ell(\gamma_k),$$

donde

$$\alpha = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ ... \circ \gamma_k$$

es una factorización en ciclos ajenos dos a dos no triviales y tal que

$$\ell(\gamma_1) \leqslant \ell(\gamma_2) \leqslant ... \leqslant \ell(\gamma_k),$$

Ejemplos 92 *1. La estructura cíclica de $(1,2,3)(4,5)(7,8,9,10)$ es*

$$2,3,4$$

2. La estructura cíclica de $(1,2)$ es 2.

Lema 6 *Si γ es un ciclo en S_n y α es una permutación en S_n, entonces $\alpha \circ \gamma \circ \alpha^{-1}$ es un ciclo de la misma longitud que γ.*

Demostración. Notemos que si $\gamma(i) = j$ entonces $\alpha \circ \gamma \circ \alpha^{-1}(\alpha(i)) = \alpha \circ \gamma(i) = \alpha(j)$. En símbolos:

$$i \overset{\gamma}{\mapsto} j \;\Rightarrow\; \alpha(i) \overset{\alpha\circ\gamma\circ\alpha^{-1}}{\longmapsto} \alpha(j)$$

En particular, k es un punto fijo de $\gamma \iff \alpha(k)$ es un punto fijo de $\alpha \circ \gamma \circ \alpha^{-1}$y además $(\alpha(i), \alpha^2(i), \alpha^3(i), ...)$ es un ciclo de $\alpha \circ \gamma \circ \alpha^{-1}$.

Por lo que si $\gamma = (i_1, i_2, ...)$ entonces

$$\alpha \circ \gamma \circ \alpha^{-1} = (\alpha(i_1), \alpha(i_2), \alpha(i_3), ...).$$

■

Observación 66 *Si γ y λ son ciclos de la misma longitud en S_n entonces $\exists \alpha \in S_n$, tal que $\alpha \circ \gamma \circ \alpha^{-1} = \lambda$.*

Demostración. Escribamos $\lambda = (i_1, i_2, .., i_k)$ y $\gamma = (j_1, j_2, .., j_k)$. Para encontrar una permutación α con la propiedad deseada, notemos que como

$$\alpha \circ \gamma \circ \alpha^{-1} = (\alpha(j_1), \alpha(j_2), \alpha(j_3), ...)$$

basta que hagamos $\alpha(j_1) = i_1, \alpha(j_2) = i_2$, como en el diagrama

$$\begin{array}{cccc} (j_1, & j_2, & ... & , j_k) \\ {}^{\alpha}\downarrow & {}^{\alpha}\downarrow & ... & {}^{\alpha}\downarrow \\ (i_1, & i_2, & ... & , i_k) \end{array},$$

completamos la definición de α dando cualquier biyección entre

$$\{1, ..., n\} \setminus \{j_1, ..., j_k\} \text{ y } \{1, ..., n\} \setminus \{i_1, ..., i_k\}.$$

■

Definición 86 *Se dice que λ y γ son conjugadas en S_n si $\exists \alpha \in S_n$ tal que $\alpha \circ \gamma \circ \alpha^{-1} = \lambda$.*

Ejercicio 154 *Demostrar que la relación de conjugación es una relación de equivalencia en S_n.*

Ejemplo 93 $(1, 2, 3, 4, 5)$ *y* $(8, 6, 3, 1, 2)$ *son conjugadas en S_{10}:*
Hagamos la siguiente asignación:

$$\begin{array}{cccccccccc} (1 & 2 & 3 & 4 & 5) & (6) & (7) & (8) & (9) & (10) \\ {}^{\alpha}\downarrow & {}^{\alpha}\downarrow & {}^{\alpha}\downarrow & {}^{\alpha}\downarrow & {}^{\alpha}\downarrow & {}^{\alpha}\downarrow & {}^{\alpha}\downarrow & {}^{\alpha}\downarrow & {}^{\alpha}\downarrow & {}^{\alpha}\downarrow \\ (8 & 6 & 3 & 1 & 2) & (4) & (5) & (7) & (9) & (10) \end{array}$$

Teorema 83 *Dos permutaciones en S_n son conjugadas si y sólo si tienen la misma estructura cíclica.*

Demostración. $\Leftarrow$) Supongamos que $\gamma_1 \gamma_2 ... \gamma_k$ y $\beta_1 \beta_2 ... \beta_k$ son dos productos en ciclos ajenos dos a dos que tienen la misma estructura cíclica. Así, podemos suponer que $\ell(\gamma_i) = \ell(\beta_i)$. Para fijar mejor nuestra atención, tomemos

$$\gamma_i = (a_{1,i}, a_{2,i} ...., a_{l_i,i})$$

y

$$\beta_i = (b_{1,i}, b_{2,i} .... b_{l_i,i})$$

Definamos ahora $\alpha \in S_n$ de tal manera que

$$\begin{array}{cccc} a_{1,i}, & a_{2,i} & \cdots & a_{l_i,i} \\ {}^{\alpha}\downarrow & {}^{\alpha}\downarrow & \cdots & {}^{\alpha}\downarrow \\ b_{1,i}, & b_{2,i} & \cdots & b_{l_i,i} \end{array} \quad \forall i \in \{1,...,k\}$$

Es decir que $\alpha(a_{h,i}) = b_{h,i}$. Completamos la definición de α por medio de cualquier biyección entre

$$\{1,...,n\} \setminus \left(\bigcup_i \{a_{h,i}\}_{h \in \{1,...,l_i\}} \right) \text{ y } \{1,...,n\} \setminus \left(\bigcup_i \{b_{h,i}\}_{h \in \{1,...,l_i\}} \right).$$

Entonces es claro, como en la Observación 66 que $\alpha \gamma_i \alpha^{-1} = \beta_i$.

Entonces

$$\alpha (\gamma_1 \gamma_2 ... \gamma_k) \alpha^{-1} = \left(\alpha \gamma_1 \alpha^{-1}\right) \left(\alpha \gamma_2 \alpha^{-1}\right) \alpha ... \alpha^{-1} \left(\alpha \gamma_k \alpha^{-1}\right) = \beta_1 \beta_2 ... \beta_k$$

$\Rightarrow$) Es claro que si $\gamma_1 \gamma_2 ... \gamma_k$ es un producto de ciclos ajenos entonces para cada α se tiene que $(\alpha \gamma_1 \alpha^{-1})(\alpha \gamma_2 \alpha^{-1}) \alpha ... \alpha^{-1} (\alpha \gamma_k \alpha^{-1})$ también es un producto de ciclos ajenos:

$$(\text{Los símbolos } u \text{ y } v \text{ están ambos en el ciclo } \gamma_i)$$

$\Leftrightarrow$

$$\left(\gamma_i^z (u) = v \text{ para alguna } z \in \mathbb{Z}\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\alpha (v) = \alpha (\gamma_i^z (u)) = \alpha \gamma_i^z \alpha^{-1} (\alpha (u)) = \left(\alpha \gamma_i \alpha^{-1}\right)^z (\alpha (u))$$

$\Leftrightarrow$

$$\alpha (v) \text{ y } \alpha (u) \text{ están ambos en el ciclo } \alpha \gamma_i \alpha^{-1}.$$

■

Definición 87 *Se define*

$$sig : S_n \to \{1, -1\}$$

por:

$$sig(\alpha) = \prod_{\substack{\gamma_i \\ \gamma_i \text{ ciclo de la factorización} \\ \text{en ciclos ajenos de } \alpha}} (-1)^{\ell(\gamma_i)-1}$$

Ejemplos 94 *1.* $sig((1,2)) = (-1)^{\ell((1,2))-1} = (-1)^{2-1} = -1.$

2. *sig* $((1)) = \prod_{\gamma_i \in \emptyset} (-1)^{\ell(\gamma_i)-1} = 1$. *Pues* (1) *es la permutación identidad, que no tiene ciclos no triviales en su factorización. Por otro lado, el producto vacío se define como* 1.

Se suele llamar permutaciones pares a las permutaciones con signo 1 e impares a las permutaciones con signo -1.

Nota 2 *La función sig está bien definida en virtud del teorema de factorización única.*

Lema 7 *Si* $\alpha \in S_n$ *y* $\tau = (j,k)$ *es una transposición en* S_n. *Entonces*

$$sig\,(\alpha\tau) = -sig\,(\alpha) = sig\,(\tau\alpha)$$

Demostración. Si α es la identidad, la afirmación se sigue de que el signo de la identidad es 1, mientras que el signo de una transposición es -1.

Si α no es la identidad, factoricemos αcomo producto de ciclos ajenos no triviales, digamos que

$$\alpha = \gamma_1\gamma_2 ... \gamma_k$$

Supongamos que $\tau = (i,j)$.

Consideremos tres casos:

i) τ ajena con α.

ii) Los elementos que mueve τ, i,j son movidos por un mismo ciclo γ_k.

iii) i y j son movidos por distintos ciclos en $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k\}$.

Caso i) Es claro que aquí la factorización en ciclos ajenos de $\alpha\tau$ es

$$\gamma_1\gamma_2 ... \gamma_k\tau$$

Así que

$$sig\,(\gamma_1\gamma_2 ... \gamma_k\tau) = \left(\prod_{\gamma_i} (-1)^{\ell(\gamma_i)-1}\right)(-1)^{\ell(\tau)-1} =$$

$$= \left(\prod_{\gamma_i} (-1)^{\ell(\gamma_i)-1}\right)(-1)^1 = -sig\,(\gamma_1\gamma_2 ... \gamma_k)\,.$$

Caso ii) Supongamos que i,j son movidos por γ_k, digamos que

$$\gamma_k = (i = i_1, i_2, ..., i_m = j, ..., i_s)\,,$$

así que $sig(\gamma_k) = (-1)^{s-1}$.

Entonces
$$\gamma_k \tau = (i, i_{m+1}, ..., i_s)(j, i_2, i_3, ..., i_{m-1})$$
es el producto de dos ciclos ajenos, de longitudes $s-m+1$ y $m-1$ respectivamente. Luego
$$sig(\gamma_k \tau) = (-1)^{s-m}(-1)^{m-2} = (-1)^{s-2} = (-1)(-1)^s = (-1)\, sig(\gamma_k).$$
Entonces
$$sig(\alpha\tau) = (-1)\, sig(\alpha).$$
Caso iii) Supongamos, sin perder generalidad, que
$$\gamma_1 = (i = i_1, i_2, ..., i_k)$$
$$\gamma_2 = (j = j_1, j_2, ..., j_r)$$
De tal manera que $sig(\gamma_1) = (-1)^{k-1}$ y $sig(\gamma_2) = (-1)^{r-1}$, y por lo tanto
$$sig(\gamma_1\gamma_2) = (-1)^{k+r} = (-1)^{k+r-2}.$$
Por otra parte,
$$\gamma_1\gamma_2\tau = (i, j_2, ..., j_r, j, i_2, ..., i_k)$$
un ciclo de longitud $r+k$, por lo que
$$sig(\gamma_1\gamma_2\tau) = (-1)^{r+k-1} = (-1)(-1)^{k+r-2} = -sig(\gamma_1\gamma_2).$$
Por lo tanto
$$sig(\alpha\tau) = (-1)\, sig(\alpha).$$

■

Observación 67 *Toda permutación $\alpha \in S_n$ $(n \geq 2)$ se puede escribir como producto de transposiciones.*

Demostración. La permutación identidad (1) es tal que
$$(1) = (1,2)(1,2).$$

Como toda permutación que no sea la identidad puede factorizarse como producto de ciclos ajenos no triviales, basta ver que todo ciclo no trivial se puede escribir como producto de transposiciones.

Sea $\gamma = (i_1, i_2, ..., i_k)$ consideremos

$$(i_1, i_k) \, ... \, (i_1, i_3) \, (i_1, i_2)$$

es fácil comprobar que

$$\gamma = (i_1, i_k) \, ... \, (i_1, i_3) \, (i_1, i_2) \, .$$

■

Corolario 15 *Una permutación $\alpha \in S_n$ es par (es decir tiene signo 1) si y sólo si se puede factorizar como producto de un número par de transposiciones.*

Demostración.

$$sig\,(\tau_1\tau_2...\tau_k) = (-1)\, sig\,(\tau_1\tau_2...\tau_{k-1}) =$$

$$= (-1)\,(-1)\, sig\,(\tau_1\tau_2...\tau_{k-2}) = ... = (-1)^{k-1} sig\,(\tau_1) = (-1)^k \, .$$

■

De lo anterior es claro que aunque la factorización de una permutación como producto de ciclos ajenos no es única, sí se conserva la paridad del número de transposiciones en una factorización.

Ejemplo 95 $(1, 2, 3) = (1, 3)\,(1, 2) = (3, 4)\,(1, 3)\,(1, 4)\,(1, 2)\,.$

Observación 68 *Para cualesquiera dos permutaciones $\alpha, \beta \in S_n$, se tiene que $sig(\alpha\beta) = sig(\alpha)sig(\beta)$.*

Supongamos que $\beta = \tau_1\tau_2...\tau_k$, así que su signo es $(-1)^{k-1}$. Entonces

$$sig\,(\alpha\beta) = sig\,(\alpha\tau_1\tau_2...\tau_k) =$$

$$= (-1)\, sig\,(\alpha\tau_1\tau_2...\tau_{k-1}) = ... = (-1)^k \, sig\,(\alpha) = sig\,(\beta)\, sig\,(\alpha)\,.$$

Existencia y unicidad del determinante

Definición 88

$$\begin{array}{rccc} \det: & M_{n\times n}\,(F) & \longrightarrow & F \\ & & & \displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} sig\,(\sigma)\left(\prod_{i=1} A_{i,\sigma(i)}\right) \end{array}.$$

Lema 8 *det: $M_{n\times n}\,(F) \rightarrow F$ es $n-$lineal:*

Demostración. Como sabemos que una combinación de funciones $n-$lineales es $n-$lineal, basta demostrar que la función

$$\begin{array}{cccc} d_\sigma : & M_{n\times n}(F) & \longrightarrow & F \\ & A & \mapsto & \prod\limits_{i=1} A_{i,\sigma(i)} \end{array}$$

es $n-$lineal.

Tomemos una matriz $A \in M_{n\times n}(F)$, $k \in \{1, ..., n\}$. Queremos demostrar que la función

$$\begin{array}{cccc} (d_\sigma)_A^{\underline{n}} : & F^n & \to & F \\ & \vec{x} & \mapsto & d_\sigma\left(A^{\underline{1}}, ..., A^{\underline{k-1}}, \vec{x}, A^{\underline{k+1}}, ..., A^{\underline{n}}\right) \end{array}$$

Ahora,

$$(d_\sigma)_A^{\underline{n}}(\vec{x}) = d_\sigma\left(A^{\underline{1}}, ..., A^{\underline{k-1}}, \vec{x}, A^{\underline{k+1}}, ..., A^{\underline{n}}\right) = \left(\prod_{\sigma(i)\neq k} A_{i,\sigma(i)}\right) x_{\sigma^{-1}(k)} =$$

$$= \left(\left(\prod_{\sigma(i)\neq k} A_{i,\sigma(i)} \cdot \_\right) \circ \pi_{\sigma^{-1}(k)}\right)(\vec{x})$$

Por lo que

$$(d_\sigma)_A^{\underline{n}} = \left(\prod_{\sigma(i)\neq k} A_{i,\sigma(i)} \cdot \_\right) \circ \pi_{\sigma^{-1}(k)}$$

que es lineal por ser composición de funciones lineales.

Aquí,

$$\begin{array}{cccc} \pi_{\sigma^{-1}(k)} : & F^n & \longrightarrow & F \\ & \vec{x} & \mapsto & x_{\sigma^{-1}(k)} \end{array},$$

es proyectar la coordenada $\sigma^{-1}(k)$-ésima y

$$F \xrightarrow{\prod\limits_{\sigma(i)\neq k} A_{i,\sigma(i)} \cdot \_} F$$

es la multiplicación por $\prod\limits_{\sigma(i)\neq k} A_{i,\sigma(i)}$. ∎

Notación 11 *Denotemos por A_n el conjunto de las permutaciones pares en S_n, y denotemos B_n el conjunto de las permutaciones impares en S_n.*

Observación 69 *Si $n \geq 2$ el número de permutaciones pares coincide con el número de permutaciones impares.*

Demostración. Tomemos la transposición $\tau = (1,2)$. Entonces

$$\begin{array}{ccc} A_n & \overset{(1,2)\circ\_}{\gg\!\!\twoheadrightarrow} & B_n \\ \gamma & \mapsto & (1,2)\circ\gamma \end{array}$$

es una biyección cuya función inversa es ella misma. Por lo tanto $|A_n| = |B_n|$. ■

Observación 70 *Si $\sigma \in S_n$, entonces*

$$\prod_{i=1} A_{i,\sigma(i)} = \prod_{i=1} A_{\sigma^{-1}(i),i}.$$

Demostración. Basta notar que

$$\{(i,\sigma(i)) \mid i \in \{1,...,n\}\} = \left\{\left(\sigma^{-1}(j), j\right) \mid j \in \{1,...,n\}\right\},$$

para lo que basta notar que $j = \sigma(i) \Longleftrightarrow \sigma^{-1}(j) = i$. ■

Lema 9 *det: $M_{n\times n}(F) \to F$ es alternante:*

Demostración. Supongamos que la matriz A tiene dos columnas consecutivas iguales, digamos que $A^{\underline{k}} = A^{\underline{k+1}}$, entonces

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} sig(\sigma)\left(\prod_{i=1} A_{i,\sigma(i)}\right).$$

Entonces
$\det(A) =$

$$= \sum_{\sigma\in A_n} sig(\sigma)\left(\prod_{i=1} A_{i,\sigma(i)}\right) + \left(\sum_{\sigma\in B_n} sig(\sigma)\left(\prod_{i=1} A_{i,\sigma(i)}\right)\right).$$

Ahora, usando el hecho de que $A_n \overset{(k,k+1)\circ\_}{\gg\!\!\twoheadrightarrow} B_n$ es una biyección, podemos escribir, tomando $\tau = (k,k+1)$,
$\det(A) =$

$$= \sum_{\sigma\in A_n} sig(\sigma)\left(\prod_{i=1} A_{i,\sigma(i)}\right) + \left(\sum_{\sigma\in A_n} sig(\tau\circ\sigma)\left(\prod_{i=1} A_{i,\tau\circ\sigma(i)}\right)\right) =$$

$$= \sum_{\sigma \in A_n} sig\,(\sigma) \left(\prod_{i=1} A_{i,\sigma(i)} \right) - \left(\sum_{\sigma \in A_n} sig\,(\sigma) \left(\prod_{i=1} A_{i,\tau\circ\sigma(i)} \right) \right)$$

Consideremos ahora un producto

$$\left(\prod_{i=1} A_{i,\tau\circ\sigma(i)} \right),$$

$$\prod_{i=1} A_{i,\tau\circ\sigma(i)} = \prod_{i=1} A_{(\tau\circ\sigma)^{-1}(i),i} = \prod_{i=1} A_{(\sigma^{-1}\circ\tau^{-1})(i),i} = \prod_{i=1} A_{(\sigma^{-1}\circ\tau)(i),i} =$$

[1]

$$= \left(\prod_{i \notin \{k,k+1\}} A_{(\sigma^{-1}\circ\tau)(i),i} \right) \cdot A_{(\sigma^{-1}\circ\tau)(k),k} \cdot A_{(\sigma^{-1}\circ\tau)(k+1),k+1} =$$

$$= \left(\prod_{i \notin \{k,k+1\}} A_{(\sigma^{-1}\circ\tau)(i),i} \right) \cdot A_{(\sigma^{-1}\circ\tau)(k),k+1} \cdot A_{(\sigma^{-1}\circ\tau)(k+1),k} =$$

[2]

$$= \left(\prod_{i \notin \{k,k+1\}} A_{\sigma^{-1}(i),i} \right) \cdot A_{\sigma^{-1}(k+1),k+1} \cdot A_{\sigma^{-1}(k),k} =$$

[3]

$$= \prod_{i \in \{1,\ldots,n\}} A_{\sigma^{-1}(i),i} = \prod_{i \in \{1,\ldots,n\}} A_{i\sigma(i)}.$$

A la vista de este último cálculo, vemos que el producto

$$sig\,(\tau\circ\sigma) \left(\prod_{i=1} A_{i,\tau\circ\sigma(i)} \right)$$

se cancela con el producto

$$sig\,(\sigma) \left(\prod_{i=1} A_{i,\tau\circ\sigma(i)} \right)$$

---

[1] Es claro que $\forall \alpha, \beta \in S_n$, se tiene que $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$.
Por otra parte si τ es una transposición, entonces $\tau^{-1} = \tau$.

[2] Aquí usamos que las columnas $k-$ésima y $(k+1)-$ésima de A coinciden.

[3] Aquí evaluamos

$$\tau = (k, k+1)$$

en cada elemento.

en

$$\sum_{\sigma\in S_n} sig\left(\sigma\right)\left(\prod_{i=1} A_{i,\sigma(i)}\right)$$

por lo tanto

$$\sum_{\sigma\in S_n} sig\left(\sigma\right)\left(\prod_{i=1} A_{i,\sigma(i)}\right)=0.$$

■

Teorema 84 $\det : M_{n\times n}\left(F\right)\to F$ *es un determinante.*

Demostración. Resta ver que $\det\left(I_n\right)=1$.
En efecto, consideremos

$$\sum_{\sigma\in S_n} sig\left(\sigma\right)\left(\prod_{i=1} \left(I_n\right)_{i,\sigma(i)}\right),$$

$\prod\limits_{i=1} \left(I_n\right)_{i,\sigma(i)}$ es distinto de 0 si y sólo si cada factor es distinto de 0. Esto sucede si y sólo si $\sigma\left(i\right)=i$. Por lo que el único sumando distinto de 0 en

$$\sum_{\sigma\in S_n} sig\left(\sigma\right)\left(\prod_{i=1} \left(I_n\right)_{i,\sigma(i)}\right),$$

corresponde a $\sigma=\left(1\right)$, entonces

$$\sum_{\sigma\in S_n} sig\left(\sigma\right)\left(\prod_{i=1} \left(I_n\right)_{i,\sigma(i)}\right)=sig\left(\left(1\right)\right)\left(\prod_{i=1} \left(I_n\right)_{i,(1)(i)}\right)=1.$$

■

- Denotemos por $\mathcal{I}^{k,l}$ la operación elemental que intercambia las columnas k y l de una matriz.
- Denotemos por $\mathcal{M}^{c,k,}$ la operación elemental que multiplica por c $(c\neq 0)$ la columna k
- Denotemos por $\mathcal{S}^{c,k,l}$ la operación elemental que suma c veces la columna k a la columna l.

Lema 10 *Podemos observar el efecto en* $\det(A)$, *de efectuar una operación elemental de columna.*

1. $\det\left(\mathcal{I}^{k,l}(A)\right) = -\det(A)$.
2. $\det\left(\mathcal{M}^{c,k,}(A)\right) = c \cdot \det(A)$.
3. $\det\left(\mathcal{S}^{c,k,l}(A)\right) = \det(A)$.

Demostración. 1. Veamos que sucede si intercambiamos dos columnas consecutivas en una matriz A :

Notemos que

$$0 = \det\left(A^{\underline{1}} \quad A^{\underline{2}} \quad ... \quad A^{\underline{k}} + A^{\underline{k+1}} \quad A^{\underline{k+1}} + A^{\underline{k}} \quad ... \quad A^{\underline{n}}\right)$$

pues en $\left(A^{\underline{1}} \quad A^{\underline{2}} \quad ... \quad A^{\underline{k}} + A^{\underline{k+1}} \quad A^{\underline{k+1}} + A^{\underline{k}} \quad ... \quad A^{\underline{n}}\right)$ coinciden las columnas k y $k+1$.

Por otra parte,

$$(\det)_A^{\underline{k}}\left(A^{\underline{k}} + A^{\underline{k+1}}\right) = \det\left(A^{\underline{1}} \quad A^{\underline{2}} \quad ... \quad A^{\underline{k}} + A^{\underline{k+1}} \quad A^{\underline{k+1}} \quad ... \quad A^{\underline{n}}\right)$$

Para fijar ideas, denotemos

$$B = \left(A^{\underline{1}} \quad A^{\underline{2}} \quad ... \quad A^{\underline{k}} + A^{\underline{k+1}} \quad A^{\underline{k+1}} \quad ... \quad A^{\underline{n}}\right)$$

Así que

$$\begin{aligned}(\det)_B^{\underline{k+1}}\left(A^{\underline{k}} + A^{\underline{k+1}}\right) &= \det\left(A^{\underline{1}} \ A^{\underline{2}}...A^{\underline{k}} + A^{\underline{k+1}} \quad A^{\underline{k+1}} + A^{\underline{k}}...\ A^{\underline{n}}\right) = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{gathered}0 = (\det)_B^{\underline{k+1}}\left(A^{\underline{k}} + A^{\underline{k+1}}\right) = (\det)_B^{\underline{k+1}}\left(A^{\underline{k}}\right) + (\det)_B^{\underline{k+1}}\left(A^{\underline{k+1}}\right) = \\ = \det\left(A^{\underline{1}} \quad A^{\underline{2}} \quad ... \quad A^{\underline{k}} + A^{\underline{k+1}} \quad A^{\underline{k}} \quad ... \quad A^{\underline{n}}\right) + \\ + \det\left(A^{\underline{1}} \quad A^{\underline{2}} \quad ... \quad A^{\underline{k}} + A^{\underline{k+1}} \quad A^{\underline{k+1}} \quad ... \quad A^{\underline{n}}\right) = \\ = (\det)_C^{\underline{k}}\left(A^{\underline{k}} + A^{\underline{k+1}}\right) + (\det)_A^{\underline{k}}\left(A^{\underline{k}} + A^{\underline{k+1}}\right) =\end{gathered}$$

[4]

$$\begin{gathered}= (\det)_C^{\underline{k}}\left(A^{\underline{k}}\right) + (\det)_C^{\underline{k}}\left(A^{\underline{k+1}}\right) + (\det)_A^{\underline{k}}\left(A^{\underline{k}}\right) + (\det)_A^{\underline{k}}\left(A^{\underline{k+1}}\right) = \\ = \det(C) + \det\left(\mathcal{I}^{k,k+1}(A)\right) + \det(A) + \det\left(\ A^{\underline{1}} \quad ... \quad A^{\underline{k+1}} \quad A^{\underline{k+1}} \quad ... \quad A^{\underline{n}} \ \right) = \\ \det\left(\mathcal{I}^{k,k+1}(A)\right) + \det(A).\end{gathered}$$

$\therefore \det\left(\mathcal{I}^{k,k+1}(A)\right) = -\det(A)$.

---

[4] donde $C = \left(\underbrace{A^{\underline{1}} \quad A^{\underline{2}} \quad ... \quad A^{\underline{k}} \quad A^{\underline{k}}}_{k+1 \text{ columnas}} \quad ... \quad A^{\underline{n}}\right)$

Segunda demostración.

Llamemos $B = \mathcal{I}^{k,k+1}(A)$, entonces $\begin{cases} B^{\underline{\mathrm{i}}} = A^{\underline{\mathrm{i}}} \text{ si } i \notin \{k, k+1\} \\ B^{\underline{\mathrm{k}}} = A^{\underline{k+1}} \\ B^{\underline{k+1}} = A^{\underline{k}} \end{cases}$.

Entonces

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} sig(\sigma) \left(\prod_{i=1} B_{i,\sigma(i)} \right) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} sig(\sigma) \left(\left(\prod_{i \neq \{k,k+1\}} B_{i,\sigma(i)} \right) B_{k,\sigma(k)} B_{k+1,\sigma(k+1)} \right) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} sig(\sigma) \left(\left(\prod_{i \neq \{k,k+1\}} B_{\sigma^{-1}(i),i} \right) \cdot B_{\sigma^{-1}(k),k} \cdot B_{\sigma^{-1}(k+1),k+1} \right) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} sig(\sigma) \left(\left(\prod_{i \neq \{k,k+1\}} A_{\sigma^{-1}(i),i} \right) \cdot A_{\sigma^{-1}(k),k+1} \cdot A_{\sigma^{-1}(k+1),k} \right) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} sig\left(\sigma^{-1}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\left(\prod_{i \neq \{k,k+1\}} A_{(\sigma^{-1} \circ (k,k+1))(i),i} \right) \cdot A_{\sigma^{-1} \circ (k,k+1)(k+1),k+1} \cdot A_{\sigma^{-1} \circ (k,k+1)(k),k} \right) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} sig((k,k+1))\, sig\left(\sigma^{-1} \circ (k,k+1)\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\left(\prod_{i \neq \{k,k+1\}} A_{(\sigma^{-1} \circ (k,k+1))(i),i} \right) \cdot A_{\sigma^{-1} \circ (k,k+1)(k+1),k+1} \cdot A_{\sigma^{-1} \circ (k,k+1)(k),k} \right) =$$

$$= -\sum_{\sigma \in S_n} sig\left(\sigma^{-1} \circ (k,k+1)\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\left(\prod_{i \neq \{k,k+1\}} A_{(\sigma^{-1} \circ (k,k+1))(i),i} \right) \cdot A_{\sigma^{-1} \circ (k,k+1)(k+1),k+1} \cdot A_{\sigma^{-1} \circ (k,k+1)(k),k} \right) =$$

$$= -\det(A).$$

Para concluir esto último notamos que

$$\begin{array}{ccc} S_n & \longrightarrow & S_n \\ \sigma & \longmapsto & \sigma^{-1} \circ (k, k+1) \end{array}$$

es una biyección, pues es la composición de las biyecciones

$$\begin{array}{ccc} S_n & \rightarrow & S_n \\ \sigma & \mapsto & \sigma^{-1} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} S_n & \xrightarrow{\_\circ(k,k+1)} & S_n \\ \gamma & \longmapsto & \gamma \circ (k, k+1) \end{array}$$

En general,

$$\det\left(\mathcal{I}^{\underline{j,k}}(A)\right) = -\det(A) :$$

Sin perder generalidad supongamos $j < k-1$, ahora,

$$(j, k) = (j, k-1) \circ (k, k-1) \circ (j, k-1)$$

y también

$$(j, k-1) = (j, k-2) \circ (k-1, k-2) \circ (j, k-2)$$

por lo que

$$\begin{aligned} (j,k) &= \\ &= (j, k-2) \circ (k-1, k-2) \circ (j, k-2) \circ \\ &\circ (k, k-1) \circ (j, k-2) \circ (k-1, k-2) \circ (j, k-2) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Si $j = k-2$, entonces

$$(j, k) = (k-1, k-2) \circ (k, k-1) \circ (k-1, k-2)$$

es una composición de transposiciones consecutivas,

si $j < k-2$, entonces tenemos que

$$(j, k-2) = (j, k-3) \circ (k-2, k-3) \circ (j, k-3)$$

que podemos sustituir en la ecuación 6.1.

Continuando de esta manera vemos que

$$(j, k)$$

se puede expresar como composición de (un número impar) de transposiciones que intercambian dos números consecutivos.

2. $\det\left(\mathcal{M}^{\underline{c,k}}(A)\right) = (\det)_A^k \left(c \cdot A^{\underline{k}}\right) = c \cdot (\det)_A^k \left(A^{\underline{k}}\right) = c \cdot \det(A)$.

3.

$$\det\left(\mathcal{S}^{c,k,l}(A)\right) = \det\begin{pmatrix} A^{\underline{1}} & \ldots & A^{\underline{l-1}} & A^{\underline{l}} + cA^{\underline{k}} & A^{\underline{l+1}} & \ldots & A^{\underline{n}} \end{pmatrix} =$$

$$= (\det)_A^{\underline{l}} \left(A^{\underline{l}} + cA^{\underline{k}}\right) =$$

$$= (\det)_A^{\underline{l}} \left(A^{\underline{l}}\right) + (\det)_A^{\underline{l}} \left(c \cdot A^{\underline{k}}\right) =$$

$$= (\det)_A^{\underline{l}} \left(A^{\underline{l}}\right) + c \cdot (\det)_A^{\underline{l}} \left(A^{\underline{k}}\right) =$$

$$= (\det)_A^{\underline{l}} (A).$$

Pues

$$(\det)_A^{\underline{l}} \left(A^{\underline{k}}\right) = \det\begin{pmatrix} A^{\underline{1}} & \ldots & A^{\underline{l-1}} & A^{\underline{k}} & A^{\underline{l+1}} & \ldots & A^{\underline{n}} \end{pmatrix} = 0,$$

ya que la matriz en la que se evalúa el determinante tiene dos columnas iguales: la $k-$ésima y la $l-$ésima. ■

Ejemplo 96 *Consideremos la transposición* $(2,5) \in S_7$.
Entonces

$$(2,5) = (2,4)(4,5)(2,4),$$

$$(2,4) = (2,3)(3,4)(2,3)$$

Por lo que

$$(2,5) = (2,3)(3,4)(2,3)(4,5)(2,3)(3,4)(2,3),$$

es una composición de 7 *transposiciones que intercambian números consecutivos.*

Podemos evaluar un determinante en una matriz elemental.

Corolario 16 *1.* $\det\left(\mathcal{I}^{\underline{j,k}}(I_n)\right) = -\det(I_n) = -1$.

2. $\det\left(\mathcal{M}^{c,k}(I_n)\right) = c \cdot \det(I_n) = c$.

3. $\det\left(\mathcal{S}^{c,k,l}(I_n)\right) = \det(I_n) = 1$.

Lema 11 *Sea* $A \in M_{n\times n}(F)$, *y* $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$ *un determinante. Si rango*$(A) < n$, *entonces* $\delta(A) = 0$.

Demostración. Si rango$(A) < n$, entonces las columnas de A forman un conjunto linealmente dependiente. Por lo que en la lista de las columnas de A:

$$A^{\underline{1}}, A^{\underline{2}}, ..., A^{\underline{n}}$$

hay una columna que es combinación lineal de las anteriores (Teorema 12).

Si la primera columna es combinación lineal de las anteriores, entonces $A^{\underline{1}} = \vec{0}$, entonces

$$\det(A) = (\det)_A^{\underline{1}}\left(\vec{0}\right) = 0,$$

ya que las funciones lineales mandan $\vec{0}$ a $\vec{0}$ y $(\det)_A^{\underline{1}} : F^n \to F$ es lineal.

Si la columna $j-$ésima es combinación de las anteriores (con $j > 1$) entonces

$$A^{\underline{j}} = \sum_{i<j} c_i A^{\underline{i}}.$$

De manera que

$$\mathcal{S}^{-c_{j-1},j-1,j\circ} \circ ... \circ \mathcal{S}^{-c_2,2,j\circ}\mathcal{S}^{-c_1,1,j}(A)$$

tiene $\vec{0}$ en su $j-$ésima columna, así que

$$0 = \det\left(\mathcal{S}^{-c_{j-1},j-1,j\circ} \circ ... \circ \mathcal{S}^{-c_2,2,j\circ}\mathcal{S}^{-c_1,1,j}(A)\right) = \det(A).$$

■

Teorema 85 *Si $\delta; M_{n\times n}(F) \to F$ es un determinante, $A \in M_{n\times n}(F)$ y E es una matriz elemental, entonces $\delta(AE) = \delta(A)\delta(E)$.*

Demostración. Simplemente recordemos que si $E = \mathcal{R}(I_n)$, donde $\mathcal{R}$ es una operación elemental de columna, entonces

$$AE = A\mathcal{R}(I_n) = \mathcal{R}(A).$$

Ahora, úsese el Lema 10, que habla del efecto de una operación elemental en el determinante de una matriz. ■

Teorema 86 *Si $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$ es un determinante y $A, B \in M_{n\times n}(F)$, entonces*

$$\delta(AB) = \delta(A)\delta(B).$$

Demostración. Hemos visto que un determinante calculado en una matriz de rango menor que n,vale 0.

Por otra parte recordemos que

$$\text{rango}\,(AB) \leqslant \text{mín}\,\{\text{rango}\,(A)\,, \text{rango}\ \ (B)\}\,,$$

por lo que si una de las dos matrices, A ó B tiene rango menor que n, entonces AB también tiene rango menor que n y

$$\text{rango}\,(AB) = 0 = \text{rango}\,(A)\,\text{rango}\,(B)\,.$$

Supongamos que tanto A como B son de rango n. Entonces B se puede escribir como producto de matrices elementales. (Corolario 9)

$$B = E_1 E_2 ... E_k$$

Aplicando el Teorema anterior varias veces obtenemos que

$$\delta\,(B) = \delta\,(E_1)\,\delta\,(E_2)\,...\delta\,(E_k)\,.$$

Aplicando el mismo Teorema, tenemos que

$$\delta\,(AB) = \delta\,(AE_1E_2...E_k) = \delta\,(A)\,\delta\,(E_1)\,\delta\,(E_2)\,...\delta\,(E_k) = \delta\,(A)\,\delta\,(B)\,.$$

■

Teorema 87 *El determinante es único.*

Demostración. Supongamos que δ_1,$\delta_2 : M_{n\times n}\,(F) \rightrightarrows F$ son dos determinantes. Hemos visto que tienen que coincidir en las matrices de rango menor que n, donde valen 0 y en las matrices elementales.

Supongamos ahora que A es una matriz de rango n, entonces

$$A = E_1 E_2 ... E_k$$

y

$$\begin{aligned} \delta_1\,(A) &= \delta_1\,(E_1)\cdot\delta_1\,(E_2)\cdot ...\cdot\delta_1\,(E_k) = \\ &= \delta_2\,(E_1)\cdot\delta_2\,(E_2)\cdot ...\cdot\delta_2\,(E_k) = \delta_2\,(A)\,. \end{aligned}$$

■

Toda vez que hemos visto que el determinante de orden n es único, podemos hablar del determinante y no de “un determinante”.

Teorema 88 $\det(A^t) = \det(A), \forall A \in M_{n\times n}(F)$.

Demostración.

$$\det\left(A^t\right) = \sum_{\sigma\in S_n}\left(sig(\sigma)\prod_i A^t_{i,\sigma(i)}\right) = \sum_{\sigma\in S_n}\left(sig(\sigma)\prod_i A_{\sigma(i),i}\right) =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n}\left(sig(\sigma)\prod_i A_{\sigma(i),i}\right) = \sum_{\sigma\in S_n}\left(sig(\sigma)\prod_i A_{i,\sigma^{-1}(i)}\right) =$$

$$= \sum_{\sigma^{-1}\in S_n}\left(sig(\sigma^{-1})\prod_i A_{i,\sigma^{-1}(i)}\right).$$

Pues $sig(\sigma^{-1}) = sig(\sigma)$ (fíjese en que $\sigma\circ\sigma^{-1} = (1)$) y además la función $S_n \overset{(\ )^{-1}}{\gg\!\!\twoheadrightarrow} S_n$ es una biyección (es su propio inverso).

$$\therefore \det\left(A^t\right) = \det(A).$$

■

Corolario 17 $\det : M_{n\times n}(F) \to F$ *es una función $n-$lineal y alternante respecto a los renglones.*

En particular podemos describir el efecto de una operación elemental de renglón en el determinante de una matriz.

Si $\mathcal{R}$ es una operación elemental de renglón, denotemos $\mathcal{R}'$la operación de columna correspondiente, por ejemplo $(\mathcal{I}_{k,l})' = \mathcal{I}^{k,l}$.

Corolario 18 *Si $\mathcal{R}$ es una operación elemental de renglón, entonces*

1. $\det(\mathcal{R}(A)) = -\det(A)$ *si* $\mathcal{R} = \mathcal{I}_{k,l}$.

2. $\det(\mathcal{R}(A)) = c\det(A)$ *si* $\mathcal{R} = \mathcal{M}_{c,i}$.

3. $\det(\mathcal{R}(A)) = \det(A)$ *si* $\mathcal{R} = \mathcal{S}_{c,i,j}$.

Demostración. Simplemente notemos que

$$\mathcal{R}(A) = \left(\left(\mathcal{R}'(A)^t\right)\right)^t,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\det(\mathcal{R}(A)) &= \det\left(\left(\mathcal{R}'\left(A^t\right)\right)^t\right) = \\
&= \det\left(\mathcal{R}'\left(A^t\right)\right) = \det\left(\left(A^t\right)\cdot\mathcal{R}'(I_n)\right) = \\
&= \det\left(A^t\right)\det\left(\mathcal{R}'(I_n)\right) = \\
&= \det(A)\det\left(\mathcal{R}'(I_n)\right) = \\
&= \det\left(A\cdot\mathcal{R}'(I_n)\right) = \\
&= \det\left(\mathcal{R}'(A)\right)
\end{aligned}$$

Así que

$$\det\left(\mathcal{I}_{i,j}(A)\right) = \det\left(\mathcal{I}_{i,j}'A\right) = \det\left(\mathcal{I}^{i,j}(A)\right) = -\det(A).$$

$$\det\left(\mathcal{M}_{c,i}(A)\right) = \det\left(\mathcal{M}_{c,i}'(A)\right) = c\cdot\det(A)$$

y

$$\det\left(\mathcal{S}_{c,i,j}(A)\right) = \det\left(\mathcal{S}_{c,i,j}'(A)\right) = \det\left(\mathcal{S}^{c,i,j}(I_n)\cdot(A)\right) = \det(A).$$

■

Ejemplo 97 *Veamos un ejemplo de que* $\mathcal{R}(A) = \left(\left(\mathcal{R}'(A)^t\right)\right)^t$:
Digamos que

$$A = \begin{pmatrix} -58 & -90 & 53 & 17 \\ -1 & 94 & 83 & 72 \\ -86 & 23 & -84 & -99 \\ 19 & -50 & 88 & -85 \end{pmatrix}$$

y queremos aplicar la operación elemental de renglón $\mathcal{S}_{1,2,4}$. *Es decir que queremos sumar el segundo renglón al cuarto. Es claro que se obtiene*

$$\begin{pmatrix} -58 & -90 & 53 & 17 \\ -1 & 94 & 83 & 72 \\ -86 & 23 & -84 & -99 \\ 18 & 44 & 171 & -13 \end{pmatrix}.$$

Esto mismo lo podemos hacer de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} -58 & -90 & 53 & 17 \\ -1 & 94 & 83 & 72 \\ -86 & 23 & -84 & -99 \\ 19 & -50 & 88 & -85 \end{pmatrix} \overset{(\text{-})^t}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -58 & -1 & -86 & 19 \\ -90 & 94 & 23 & -50 \\ 53 & 83 & -84 & 88 \\ 17 & 72 & -99 & -85 \end{pmatrix} \overset{\mathcal{S}^{1,2,4}}{\longmapsto}$$

$$\begin{pmatrix} -58 & -1 & -86 & 18 \\ -90 & 94 & 23 & -44 \\ 53 & 83 & -84 & 171 \\ 17 & 72 & -99 & -13 \end{pmatrix} \overset{(\_)^t}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -58 & -90 & 53 & 17 \\ -1 & 94 & 83 & 72 \\ -86 & 23 & -84 & -99 \\ 18 & -44 & 171 & -13 \end{pmatrix}.$$

6.2. El desarrollo por renglones del determinante

Notación 12 *Si $A \in M_{n\times m}(F)$, $i,j \in \{1,...,n\}$, denotaremos $\widehat{A_{i,j}}$,la matriz en $M_{(n-1)\times(m-1)}(F)$ que se obtiene al suprimir el renglón $i-$ésimo y la columna $j-$ésima de la matriz A*

Ejemplo 98 *Si* $A = \begin{pmatrix} -53 & -58 & -90 & 53 & 17 \\ 85 & -1 & 94 & 83 & 72 \\ 49 & -86 & 23 & -84 & -99 \\ 78 & 19 & -50 & 88 & -85 \end{pmatrix}$, *entonces*

$$\widehat{A_{2,4}} = \begin{pmatrix} -53 & -58 & -90 & 17 \\ 49 & -86 & 23 & -99 \\ 78 & 19 & -50 & -85 \end{pmatrix}.$$

Observación 71 *Sea $\sigma : S_n \gg\!\!\twoheadrightarrow S_n$ una biyección tal que $\sigma(n) = n$. Entonces*

$$sig(\sigma) = sig\left(\sigma_{|\{1,...,n-1\}}\right)$$

Demostración. Si σ es la identidad en $\{1,...,n\}$entonces $\sigma_{|\{1,...,n-1\}}$ es la identidad en $\{1,...,n-1\}$, y ambas tienen signo 1.

Si $\sigma \neq (1)$, entonces la factorización de σ en ciclos ajenos no triviales coincide con la factorización de $\sigma_{|\{1,...,n-1\}}$, debido a que como $\sigma(n) = n$, entonces n no está en ningún ciclo de la factorización de σ. ■

Entonces tenemos que:

Lema 12 $\sum\limits_{\substack{\sigma \\ \sigma(n)=n}} sig(\sigma) \prod\limits_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)} = A_{n.n} \cdot \det\left(\widehat{A_{n,n}}\right).$

Demostración.

$$\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(n)=n}} sig(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)} = \sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(n)=n}} sig(\sigma) \prod_{i=1}^{n-1} A_{i,\sigma(i)} A_{n.n} =$$

$$= A_{n.n} \cdot \sum_{\sigma_{|\{1,\ldots,n-1\}}} sig\left(\sigma_{|\{1,\ldots,n-1\}}\right) \prod_{i=1}^{n-1} A_{i,\sigma_{|\{1,\ldots,n-1\}}(i)} =$$

$$A_{n.n} \cdot \sum_{\gamma \in S_{n-1}} sig(\gamma) \prod_{i=1}^{n-1} A_{i,\gamma(i)} = A_{n.n} \cdot \det\left(\widehat{A_{n,n}}\right).$$

Pues

$$\begin{array}{ccc} \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\} & \rightarrow & S_{n-1} \\ \sigma & \mapsto & \sigma_{|\{1,\ldots,n-1\}} \end{array}$$

es una biyección, por lo que "cuando σ corre sobre $\{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\}$, $\sigma_{|\{1,\ldots,n-1\}}$ corre sobre S_{n-1}". ■

Observación 72 *Consideremos $A \in M_{n\times n}(F)$, $j \in \{1,...,n\}$. Consideremos ahora el coeficiente k,l de $\widehat{A_{n,j}}$*

$$\begin{array}{cccccccc} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,j-1} & \cdot & A_{1,j+1} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,j-1} & \cdot & A_{2,j+1} & \ldots & A_{2,n} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & \ldots & A_{3,j-1} & \cdot & A_{3,j+1} & \ldots & A_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \ldots & \ldots & \cdot & \ldots & \ldots & \cdot \end{array}. \tag{6.2}$$

entonces

$$\left(\widehat{A_{n,j}}\right)_{k,l} = \begin{cases} A_{k,l} \ si\ l < j \\ A_{k,l+1} si\ l \geq j \end{cases}.$$

■

Por ejemplo, observe el coeficiente $A_{1,j+1}$ en la matriz 6.2, y note que está en la $j-$ésima columna de $\widehat{A_{n,j}}$.

Así que si tomamos la función

$$\begin{array}{ccc} \{1,...,n\} \setminus \{k\} & \stackrel{\hat{\gamma}}{\rightarrow} & \{1,...,n-1\} \\ j & \longmapsto & \begin{cases} j \text{ si } j < k \\ j-1 \text{ si } j > k \end{cases} \end{array}$$

entonces para $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma(n) = n$, se tiene que

$$A_{j,\sigma(j)} = \left(\widehat{A_{n,k}}\right)_{j,\hat{\gamma}\sigma_{|\{1,\ldots,n-1\}}(j)}.$$

Lema 13 *Consideremos* $\{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = k\}$, *entonces*

$$\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(n)=k}} sig(\sigma) \prod_{j=1}^{n} A_{j,\sigma(j)} = \left(A_{n,k}(-1)^{n-k} \det\left(\widehat{A_{n,k}}\right)\right).$$

Demostración.

$$\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(n)=k}} sig(\sigma) \prod_{j=1}^{n} A_{j,\sigma(j)} = \sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(n)=k}} sig(\sigma) \left(\prod_{j<n-1} \left(\widehat{A_{n,k}}\right)_{j,\hat{\gamma}\sigma_{|\{1,\ldots,n-1\}}(j)}\right) \cdot A_{n,k} =$$

$$= A_{n,k} \cdot \sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(n)=k}} sig(\gamma)\, sig(\gamma \circ \sigma) \left(\prod_{j<n-1} \left(\widehat{A_{n,k}}\right)_{j,\hat{\gamma}\sigma_{|\{1,\ldots,n-1\}}(j)}\right).$$

Ahora observemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
\{1,\ldots,n\} & \overset{\sigma}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} & \{1,\ldots,n\} & \overset{\gamma}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} & \{1,\ldots,n\} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\{1,\ldots,n-1\} & \xrightarrow{\sigma_{|\{1,\ldots,n-1\}}} & \{1,\ldots,n\} \setminus \{k\} & \overset{\hat{\gamma}}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} & \{1,\ldots,n-1\}
\end{array}$$

Donde las flechas horizontales son biyecciones. Desde luego, $\gamma(k) = n$. Ahora, como $(\gamma \circ \sigma)(n) = \gamma(k) = n$, entonces tenemos que
$sig(\gamma \circ \sigma) = sig\left(\hat{\gamma} \circ \sigma_{|\{1,\ldots,n-1\}}\right)$. Por otra parte, si expresamos γ en notación cíclica tenemos que

$$\gamma = (n, n-1, n-2, \ldots, k)$$

así que si signo es $(-1)^{n-(k-1)+1} = (-1)^{n-k}$.

Notemos además que

$$\begin{array}{ccc}
\{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = k\} & \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow & S_{n-1} \\
\sigma & \mapsto & \hat{\gamma} \circ \sigma_{|\{1,\ldots,n-1\}}
\end{array}$$

es una biyección. (Si uno observa que dominio y codominio tienen $(n-1)!$ elementos basta observar que la función es inyectiva:

$$\hat{\gamma} \circ \sigma_{|\{1,\ldots,n-1\}} = \hat{\gamma} \circ \lambda_{|\{1,\ldots,n-1\}} \Rightarrow \sigma_{|\{1,\ldots,n-1\}} = \lambda_{|\{1,\ldots,n-1\}},$$

pero además $\sigma(n) = k = \lambda(n)$. ■

Por lo tanto

$$\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(n)=k}} sig(\sigma) \prod_{j=1}^{n} A_{j,\sigma(j)} =$$

$= A_{n,k} \cdot$

$$\cdot \sum_{\hat{\gamma}\circ\sigma_{|\{1,\ldots,n-1\}}} (-1)^{n-k} sig\left(\hat{\gamma}\circ\sigma_{|\{1,\ldots,n-1\}}\right) \left(\prod_{j<n-1} \left(\widehat{A_{n,k}}\right)_{j,\hat{\gamma}\sigma_{|\{1,\ldots,n-1\}}(j)} \right) =$$

$$= A_{n,k} (-1)^{n-k} \cdot \det\left(\widehat{A_{n,k}}\right).$$

Teorema 89 $\det(A) = \sum_k \left(A_{n,k} (-1)^{n-k} \det\left(\widehat{A_{n,k}}\right)\right)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \\ &= \sum_k \left(\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma(n)=k}} sig(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)} \right) = \\ &= \sum_k \left(A_{n,k} (-1)^{n-k} \det\left(\widehat{A_{n,k}}\right)\right). \end{aligned}$$

■

La ecuación anterior se llama el desarrollo del determinante respecto al n-ésimo renglón.

El determinante se puede desarrollar respecto de cualquier renglón:

Corolario 19 $\det(A) = \sum_k \left(A_{m,k} (-1)^{m-k} \det\left(\widehat{A_{m,k}}\right)\right)$. *(desarrollo del determinante respecto al $m-$ésimo renglón).*

Demostración. Podemos suponer que $m < n$. Por medio de intercambios de renglón llevemos el renglón $m-$ésimo al último renglón. Es decir, aplicamos sucesivamente las operaciones elementales de renglón

$$\mathcal{I}_{m,m+1}, \mathcal{I}_{m+1,m+2}, \ldots, \mathcal{I}_{n-1,n}$$

¿Cuántos intercambios de renglón hicimos? Escribiendo $n = m + (n - m)$, vemos que hicimos $n - m$ intercambios.

Sea $B = \begin{pmatrix} \underline{A_1} \\ \underline{A_2} \\ \vdots \\ \underline{A_{m-1}} \\ \underline{A_{m+1}} \\ \vdots \\ \underline{A_n} \\ \underline{A_m} \end{pmatrix}$ la matriz que se obtuvo al hacer los intercambios. Es claro que

$$\det(A) = (-1)^{n-m} \det(B) = (-1)^{m-n} \det(B).$$

hagamos ahora el desarrollo del determinante de B respecto el último renglón.

Entonces

$$\det(B) = \sum_k \left(B_{n,k} (-1)^{n-k} \det\left(\widehat{B_{n,k}}\right)\right) =$$

$$= \sum_k \left(A_{m,k} (-1)^{n-k} \det\left(\widehat{A_{m,k}}\right)\right)$$

Pues $\widehat{B_{n,k}} = \widehat{A_{m,k}}$.

Entonces

$$\det(A) = (-1)^{m-n} \cdot \sum_k \left(A_{m,k} (-1)^{n-k} \det\left(\widehat{A_{m,k}}\right)\right) =$$

$$= \sum_k \left(A_{m,k} (-1)^{m-k} \det\left(\widehat{A_{m,k}}\right)\right) = \sum_k \left(A_{m,k} (-1)^{m+k} \det\left(\widehat{A_{m,k}}\right)\right).$$

Pues $(-1)^{m-k} = (-1)^{m+k}$, ya que $(-1)^{-k} = (-1)^{k}$, pues $(-1)^{-k} \cdot (-1)^{k} = (-1)^0 = 1$.

■

El resultado anterior, junto con el hecho de que $\det(A) = \det(A^t)$ implica que el determinante también se puede desarrollar por columnas:

$$\det(A) = \sum_k \left((A_{m,k})^t (-1)^{m+k} \det\left(\widehat{(A_{m,k})^t}\right)\right) =$$

$$= \sum_k \left((A_{k,m}) (-1)^{m+k} \det\left(\widehat{(A_{k,m})}\right)\right),$$

pues $\widehat{(A_{m,k})}^t = \left(\widehat{(A_{k,m})}\right)^t$.

$$\det(A) = \sum_k \left((A_{k,m})(-1)^{m+k} \det\left(\widehat{(A_{k,m})}\right)\right)$$

se llama el desarrollo del determinante respecto a la $m-$ésima columna.

Nota 3 *Es claro que* $\det(A) = 0$ *si* A *tiene dos renglones iguales.*

6.3. Invertibilidad y el determinante

Definición 89 *1. Sea* $A \in M_{n\times n}(F)$, *definimos el cofactor de* $A_{i,j}$, $C_{i,j}$ *por*

$$C_{i,j} = (-1)^{i+j} \det\left(\widehat{A_{i,j}}\right)$$

2. Definimos la matriz de cofactores de A,

$$C \in M_{n\times n}(F)$$

por la misma relación anterior.

Ejemplo 99 *Si*

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & 7 \\ -5 & 7 & 0 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$C_{2,3} = (-1)^{2+3} \det\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = -5,$$

$$C_{1,2} = (-1)^{1+2} \det\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = 20.$$

La matriz de cofactores es

$$\begin{pmatrix} 28 & 20 & -79 \\ 62 & -69 & -5 \\ -49 & -35 & -60 \end{pmatrix}.$$

Así sucede que el desarrollo respecto del $i-$ésimo renglón del determinante de A es

$$\det(A) = \sum_j A_{i,j}(-1)^{i+j}\det\left(\widehat{A_{i,j}}\right) = \sum_j A_{i,j}C_{i,j} = \sum_j A_{i,j}C^t_{j,i} = \left(AC^t\right)_{i,i}$$

Como esto sucede para cada i, entonces los elementos de la diagonal en el producto

$$AC^t$$

es $\det(A)$.

Veamos lo que es un elemento fuera de la diagonal del producto AC^t, calculemos

$$\left(AC^t\right)_{i,j},\ i \neq j.$$

$$\left(AC^t\right)_{i,j} = \sum_k A_{i,k}C^t_{k,j} = \sum_k A_{i,k}C_{j,k} = \sum_k A_{i,k}(-1)^{j+k}\det\left(\widehat{A_{j,k}}\right)$$

que es el desarrollo respecto al $j-$ésimo renglón de la matriz

$$\begin{pmatrix} j \text{ renglones} \left\{ \begin{array}{c} A_{\underline{1}} \\ A_{\underline{2}} \\ \vdots \\ A_{\underline{i}} \\ \vdots \\ A_{\underline{i}} \end{array} \right. \\ \vdots \\ A_{\underline{n}} \end{pmatrix},$$

y es 0, siendo el determinante de una matriz con dos renglones iguales.

Resumimos lo anterior en la siguiente fórmula:

$$AC^t = \det(A) \cdot I_n = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \det(A) & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \det(A) \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Análogamente,

$$\left(C^tA\right)_{i,i} = \sum_k C^t_{i,k}A_{k,i}\sum_k C_{k,i}A_{k,i} = \sum_k A_{k,i}(-1)^{i+k}\det\left(\widehat{A_{k,i}}\right) = \det(A).$$

Pues es el desarrollo del determinante de A respecto a la $i-$ésima columna de A.

También, para $i \neq j$,

$$\left(C^t A\right)_{i,j} = \sum_k C^t_{i,k} A_{k,j} = \sum_k A_{k,j} C_{k,i} = \sum_k A_{k,j} (-1)^{i+k} \det\left(\widehat{A_{k,i}}\right)$$

que es el desarrollo respecto a la $i-$ésima columna del determinante de la matriz

$$\left(\underbrace{A^{\underline{1}}\ A^{\underline{2}}\ \ldots\ A^{\underline{j}}}_{i \text{ columnas}} \ldots\ A^{\underline{j-1}}\ A^{\underline{j}}\ \ldots\ A^{\underline{n}}\right).$$

Por tener dos columnas iguales el determinante de la matriz anterior es 0.

Entonces

$$C^t A = \det(A) \cdot I_n = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \det(A) & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \det(A) \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Corolario 20 $A \in M_{n\times n}(F)$ *es invertible si y sólo si* $\det(A) \neq 0$.

Demostración. $\Leftarrow$) Tenemos que

$$A\left(\left(\frac{1}{\det(A)}\right) C^t\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

y también

$$\left(\left(\frac{1}{\det(A)}\right) C^t\right) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Así que $\left(\frac{1}{\det(A)}\right) C^t = A^{-1}$.

$\Rightarrow$) Si A es invertible, entonces

$$1 = \det(I_n) = \det\left(AA^{-1}\right) = \det(A)\det\left(A^{-1}\right).$$

por lo que $\det(A) \neq 0$ y además $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$. ■

Notación 13 *La transpuesta de la matriz de cofactores se suele llamar la "adjunta clásica" o "adjugada".*

Ejemplo 100 *Calcularemos el determinante de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \det(\mathcal{S}_{2,3,1}(A)) = \det \begin{pmatrix} 5 & 0 & 9 & 7 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \mathcal{S}_{6,3,4} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 9 & 7 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 4 \\ 11 & 0 & 33 & 27 \end{pmatrix} = (-1)(-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ -3 & 2 & 1 \\ 11 & 33 & 27 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \left(\mathcal{S}^{-2,3,2} \mathcal{S}^{3,3,1} \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ -3 & 2 & 1 \\ 11 & 33 & 27 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 26 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 92 & -21 & 27 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 26 & -5 \\ 92 & -21 \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ 46 & -21 \end{pmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (13 \cdot (-21) + 5 \cdot 46) = 86.$$

Ejercicio 155 *Sea* $M \in M_{n \times n}(F)$, $A \in M_{r \times r}(F)$, $B \in M_{(n-r)\times(n-r)}(F)$, $r \leqslant n$, *de tal manera que*

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Demostrar que $\det(M) = \det(A)\det(B)$. ***Sugerencia:*** *inducción sobre* r *y desarrollo respecto a la primera columna.*

Ejemplo 101 $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot 3 = (4-6) \cdot 3 = -6.$

Ejemplo 102 *Sean* $c_0, ..., c_n$ *elementos de un campo infinito* F. *Se define*

$$\begin{array}{ccc} P_n(F) & \overset{T}{\to} & F^{n+1} \\ f & \mapsto & (f(c_0), ..., f(c_n)) \end{array}.$$

Tomemos β y γ las bases canónicas de $P_n(F)$ y de F^{n+1}, respectivamente. Entonces

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & c_0 & c_0^2 & \dots & c_0^n \\ 1 & c_1 & c_1^2 & \dots & c_1^n \\ 1 & c_2 & c_2^2 & \dots & c_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_n & c_n^2 & \dots & c_n^n \end{pmatrix}.$$

Veremos que

$$\det\left([T]_\beta^\gamma\right) = \prod_{j<i} (c_i - c_j).$$

Por inducción sobre n.
Base. *Si $n = 0$, entonces*

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix},$$

así que

$$\prod_{j<i\leqslant 0} (c_i - c_j) = \prod_{j\in\varnothing} (c_i - c_j) = 1 = \det\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = \det\left([T]_\beta^\gamma\right).$$

Paso inductivo. *Supongamos que $n > 0$ y la afirmación cierta para $n-1$.*
Recordemos que

$$[T]_\beta^\gamma = [Id]_\gamma^\gamma [T]_{\beta'}^\gamma [Id]_\beta^{\beta'}$$

para cualquier base β' de $P_n(F)$.
Sea

$$\beta' = \left\{1, x, ..., x^{n-1}, f_n\right\}$$

donde

$$f_n = \frac{\prod\limits_{j=0}^{n-1} (x - c_j)}{\prod\limits_{j=0}^{n-1} (c_n - c_j)}.$$

Entonces

$$[Id]_\beta^{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \text{ con } \alpha_n = \prod_{j=0}^{n-1} (c_n - c_j).$$

Para ver esto último, simplemente note que el coeficiente principal de f_n es $\frac{1}{\prod_{j=0}^{n-1}(c_n-c_j)}$.
Así que si expresamos x^n como combinación lineal de

$$\{1, x, ..., x^{n-1}, f_n\}$$

el último coeficiente es $\prod_{j=0}^{n-1}(c_n - c_j)$.
Por otra parte,

$$[T]_{\beta'}^{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & c_0 & ... & c_0^{l-1} & 0 \\ 1 & c_1 & ... & c_1^{l-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & c_{n-1} & ... & c_{n-1}^{l-1} & 0 \\ 1 & c_n & ... & c_n^{l-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Así

$$\det\left([T]_{\beta}^{\gamma}\right) = \det\left([T]_{\beta'}^{\gamma}\right)\det\left([Id]_{\beta}^{\beta'}\right) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & c_0 & ... & c_0^{l-1} & 0 \\ 1 & c_1 & ... & c_1^{l-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & c_{n-1} & ... & c_{n-1}^{l-1} & 0 \\ 1 & c_n & ... & c_n^{l-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & ... & \vdots & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 & \alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & ... & 0 & \prod_{j=0}^{n-1}(c_n - c_j) \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & c_0 & ... & c_0^{l-1} \\ 1 & c_1 & ... & c_1^{l-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_{n-1} & ... & c_{n-1}^{l-1} \end{pmatrix}\prod_{j=0}^{n-1}(c_n - c_j) =$$

$$= \prod_{j<i\leqslant n-1}(c_n - c_j)\prod_{j=0}^{n-1}(c_n - c_j) = \prod_{j<i}(c_n - c_j)$$

■

6.4. La regla de Cramer

Sea $A \in M_{n\times n}(F)$, una matriz invertible, consideremos el sistema de ecuaciones

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

con $\vec{b} \in F^n$. El sistema anterior se puede escribir en las formas equivalentes:

$$A^{\underline{1}}x_1 + A^{\underline{2}}x_2 + ... + A^{\underline{n}}x_n = \vec{b}.$$

O bien

$$\begin{array}{lllll} A_{1,1}x_1+ & A_{1,2}x_2+ & ... & +A_{1,n}x_n & = 0 \\ A_{2,1}x_1+ & A_{2,2}x_2+ & ... & +A_{2,n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1}x_1+ & A_{n,2}x_2+ & ... & +A_{n,n}x_n & = 0 \end{array}.$$

Desde luego, el sistema tiene la solución única

$$A^{-1}\vec{b}.$$

Digamos que $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = A^{-1}\vec{b}$ es la solución y calculemos

$$(\det)_A^j \left(\vec{b}\right) = \det\left(A^{\underline{1}}\ A^{\underline{2}}\ ...A^{\underline{j-1}}\ \vec{b}\ A^{\underline{j+1}}...A^{\underline{n}}\right) =$$

$$= \det\left(A^{\underline{1}}\ A^{\underline{2}}\ ...A^{\underline{j-1}}\quad A^{\underline{1}}s_1 + A^{\underline{2}}s_2 + ... + A^{\underline{n}}s_n \quad A^{\underline{j+1}}...A^{\underline{n}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1} \det\left(A^{\underline{1}}\ A^{\underline{2}}\ ...A^{\underline{j-1}}\quad A^{\underline{2}}s_k \quad A^{\underline{j+1}}...A^{\underline{n}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1} s_k \det\left(A^{\underline{1}}\ A^{\underline{2}}\ ...A^{\underline{j-1}}\quad A^{\underline{k}} \quad A^{\underline{j+1}}...A^{\underline{n}}\right).$$

Todos los sumando que corresponden a $k \neq j$ son 0 pues en

$$\left(A^{\underline{1}}\ A^{\underline{2}}\ ...A^{\underline{j-1}}\quad A^{\underline{k}} \quad A^{\underline{j+1}}...A^{\underline{n}}\right)$$

las columnas $j-$ésima y $k-$ésima coinciden.

Entonces

$$(\det)_A^j \left(\vec{b}\right) = s_j \det\left(A^{\underline{1}}\ A^{\underline{2}}\ ...A^{\underline{j-1}}\quad A^{\underline{j}} \quad A^{\underline{j+1}}...A^{\underline{n}}\right) = s_j \det(A).$$

$$\therefore s_j = \frac{\det\left(A^{\underline{1}}\ A^{\underline{2}}\ ...A^{\underline{j-1}}\ \vec{b}\ A^{\underline{j+1}}...A^{\underline{n}}\right)}{\det(A)}. \qquad \text{(Regla de Cramer)}$$

Ejemplo 103 *Consideremos el sistema*

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} 5x_1 + x_2 & = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 & = 2 \end{pmatrix}$$

$\det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 10 - 3 = 7.$

Ahora

Ejemplo 104 $s_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}{7} = 2, s_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}{7} -2.$

Ejemplo 105 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$

$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = -6 + 5 = -1.$

Entonces

$$s_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ b & 1 & 2 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = -a + b + c.$$

$$s_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & a & 3 \\ 1 & b & 2 \\ 3 & c & 1 \end{pmatrix}}{-1} = 6b + 3c - 5a$$

$$s_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 3 & 0 & c \end{pmatrix}}{-1} = -2c + 3a - 3b.$$

Ejercicio 156 *Muestre que son equivalentes para una función* $\delta : M_{n\times n}(F) \to F$:

1. δ *es una función alternante tal que* $\delta(I_n) = 1$. *(Es decir* δ *es un determinante).*
2. $\delta(A) = \sum\limits_{\sigma\in S_n} sig(\sigma) \prod\limits_i A_{i,\sigma(i)}$.
3. $\delta(A) = \sum\limits_{j\in\{1,\ldots,n\}} (-1)^{n+j} A_{n,j} \det\left(\widehat{A_{n,j}}\right)$.
   i
    a) δ *es multiplicativa, es decir,* $\delta(AB) = \delta(A)\,\delta(B)$.
    b) δ *es una función aditiva respecto de la primera columna de cualquier matriz, e. d.* $\delta_A^1(\vec{x}+\vec{y}) = \delta_A^1(\vec{x}) + \delta_A^1(\vec{y})$.
    c) $\delta(E) = 1$, *para toda matriz elemental del tercer tipo.*

    a) δ *es multiplicativa,*
    b) $\delta(A) = \prod\limits_i A_{i,i}$, *para cualquier matriz triangular (inferior o superior).*

6.5. Similitud

Recordemos que dada una matriz $A \in M_{n\times n}(F)$, la función

$$F^n \xrightarrow{A\cdot\_} F^n$$

es lineal y que $[A\cdot\_]_{can}^{can} = A$. En este caso decimos que la matriz A representa a la función lineal $A\cdot\_$. En general:

Definición 90 *Sea* $V \xrightarrow{T} V$ *una función lineal con* $\dim(V) = n < \infty$, *decimos que* $A \in M_{n\times n}(F)$ *representa a* T *si* $A = [T]_\gamma^\gamma$, *para alguna base* γ *de* V.

Definición 91 *Decimos que las matrices* $A, B \in M_{n\times n}(F)$ *son similares si* $\exists Q \in M_{n\times n}(F)$ *invertible tal que*

$$A = Q^{-1}BQ.$$

Escribiremos $A \backsimeq B$ *en caso de que* A *y* B *sean similares.*

Ejercicio 157 *Demostrar que la relación de similitud es una relación de equivalencia.*

Lema 14 *1. Si A y B representan a $T : V \to V$, lineal* $\dim(V)$ *finita, entonces A y B son similares.*

2. Si A representa a $T : V \to V$, lineal $\dim(V)$ *finita, y B es similar a A, entonces B representa a T.*

3. Si A y B son similares, entonces A y B representan al mismo operador

Demostración. 1. $A = [T]_\beta^\beta$, $B = [T]_\gamma^\gamma$ para algunas base β y γ de V. Entonces

$$[T]_\beta^\beta = [Id]_\gamma^\beta [T]_\gamma^\gamma [Id]_\beta^\gamma,$$

como $[Id]_\gamma^\beta = \left([Id]_\beta^\gamma\right)^{-1}$, entonces A y B son similares.

2. Tenemos que $A = [T]_\beta^\beta$ y $B = QAQ^{-1}$ para alguna base β de V y alguna matriz invertible $Q \in M_{n\times n}(F)$. Entonces

$$B = Q [T]_\beta^\beta Q^{-1}$$

Basta hacer

$$Q^{-1} = [Id]_\gamma^\beta.$$

Para esto notemos que $(Q^{-1})^{\underline{j}} = [\vec{v}_j]_\beta$ donde $\vec{v}_j$ es el $j-$ésimo elemento de la base γ. Basta pues, que definamos γ por medio de

$$\vec{v}_j = \varphi_\beta^{-1}(Q^{-1})^{\underline{j}},$$

para tener que $B = [T]_\gamma^\gamma$.[5]

3. Si $A = QBQ^{-1}$, notemos que $A = [A \cdot \_]_{can}^{can}$, donde $F^n \overset{A\cdot\_}{\to} F^n$. Utilicemos ahora el inciso anterior. ■

Corolario 21 *Dos matrices $A, B \in M_{n\times n}(F)$ son similares si y sólo si representan al mismo operador.*

Ejercicio 158 *Demuestre que si $A \in M_{n\times n}(F)$ es una matriz triangular entonces $|A| = \prod_{i=1}^n A_{i,i}$.*

[5]Desde luego, $\varphi_\beta : V \to F^n$ es la función que envía $\vec{v}$ a su vector de coordenadas respecto a β.

Ejercicio 159 *Calcular* $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0. & .. & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Ejercicio 160 *Sea* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, *demuestre que* $\left|\bar{A}\right| = \overline{|A|}$, *donde* $\left(\bar{A}\right)_{i,j} = \overline{A_{i,j}}$.

Ejercicio 161 *Demuestra que* $|cA| = c^n |A|$, *si* $c \in F, A \in M_{n\times n}(F)$.

Ejercicio 162 *Sea* $A \in M_{n\times n}(F)$, F *un campo. Defina* C *por:* $C_{i,j} = \alpha^{i-j} A_{i,j}$, $\alpha \in F \setminus \{0\}$. *Calcule* $|C|$. *(Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *y* $\alpha = 2$, *entonces* $C = \begin{pmatrix} 2^0 \cdot 1 & 2^{-1} \cdot 1 \\ 2^1 \cdot 3 & 2^0 \cdot 4 \end{pmatrix}$*).*

Ejercicio 163 *Demuestre que si* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ *es tal que* $A = \overline{A^t}$, *entonces* $|A| \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 164 *Sea* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *y sea* $B = \begin{pmatrix} A_{\underline{n}} \\ \underline{A_{n-1}} \\ \vdots \\ A_{\underline{1}} \end{pmatrix}$ *(note que se invirtió el orden de los renglones de A). Calcule* $|B|$.

Ejercicio 165 *Note que trasponer una matriz es como reflejar los coeficientes sobre la diagonal principal", y que esto no cambia el determinante.*

Suponga que $B \in M_{n\times n}(|\mathbb{R}|)$ se obtiene reflejando"los coeficientes de A sobre una línea vertical que pas por el centro de la matriz. Calcule $|B|$ en términos de $|A|$. (Por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$).

Ejercicio 166 *Suponga que* C *se obtiene de* A *reflejando sus elementos sobre una línea horizontal. Muestre que* $|C| = |B|$.

Ejercicio 167 *Sean* $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$. *Decimos que los triángulos* $\triangle_{z_1,z_2,z_3}$ *y* $\triangle_{w_1,w_2,w_3}$ *son semejantes (*$\triangle_{z_1,z_2,z_3} \sim \triangle_{w_1,w_2,w_3}$*) si los ángulos internos de los dos triángulos coinciden (en el mismo orden), es decir que se pueden numerar en el sentido de las manecillas del reloj los ángulos, como* α, β, γ.

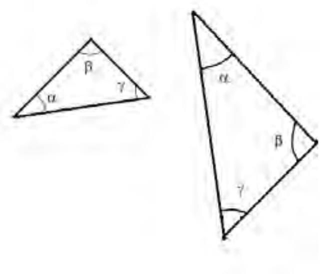


Figura 6.1:

1. *a*) Demuestre que $\triangle_{z_1,z_2,z_3} \sim \triangle_{w_1,w_2,w_3} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

2. Demuestre que z_1, z_2, z_3 son colineales $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix} = 0.$

3. Demuestre que $\triangle_{z_1,z_2,z_3}$ es equilátero $\Leftrightarrow \triangle_{z_1,z_2,z_3} = \triangle_{z_3,z_1,z_2}$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & z_3 & 1 \\ z_2 & z_1 & 1 \\ z_3 & z_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ejercicio 168 *Encuentre una condición, usando determinantes, para que* $0, z_1, z_2, z_3 \in |\mathbb{C}|$ *estén en un mismo círculo.*

Ejercicio 169 *Repita el ejercicio anterior, cambiando* 0 *por* z_4*.*

Ejercicio 170 *Suponga que la matriz* H *se obtiene de* A *rotando"*$90°$ *en el sentido del reloj y sobre el centro de la matriz. Calcule el determinante de* H *en términos del de* A*. (Por ejemplo* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$*).*

Ejercicio 171 $20604, 53227, 25755, 20927, 78421$ *son múltiplos de* 17. *Demuestre que*

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0 \mod 17.$$

Ejercicio 172 *Calcular:* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \end{vmatrix}.$

Capítulo 7

Polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$

7.1. Polinomios y el algoritmo de la división

Definición 92 *Sea R un anillo, y $\mathbb{N}$ el conjunto de los naturales,*

$$R^{(\mathbb{N})} = \left\{ f \in R^{\mathbb{N}} \mid f(x) \neq 0 \textit{ en un subconjunto finito de } \mathbb{N} \right\}.$$

Definición 93 *Si f es un elemento de $R^{(\mathbb{N})}$, denotaremos*

$$sop\,(f) =: \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \neq 0\}.$$

Proposición 9 $\left(R^{(\mathbb{N})}, \tilde{+}_{|R^{(\mathbb{N})}\times R^{(\mathbb{N})}}, \hat{0}\right)$ *es un subgrupo de* $\left(R^{\mathbb{N}}, \tilde{+}, \hat{0}\right)$.

Demostración. Veremos que $\left(R^{(\mathbb{N})}, \tilde{+}_{|R^{(\mathbb{N})}\times R^{(\mathbb{N})}}, \hat{0}\right)$ es un subgrupo del grupo $\left(R^{\mathbb{N}}, \tilde{+}, \hat{0}\right)$:

1. Cerradura). Tenemos que observar que la suma de dos funciones con soporte finito tiene soporte finito. Pero debe ser claro que $\mathrm{sop}\left(f\tilde{+}g\right) \subseteq \mathrm{sop}(f) \cup \mathrm{sop}(g)$ pues $(f(x) + g(x) \neq 0 \Rightarrow (f(x) \neq 0 \vee g(x) \neq 0))$.

2. Neutro: la función constante $\hat{0}$ tiene soporte vacío (que es finito).

3. $\mathrm{sop}(-f) = \mathrm{sop}(f)$. ■

Vamos a darle a $R^{(\mathbb{N})}$estructura de anillo, definiendo la multiplicación de la siguiente manera:

Definición 94

$$(f * g)(n) = \sum_{i+j=n} f(i)\,g(j).$$

Proposición 10 $*$ *es una operación asociativa, con neutro, en* $R^{(\mathbb{N})}$:

Demostración. 1.

$$n \in \operatorname{sop}(f * g) \Rightarrow 0 \neq (f * g)(n) = \sum_{i+j=n} f(i)\, g(j) \Rightarrow i \in \operatorname{sop}(f) \wedge j \in \operatorname{sop}(g)$$

para alguna i y alguna j tales que $i + j = n$. Como sop(f) y sop(g) son finitos, también es finito el conjunto de productos $f(i)\, g(j)$. que sean distintos de 0. Por lo tanto sop$(f * g)$ es finito.

2. $*$ es asociativa:

$$((f * g) * h)(n) = \sum_{i+j=n} (f * g)(i)\, h(j)$$

$$= \sum_{i+j=n} [(f * g)(i)]\, h(j) = \sum_{i+j=n} \left[\sum_{k+l=i} f(k)\, g(l)\right] h(j)$$

$$= \sum_{k+l+j=n} (f(k)\, g(l))\, h(j).$$

Por otra parte si calculamos $(f * (g * h))(n)$ obtendremos

$$\sum_{k+l+j=n} f(k)\,(g(l)\, h(j)).$$

3. El neutro es la función $\tilde{1} : \mathbb{N} \to R$ tal que $\tilde{1}(0) = 1, \tilde{1}(n) = 0$, para todo $n > 0$. En efecto

$$\left(\tilde{1} * g\right)(n) = \sum_{i+j=n} \tilde{1}(i)\, g(j) = \tilde{1}(0)\, g(n) = g(n) = \left(g * \tilde{1}\right)(n).$$

■

Proposición 11 *$*$ se distribuye sobre la suma de $R^{(\mathbb{N})}$.*

Demostración.

$$(f * (g + h))(n) = \sum_{i+j=n} f(i)\,(g + h)(j)$$

$$= \sum_{i+j=n} f(i)\,(g(j) + h(j)) = \left[\sum_{i+j=n} f(i)\, g(j) + f(i)\, h(j)\right]$$

$$= \sum_{i+j=n} f(i)\, g(j) + \sum_{i+j=n} f(i)\, h(j) = (f * g)(n) + (f * h)(n) =$$

$$= [f * g + f * h](n).$$

Por lo tanto $(f * (g + h)) = f * g + f * h$. ■

Proposición 12 $\left(R^{(\mathbb{N})}, \tilde{+}, \hat{0}, *, \tilde{1}\right)$ *es un anillo, el anillo de polinomios con coeficientes en R.*

1. $x =: (0, 1, 0, 0, \bar{0}, ...)$.

2. *Como consecuencia de la definición anterior,* $x^2 =: (0, 0, 1, 0, \bar{0}, ...)$,..., $x^n =: (\underbrace{0, ..., 0, 1}_{n+1 \text{ lugares}}, 0, \bar{0}, ...)$. $x^0 = \tilde{1} =: (1, 0, \bar{0}, ...)$.

3. *Si* $f : f(0), f(1), ..., f(n), 0, \bar{0}, ...$ *entonces* $f = f(0)\tilde{1} + f(1)x + ... + f(n)x^n$.

Definición 95 *grad*$(f) =: \max\{k \mid f(k) \neq 0\}$. *Notemos que esta definición no incluye al polinomio* $\hat{0}$.

Lema 15 *Si F es un campo, y* $f, g \in F^{(\mathbb{N})} \setminus \{\hat{0}\}$, *entonces* $f \circ g \neq 0$.

Demostración. Basta ver que grad$(f * g)$ =grad(f)+ grad(g) :

Si grad$(f) = n$ y grad$(g) = m$, entonces $f(n) \neq 0$ y $f(j) = 0$ $\forall j > n$. Además $g(m) \neq 0$ y $g(j) = 0$ $\forall j > m$. Entonces

$$(f * g)(n + m) = \sum_{i+j=n+m} f(i) g(j) = f(n) g(m) \neq 0, \text{ ya que } i \geq n \text{ ó } j \geq m.$$

Además si $k \geq n + m$, entonces $(f * g)(k) = \sum_{i+j=k} f(i) g(j) = 0$, ya que $i > n$ ó $j > m$. ■

Teorema 90 *La función* $\psi : R \to R^{(\mathbb{N})}$ *definida por* $\psi(r) = \hat{r}$, *(la función* $(r, 0, \bar{0}, ...)$*) es una función que respeta la suma, el producto el uno, y además es inyectiva. Es decir:*

1. $\psi(r + s) = \psi(r) + \psi(s)$ *para cualesquiera* $r, s \in R$.

2. $\psi(r * s) = \psi(r) * \psi(s)$ *para cualesquiera* $r, s \in R$.

3. $\psi(1) = 1$.

4. $\psi(r) = \psi(s) \Rightarrow r = s$.

Demostración. 1. Sean $r, s \in R$, entonces

$$\psi(r+s) = \widehat{r+s} = (r+s, 0, \bar{0}, ...) = (r, 0, \bar{0}, ...) + (s, 0, \bar{0}, ...) =$$

$$= \hat{r} + \hat{s} = \psi(r) + \psi(s)$$

2. Sean $r, s \in R$, entonces

$$\psi(r * s) = \widehat{r * s} = (r \cdot s, 0, \bar{0}, ...) = (r, 0, \bar{0}, ...) * (s, 0, \bar{0}, ...) =$$

$$= \hat{r} * \hat{s} = \psi(r) * \psi(s)$$

3. $\psi(1) = \hat{1} = 1_{R^{(\mathbb{N})}}$.

4. $\psi(r) = \psi(s) \Rightarrow (r, 0, \bar{0}, ...) = (s, 0, \bar{0}, ...) \Rightarrow r = s$. ■

Proposición 13 *Si F es un campo, entonces $\left(F^{(\mathbb{N})}, \tilde{+}, \hat{0}, *, \tilde{1}\right)$ es un dominio entero.*

Demostración. Basta ver que $\left(F^{(\mathbb{N})} \setminus \{\hat{0}\}, *, \tilde{1}\right)$ es un monoide con cancelación.

Supongamos que $f(x)g(x) = f(x)h(x), f, g, h \in F^{(\mathbb{N})} \setminus \{\hat{0}\}$. Entonces $f(x)(g(x) - h(x)) = \hat{0}$. Como $f \neq \hat{0}$, tenemos que $g(x) - h(x) = \hat{0}$. Por el Lema anterior. ■

Proposición 14 *Si F es un campo, entonces en $\left(F^{(\mathbb{N})}, \tilde{+}, \hat{0}, *, \tilde{1}\right)$hay algoritmo de la división:*
Si $f(x), g(x) \in F^{(\mathbb{N})}$ y $g(x) \neq 0$, entonces

$$\exists! q(x), !r(x) \in F^{(\mathbb{N})}$$

tales que

$$0 = r(x) \text{ ó } grad(r(x)) < grad(g), \text{ y } f(x) = bq + r.$$

Como la proposición anterior es un poco larga, es mejor escribir el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{rl} & q(x) \\ g(x) & \overline{\left| \, f(x) \right.} \\ & r(x) \qquad 0 = r(x) \text{ ó } grad(r(x)) < grad(g(x)) \end{array}$$

Demostración. Podemos suponer que $f(x) \neq 0$, pues en caso contrario, $q(x) = 0 = r(x)$ sirven.

Ahora, podemos hacerlo por inducción sobre grad$(f(x))$:

Base.

Si grad$(f) = 0 =$grad(g) , entonces $\begin{array}{rl} & f/g \\ \cline{2-2} g & \multicolumn{1}{|l}{f} \\ & 0 \qquad 0 = r(x) \end{array}$

Si grad$(f) = 0 <$ grad(g) entonces

$$\begin{array}{rl} & 0 \\ \cline{2-2} g & \multicolumn{1}{|l}{f} \\ & f \qquad f = r(x)\,,\ \text{grad}(f) < \text{grad}(g) \end{array}$$

Paso inductivo:

Si grad$(f) <$ grad(g) entonces

$$\begin{array}{rl} & 0 \\ \cline{2-2} g & \multicolumn{1}{|l}{f} \\ & f \qquad 0 = r(x) \end{array}$$

Si grad$(f) \geq$ grad(g) , escribamos

$$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

y

$$g = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_m x^m$$

Multipliquemos g por x^{n-m}. Entonces $f - x^{n-m}g = 0$ ó grad$(f - x^{n-m}g) <$ grad(f) . En el primer caso tenemos

$$\begin{array}{rl} & x^{n-m} \\ \cline{2-2} g & \multicolumn{1}{|l}{f} \\ & 0 \qquad 0 = r(x) \end{array}$$

y en el segundo tenemos

$$\begin{array}{rl} & q \\ \cline{2-2} g & \multicolumn{1}{|l}{f - x^{n-m}g} \\ & r(x) \qquad 0 = r(x) \text{ ó grad}(r) < \text{grad}(g) \end{array} ,$$

por hipótesis de inducción.

En este último caso, $f - x^{n-m}g = qg + r$, es decir que

$$\begin{array}{rl} & x^{n-m} + q \\ \cline{2-2} g & \multicolumn{1}{|l}{f} \\ & r(x) \qquad 0 = r(x) \text{ ó grad}(r) < \text{grad}(g) \end{array} .$$

Demostrar la unicidad se deja como ejercicio. ■

Corolario 22 *Sea F un campo y $f \in F[x]$. Entonces $f(x) = g(x)(x-a) + f(a)$.*

Demostración.

$$\begin{array}{rl} & g(x) \\ x-a & \overline{\left| f \right.} \\ & r(x) \quad 0 = r(x) \text{ ó } \mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(x-a) \end{array}.$$

Entonces $r(x)$ es una constante, y $f(x) = g(x)(x-a) + r$. Evaluando en a, obtenemos la conclusión deseada. ■

Definición 96 *Sean $f(x), g(x) \in R[x]$, diremos que f divide a g ($f \mid g$) si $\exists h(x) \in R[x]$ tal que $fh = g$.*

Corolario 23 *Sea F un campo y $f \in F[x]$. Entonces $f(a) = 0 \Leftrightarrow (x-a) \mid f(x)$.*

Demostración. Por el Corolario anterior, tenemos que

$$f = g(x)(x-a) + f(a).$$

■

Recordando que los elementos de R pueden identificarse con elementos de $R^{(\mathbb{N})}$, definiremos un producto de $R \times R^{(\mathbb{N})}$ en $R^{(\mathbb{N})}$, de manera que coincida con el producto en $R^{(\mathbb{N})}$.

Definición 97

$$\begin{array}{rrcl} \cdot: & R \times R^{(\mathbb{N})} & \to & R^{(\mathbb{N})} \\ & (r,f) & \mapsto & \widehat{r} \cdot f \end{array}.$$

Ejemplo 106 *Si $f = (a_0, a_1, ..., a_n, \bar{0}, ...)$ y $r \in R$, entonces*

$$rf =: \widehat{r}f = \left(ra_0, ra_1, ..., ra_n, \bar{0}...\right).$$

De las definiciones y proposiciones antes demostradas, concluímos que para $f \in R^{(\mathbb{N})}$ con $f = (a_0, a_1, ..., a_n, \bar{0}, ...)$ se tiene que $f = a_0 1 + a_1 x + ... + a_n x^n$.

Así que

$$R^{(\mathbb{N})} =: R[x] = \{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in R\}.$$

(El anillo de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$).

Observación 73 *Dada $a \in \mathbb{R}$ existe una única función $Ev(a) : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, a la que llamaremos "evaluación en a", tal que:*

1. $Ev(a)(\hat{r}) = r$, $\forall r \in E$.
2. $Ev(a)(x) = a$.
3. $Ev(a)$ *respeta la suma, el producto y el uno.*

Demostración. Se deja como ejercicio. ■

Proposición 15 $\forall r, s \in \mathbb{R}$, $\forall f,\ g \in \mathbb{R}[x]$:

1. $1 \cdot f = f$.
2. $(rs) \cdot f = r \cdot (s \cdot f)$.

Ejercicio 173 *Si R es un anillo conmutativo que está incluído en un anillo S y $a \in S$, entonces $\exists! Ev_a : R[x] \to S$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} & R[x] \arrow[dr, "Ev_a"] \arrow[d, phantom, "="] & & x \arrow[dr] & \\ R \arrow[ur] \arrow[r, phantom, "\hookrightarrow"] & {} & S & & a \end{tikzcd}$$

Es claro que $Ev_a(r) = r$, $\forall r \in R[x]$, tal que $r = \mathbb{O}$, o grad$(r) = 0$.
Además

$$Ev_a(rx^n) = Ev_a(r) \cdot Ev_a(x^n) = r \cdot Ev_a(x)^n = r \cdot a^n.$$

Así que

$$Ev_a(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) = (a_0 + a_1 a + ... + a_n a^n).$$

Ejercicio 174 *Demuestre que $R[x] \overset{Ev_a}{\to} S$ respeta la suma, el producto y 1.* ***Sugerencia:*** *para demostrar que Ev_a respeta productos, es decir, para ver que*

$$Ev_a(f(x) \circ g(x)) = Ev_a(f(x)) \cdot Ev_a(g(x)),$$

mostrar primero que se cumple para $f(x) = \mathbb{O}$, luego para $f(x) = c \cdot x^n$. Y después hacerlo por inducción sobre el grado de $f \neq \mathbb{O}$.

7.2. La estructura algebraica de $\mathbb{R}[x]$

Definición 98 *Un subconjunto I de $\mathbb{R}[x]$ se llama ideal de $\mathbb{R}[x]$ si*

1. $0 \in I$.
2. $f,\ g \in I \Rightarrow f + g \in I$.
3. $f \in \mathbb{R}[x],\ g \in I \Rightarrow fg \in I \wedge gf \in I$.

Definición 99 *Se dice que un polinomio $f(x)$, distinto de cero es mónico si su coeficiente principal es* 1.

Teorema 91 $I \leqslant \mathbb{R}[x] \Leftrightarrow I = \mathbb{R}[x]\, g(x) :=$

$$= \{f(x)\, g(x) \mid f \in \mathbb{R}[x]\},\ \text{con } g(x) \in \mathbb{R}[x],\ g(x)\ \text{mónico..}$$

Demostración. $\Leftarrow$)
$0 = 0 \cdot g \in I$.
$fg, f'g \Rightarrow fg + f'g = (f + f)'g \in I$.
$f \in \mathbb{R}[x],\ hg \in I \Rightarrow f(hg) = (fh)\, g \in I$.
$\Rightarrow$)
Si $I = \{0\}$ entonces $I = \mathbb{R}[x] \cdot 0$.
Si $I \neq \{0\}$, sea

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists f \in I \text{ tal que } \operatorname{grad}(f) = n\}.$$

Notemos que $A \neq \emptyset$. Escojamos el menor elemento de A (principio del buen orden) y llamémoslo m. Después tomemos una $g \in I$ tal que grad$(g) = m$. (Nótese que se puede escoger g con coeficiente principal 1, multiplicando por el recíproco del coeficiente principal, si fuera necesario).

Demostraremos que $I = \mathbb{R}[x]\, g$.

$\subseteq$) Sea $f \in I$. Por el algoritmo de la división, $f = tg + r$ con $r = 0$ ó grad$(r) <$ grad(g). Si r fuera distinto de 0 entonces $r = f - tg \in I$ y grad$(r) < m =$ men(A) $\overset{\triangledown}{\circ}$.

Por lo tanto $r = 0$ y así $f \in \mathbb{R}[x]\, g$.

$\supseteq$) $g \in I \Rightarrow \mathbb{R}[x] \in I$. ■

Teorema 92 *Sean $I, J \leqslant \mathbb{R}[x]$, entonces:*

1. $I \cap J \leqslant \mathbb{R}[x]$.

2. $I + J = \{i + j \mid i \in I, j \in J\} \leqslant \mathbb{R}[x]$.

3. *$I + J$ es el menor ideal de $\mathbb{R}[x]$ que incluye a $I \cup J$.*

Demostración. 1. a. Como I y J son ideales, entonces $0 \in I$, $0 \in J$, por lo que $0 \in I \cap J$.

1.b.

$$f,\ g \in I \cap J \Rightarrow (f, g \in I) \wedge (f, g \in J) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (f + g \in I) \wedge (f + g \in J) \Rightarrow f + g \in I \cap J.$$

1.c.

$$\begin{aligned} f &\in \mathbb{R}[x],\ g \in I \cap J \Rightarrow (f \in \mathbb{R}[x], g \in I, g \in J) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (fg, gf \in I) \wedge (fg, gf \in J) \Rightarrow fg, gf \in I \cap J. \end{aligned}$$

2.a. $0 \in I$, $0 \in J \Rightarrow 0 = 0 + 0 \in I + J$.

2.b. $i + j,\ i' + j' \in I + J \Rightarrow (i + j) + (i' + j') = (i + i') + (j + j') \in I + J$.

2.c. $.h \in \mathbb{R}[x], i + j \in I + J \Rightarrow h(i + j) = hi + hj = ih + jh = (i + j)h \in I + J$.

3.a. $I \subseteq I + J$ ya que $\forall i \in I$, $i = i + 0 \in I + J$. Análogamente, $J \subseteq I + J$. Por lo tanto

$$I \cup J \subseteq I + J.$$

3.b. Veamos ahora que $I + J$ es el menor ideal que incluye a $I \cup J$:
Si $I \cup J \subseteq K \leqslant \mathbb{R}[x]$, entonces $\forall i \in I, \forall j \in J$, $i, j \in K$. Como K es un ideal, $i + j \in K$. Por lo tanto, $I + J \subseteq K$. ■

Definición 100 *$h \in \mathbb{R}[x]$ es el máximo común divisor de f y g si*

1. *$h \mid f,\ h \mid g$ (es decir, h es un divisor común).*

2. *$k \mid f, k \mid g \Rightarrow k \mid h$. (Cualquier otro divisor común divide a h).*

3. *h es mónico. (Es decir, que el coeficiente principal de h es 1).*

Corolario 24 *Dados $f,\ g \in \mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}[x]f + \mathbb{R}[x]g = \mathbb{R}[x]h$, para alguna $h \in \mathbb{R}[x]$, mónico. Además h es el máximo común divisor de f y g.*

Demostración. A la vista de los resultados anteriores, lo único que requiere demostración es la afirmación de que h es el máximo común divisor de f y g.

1. $f \in \mathbb{R}[x]h \Rightarrow f = th$, para alguna h en $\mathbb{R}[x]$. Es decir, $h \mid f$. Análogamente $h \mid g$. Con esto vemos que h es un divisor común de f y de g.

2. Si k es otro divisor común, $k \mid f$ y $k \mid g$. Digamos que

$$f = k\phi \text{ y que } g = k\gamma.$$

También tenemos que

$$h = \alpha f + \beta g.$$

Entonces

$$h = \alpha k\phi + \beta k\gamma = k\left(\alpha\phi + \beta\gamma\right).$$

Así que $k \mid h$. Así que h es el máximo común divisor de f y g. ■

Observación 74 $\mathbb{R}[x]\, h = \mathbb{R}[x]\, ch$, $\forall c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Demostración. $h = 1/c\,(ch) \Rightarrow h \in \mathbb{R}[x]\, ch \Rightarrow \mathbb{R}[x]\, h \subseteq \mathbb{R}[x]\, ch$.
Análogamente, $(ch) \in \mathbb{R}[x] \cdot h \Rightarrow \mathbb{R}[x] \cdot ch \subseteq \mathbb{R}[x] \cdot h$. ■

Observación 75 *El máximo común divisor de dos polinomios es único.*

Demostración. Sean d, $d\acute{}$ dos máximos divisores comunes de f y de g.
d divisor común y $d\acute{}$ máximo común divisor $\Rightarrow d \mid d\acute{}$.
Por simetría, $d\acute{} \mid d$.
$d \mid d\acute{} \Rightarrow d\alpha = d\acute{}$, para alguna $\alpha \in \mathbb{R}[x]$.
$d\acute{} \mid d \Rightarrow d\acute{}\beta = d$, para alguna $\beta \in \mathbb{R}[x]$.
Entonces $d = d\acute{}\beta = d\alpha\beta$. Luego

$$0 = \operatorname{grad}(\alpha\beta) = \operatorname{grad}(\alpha) + \operatorname{grad}(\beta).$$

Por lo que α y β son polinomios constantes.

Como d y $d\acute{}$ son mónicos y $d = d\acute{}\beta$, tienen coeficiente principal 1 y β, tenemos que $\beta = 1$, así que $d = d\acute{}$. ■

Definición 101 $m(x) \in \mathbb{R}[x]$ *es el mínimo común múltiplo de* f *y de* g *(se escribe* $m(x) = [f; g]$*) si*

1. $m(x)$ *es un múltiplo común de* f *y de* g*:* $m(x) \in \mathbb{R}[x]\, f$, $m(x) \in \mathbb{R}[x]\, g$.

2. *Si* $k(x)$ *es otro múltiplo común entonces* $k(x)$ *es múltiplo de* $m(x)$: $k(x) \in \mathbb{R}[x]\, f$, $k(x) \in \mathbb{R}[x]\, g \Rightarrow m(x) \mid k(x)$.

3. $m(x)$ *es mónico.*

Observación 76 *Dados* $f,\ g \in \mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}[x]f \cap \mathbb{R}[x]g = \mathbb{R}[x]h$, *p. a.* $h \in \mathbb{R}[x]$, *h.mónico Además* h *es el mínimo común múltiplo de* f *y* g.

Demostración. h es el mínimo común múltiplo de f y g:
$h \in \mathbb{R}[x]f \cap \mathbb{R}[x]g \Rightarrow h = \alpha f \wedge h = \beta g \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} f \mid h \\ g \mid h \end{array} \right. \Rightarrow h$ es múltiplo común de f y de g.
$\left\{ \begin{array}{c} f \mid k \\ g \mid k \end{array} \right. \Rightarrow k \in \mathbb{R}[x]f \wedge k \in \mathbb{R}[x]g \Rightarrow k \in \mathbb{R}[x]f \cap \mathbb{R}[x]g = \mathbb{R}[x]h \Rightarrow h \mid k.$
Por lo que h es el mínimo múltiplo común de f y de g. ■

Definición 102 $f \in F[x]$, *F un campo, es irreducible si:*

1. *grad*$(f) > 0$.
2. $f = g \cdot h \Rightarrow$ *grad*$(g) = 0 \vee$ *grad*$(h) = 0$.

Observación 77 *Sean* $f,\ h \in F[x]$, f *irreducible y mónico. Entonces* $(f;h) = f \vee (f;h) = 1$.

Demostración. $f = (f;h)\,k$, p. a. $k \in F[x]$. Entonces $\text{grad}(f;h) = 0 \vee \text{grad}(k) = 0$.

Si $\text{grad}(k) = 0$, entonces k es el coeficiente principal de $(f;h)\,k$, que es el coeficiente principal de f que es 1, así $k = 1$ y $f = (f;h)$.

Si $\text{grad}(f;h) = 0$, análogamente al argumento anterior, concluimos que $f = k$. ■

Corolario 25 $x^2 + a$ *es irreducible en* $\mathbb{R}[x]$ *si* $a \in \mathbb{R}^+$.

Demostración. Supóngase que $x^2 + a = f \cdot g$ con $\text{grad}(f) = \text{grad}(g) = 1$ (supongamos que $f = x + r$). Entonces $x + r \mid x^2 + a \Rightarrow Ev_{(-r)}(x^2 + a) = 0 \Rightarrow r^2 + a = 0$ $\overset{\nabla}{\circ}$ (la suma de dos reales positivos es un real positivo). ■

Corolario 26 $x^2 + 1$ *es irreducible en* $\mathbb{R}[x]$.

Definición 103 *En* $\mathbb{R}[x]$ *definimos la relación de "congruencia módulo* x^2+1*" por:*

$$f \overset{x^2+1}{\equiv} g \text{ si } \left(x^2+1\right) \mid (f-g)$$

($\Leftrightarrow (f-g) \in \mathbb{R}[x]\left(x^2+1\right)$*).*

Proposición 16 $\overset{x^2+1}{\equiv}$ *es una relación de equivalencia en* $\mathbb{R}[x]$*.*

Demostración.
Reflexividad)

$$f \overset{x^2+1}{\equiv} f \text{ ya que } f - f = 0(x) \in \mathbb{R}[x]\left(x^2+1\right).$$

Simetría)

$$\begin{gathered} f \overset{x^2+1}{\equiv} g \Rightarrow (f-g) \in \mathbb{R}[x]\left(x^2+1\right) \Longrightarrow \\ -(f-g) \in \mathbb{R}[x]\left(x^2+1\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow (g-f) \in \mathbb{R}[x]\left(x^2+1\right) \Rightarrow g \overset{x^2+1}{\equiv} f. \end{gathered}$$

Transitividad)

$$\begin{gathered} f \overset{x^2+1}{\equiv} g \overset{x^2+1}{\equiv} h \Rightarrow (f-g) \in \mathbb{R}[x]\left(x^2+1\right) \wedge (g-h) \in \mathbb{R}[x]\left(x^2+1\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow (f-g)+(g-h) \in \mathbb{R}[x]\left(x^2+1\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow (f-h) \in \mathbb{R}[x]\left(x^2+1\right) \Rightarrow f \overset{x^2+1}{\equiv} h. \\ \mathbb{C} = \mathbb{R}[x] / \overset{x^2+1}{\equiv} = \left\{\overline{f(x)} \mid f(x) \in \mathbb{R}[x]\right\}. \end{gathered}$$

Donde $\overline{f(x)}$ denota la clase de congruencia de $f(x)$. ■

Definición 104 *Dotamos a* $\mathbb{C}$ *de suma y de producto mediante las definiciones siguientes*

$$\begin{array}{rccc} \tilde{+}: & \mathbb{C}\times\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \left(\bar{f},\bar{g}\right) & \longmapsto & \overline{f+g} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\cdot}: & \mathbb{C}\times\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \left(\bar{f},\bar{g}\right) & \longmapsto & \overline{f\cdot g} \end{array}.$$

Ejercicio 175 *Demostrar que las operaciones recién definidas están bien definidas, es decir, no dependen de la elección de los representantes en las clases de congruencia.*

Proposición 17 $\left(\mathbb{C}, \tilde{+}, \vec{0}, \tilde{\cdot}, \bar{1}\right)$ *es un anillo conmutativo (el anillo de los complejos).*

Demostración. 1. $\bar{f}+\bar{0}=\overline{f+0}=\overline{f}=\overline{0}+\overline{f}$, $\forall \overline{f} \in \mathbb{C}$.

2.$\overline{f}+\left(\overline{g}+\overline{h}\right)=\overline{f}+\left(\overline{g+h}\right)=\overline{f+(g+h)}=\overline{(f+g)+h}=\left(\overline{f+g}\right)+\bar{h}=\left(\bar{f}+\bar{g}\right)+\bar{h}, \forall f,\ g,\ h \in \mathbb{C}$.

3. $\bar{f}+\bar{g}=\overline{f+g}=\overline{g+f}=\bar{g}+\bar{f}, \forall f,\ g \in \mathbb{C}$.

4. $\bar{f}+\overline{-f}=\overline{f+(-f)}=\bar{0}$, por lo tanto $\overline{-f}=-\bar{f}, \forall \overline{f} \in \mathbb{C}$.

5.

$$\overline{f}\cdot\left(\overline{g}\cdot\overline{h}\right)=\overline{f}\cdot\left(\overline{g\cdot h}\right)=\overline{f\cdot(g\cdot h)}=$$
$$=\overline{(f\cdot g)\cdot h}=\left(\overline{f\cdot g}\right)\cdot\bar{h}=\left(\bar{f}\cdot\bar{g}\right)\cdot\bar{h}, \forall f,\ g,\ h \in \mathbb{C}.$$

6. $\bar{f}\cdot\bar{1}=\overline{f\cdot 1}=\overline{f}=\overline{1}\cdot\overline{f}$, $\forall f \in \mathbb{C}$.

7. $\bar{f}\cdot\bar{g}=\overline{f\cdot g}=\overline{g\cdot f}=\bar{g}\cdot\bar{f}, \forall f,\ g \in \mathbb{C}$.

8.

$$\overline{f}\cdot\left(\overline{g}+\overline{h}\right)=\overline{f}\cdot\left(\overline{g+h}\right)=\overline{f\cdot g+f\cdot h}=$$
$$=\overline{f\cdot g}+\overline{f\cdot h}=\overline{f}\cdot\overline{g}+\overline{f}\cdot\overline{h}, \forall f,\ g,\ h \in \mathbb{C}.$$

■

Proposición 18 *La función $\Psi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, definida por $\Psi(r)=\bar{r}$, respeta la suma el producto, el uno y es inyectiva.*

Demostración. Sean $r, s \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $\Psi(r+s)=\overline{r+s}=\bar{r}+\bar{s}=\Psi(r)+\Psi(s)$.
2. $\Psi(r\cdot s)=\overline{r\cdot s}=\bar{r}\cdot\bar{s}=\Psi(r)\cdot\Psi(s)$.
3. $\Psi(1_{\mathbb{R}})=\overline{1_{\mathbb{R}}}=1_{\mathbb{C}}$.
4.

$$\Psi(r)=\Psi(s)\Rightarrow\bar{r}=\bar{s}\Rightarrow r\overset{x^2+1}{\equiv}s\Rightarrow\left(x^2+1\right)\mid(r-s).$$

Pero como $r-s$ es 0 o su grado es cero, entonces $r-s=0$. Por lo tanto $r=s$. ■

Observación 78 *En $\mathbb{C}$, $\overline{x}^2=\overline{-1}$.*

Demostración. $x^2+1\overset{x^2+1}{\equiv}0\Rightarrow\bar{0}=\overline{x^2+1}=\bar{1}+\overline{x^2}=\bar{1}+\overline{x}^2\Rightarrow\overline{x}^2=-\bar{1}$ ■

Proposición 19 *Denotando $\overline{x}$ con i, tenemos que $\forall f\in\mathbb{C}$, $f=\overline{a}+\overline{b}i$, con $a,\ b\in\mathbb{R}$.*

Demostración. Aplicando el algoritmo de la división a f y a x^2+1 :

$$\begin{array}{ll} & \quad q(x) \\ x^2+1 & \overline{\big)\ f(x)} \\ & \quad r(x) \qquad 0=r(x) \text{ ó } \operatorname{grad}(r(x))<\operatorname{grad}(x^2+1)=2 \end{array}$$

como $0 = r(x)$ o bien grad$(r(x)) \leqslant 1$, en cualquier caso podemos escribir $r(x) = a + bx$, con $a,\ b \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\overline{f} = \overline{q} \cdot \overline{(x^2+1)} + \overline{a} + b\overline{x}.$$

Ahora, notando que $\overline{(x^2+1)} = \bar{0}$, que se puede identificar r con $\bar{r}$ para $r \in \mathbb{R}$, podemos escribir

$$\overline{f} = \overline{a} + b\overline{x} = a + bi.$$

■

Teorema 93 $\mathbb{C}$ *es un campo.*

Demostración. Sea $\bar{f} \in \mathbb{C}\setminus\{\overline{0}\}$, entonces $x^2+1 \nmid f \Rightarrow (x^2+1; f) = 1 \Rightarrow 1 = \alpha(x)(x^2+1) + \beta(x) f$
$\Rightarrow \overline{\beta(x) f} = \overline{1} \Rightarrow \overline{\beta} = \overline{f^{-1}}$. ■

Recordemos el "Teorema fundamental del Álgebra":

$(f(x) \in \mathbb{C}[x], grad(f) \geq 1) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{C}$ tal que $f(c) = 0$.

Ejercicio 176 *Demuestre que los únicos polinomios irreducibles en $\mathbb{C}[x]$ son los de grado 1.*

Ejercicio 177 *Demuestre que si $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $f(c) = 0$, con $c \in \mathbb{C}$, entonces $f(\bar{c}) = 0$, donde $\bar{c}$ es el conjugado de c.*

Ejercicio 178 *Demuestre que los únicos polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$ son los de grado 1 y los de grado 2 que no tienen raíces reales (¿cuáles son éstos).*

Ejercicio 179 *Demuestre que un polinomio de grado 3 es irreducible $\Leftrightarrow$ f no tiene raíces.*

Sea $a_nx^n + ... + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Muestre que si $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, $((c;d) = 1, c, d \in \mathbb{Z})$ es una raíz entonces c divide a a_0 y d divide a a_n.

Ejercicio 180 *Demuestre que si $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 \in Z[x]$ tiene una raíz racional, esta raíz tiene que ser entera.*

Ejercicio 181 *Demuestre que $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q}$, $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[n]{m} \in \mathbb{Z}$.*

Ejercicio 182 *Demuestre que $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[6]{18}$, $\sqrt[5]{24}$ son irracionales.*

Ejercicio 183 *Demuestra que $x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ es irreducible.*

Ejercicio 184 *Sean $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$. Demuestre que $(f; g) = 1 \Leftrightarrow f, g$ no tienen raíces en común.*

Ejercicio 185 *Sea*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[x] & \xrightarrow{D} & \mathbb{C}[x] \\ f(x) & \mapsto & f'(x) \end{array},$$

el operador derivada. Sea $f(x)$ mónico. Demuestre que todas las raíces de f son distintas (es decir de multiplicidad 1) $\Leftrightarrow (f; f') = 1$.(Equivalentemente: t tiene una raíz múltiple $\Leftrightarrow (f; f') \neq 1$).

Considere $\begin{array}{ccccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q}[x] & & x \\ & \overset{incl.}{\searrow} & \downarrow^{ev_r} & & \bar{\downarrow} \\ & & \mathbb{R} & & r \end{array}$. *Cuando ev_r es inyectiva, se dice que r es trascendente. En caso contrario, se dice que r es algebraico sobre $\mathbb{Q}$. ($\sqrt{2}$ es algebraico, π, e son trascendentes).*

Ejercicio 186 *Demuestre que*

1. *a*) r algebraico $\Rightarrow \mu_r(x)$ es irreducible.

2. El subanillo de $\mathbb{R}$ generado por $\mathbb{Q}$ y r es $\{f(r) \mid f \in \mathbb{Q}[x]\}$. (El subanillo mencionado se denota $\mathbb{Q}(r)$).

3. Use el algoritmo de la división para mostrar que

   $\mathbb{Q}(r) = \{g(r) \mid grad(g) < grad(\mu_r)\}$.

   $$\left(\begin{array}{ll} \mu_r \overset{\displaystyle q(x)}{\overline{\big)\, f(x)}} & \\ \quad\;\; g(x) & \text{donde } grad(g(x)) < grad(\mu_r)\text{, si } g(x) \text{ no es cero.} \end{array} \right)$$

Ejercicio 187 *Demuestre que si r es algebraico sobre $\mathbb{Q}$, entonces $\mathbb{Q}[r]$ es un campo. Sugerencia: $h(r) \neq 0 \Rightarrow (h; \mu_r) = 1$ (μ_r es irreducible). Entonces se puede escribir 1 en la forma $1 = \alpha h + \beta\mu$, donde α y β son polinomios. Entonces $\alpha(r)$ es el inverso de $h(r)$.*

Ejercicio 188 *Encuentre el inverso multiplicativo de $\left(\sqrt[3]{2}\right)^4 + \sqrt[3]{2} + 3$ en $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{2}\right]$. Sugerencia: encuentre primero el polinomio mínimo para $\sqrt[3]{2}$.*

Ejercicio 189 *Sean $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ distintos, demostrar que*

$$\begin{vmatrix} 1 & c_1 & (c_1)^2 & \cdots & (c_1)^{n-1} \\ 1 & c_2 & (c_2)^2 & \cdots & (c_2)^{n-1} \\ 1 & c_3 & (c_3)^2 & \cdots & (c_3)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c_n & (c_n)^2 & \cdots & (c_n)^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j<i} (c_i - c_j).$$

Sugerencia: considere $P_{n-1}(\mathbb{R}) = \{f(x) \mid f(x)$ es el polinomio 0 o $grad(f) \leq n - 1\}$, $\beta = \{1, x, x^2, ..., x^{n-1}\} \underset{base}{\hookrightarrow} P_{n-1}(\mathbb{R})$. Note que $\begin{array}{ccc} P_{n-1}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{ev_{c_i}} & \mathbb{R} \\ f(x) & \longmapsto & f(c_i) \end{array}$ es una función lineal y que

$$\begin{array}{ccc} P_{n-1}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^n \\ f(x) & \longmapsto & \begin{pmatrix} f(c_1) \\ f(c_2) \\ \vdots \\ f(c_n) \end{pmatrix} \end{array}$$

también es una función lineal, cuya matriz respecto a βy a la base canónica de $\mathbb{R}^n$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1(c_1) & x(c_1) & \cdots \\ 1(c_2) & x(c_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ 1(c_n) & x(c_n) & \cdots \\ & & \end{pmatrix}.$$

Para hacer una demostración por inducción tomemos $\beta\prime$=$\{1, x, ..., h(x)\}$ tal que

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & \cdots & c_1^{n-2} & 0 \\ 1 & c_2 & \cdots & c_2^{n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & c_{n-1} & & c_{n-1}^{n-2} & 0 \\ 1 & c_n & \cdots & c_n^{n-2} & 1 \end{pmatrix}.$$

(Estamos pidiendo que $h(c_1) = 0, h(c_2) = 0, ..., h(c_{n-1}) = 0, h(c_n) = 1$.) Entonces $[T]_{\beta}^{\beta} = [T]_{\beta'}^{\beta} [Id]_{\beta}^{\beta'}$.

Base de la inducción: $\begin{vmatrix} 1 & c_1 \\ 1 & c_2 \end{vmatrix} = c_2 - c_1.$

Capítulo 8

Vectores propios y diagonalización

8.1. Vectores y valores propios

1. Sea $V \overset{T}{\to} V$ un operador lineal. Decimos que $\vec{0} \neq \vec{v} \in V$ es un vector propio de T correspondiente al valor propio λ si:
$$T\left(\vec{x}\right) = \lambda\vec{x}.$$

Decimos que λ es un valor propio de la matriz A si λ es un valor propio del operador $F^n \xrightarrow{A\cdot\_} F^n$. Es decir λ es un valor propio de A si $\exists\vec{x} \in F^n$tal que

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

Ejemplo 107 *Por ejemplo los elementos distintos de $\vec{0}$ en Ker(T) son los vectores propios de T correspondientes a* 0.

Ejemplo 108 *Si $\theta \in (0, \pi)$ entonces la rotación $\rho_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ no tiene vectores propios (si $\vec{v}$ fuera un vector propio entonces $\rho_\theta\left(\vec{v}\right), \vec{v}$ y $\vec{0}$ deberían estar en la misma recta. Cosa que no sucede.*

Ejemplo 109 *Todos los vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$ son vectores propios de $\rho_\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, la rotación por un ángulo π.*

Ejemplo 110 *Consideremos el operador derivada*

$$\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}\right) \overset{D}{\to} \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}\right)$$

en el subespacio de las funciones en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *que tienen derivadas de todos los órdenes. Los vectores propios de* D *correspondientes al valor propio* 1 *son las funciones no nulas tales que*

$$Df = f$$

es decir

$$\{ce^x \mid c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

Teorema 94 *Son equivalentes para* $c \in F$, *y* $T : V \to V$.

1. c es un valor propio de T.
2. $\ker(T - cId_V) \neq \left\{\vec{0}\right\}$.
3. $T - c \cdot Id_V$ no es inyectiva.

Demostración. Se sigue de que

$$T(\vec{v}) = c\vec{v}, \Longleftrightarrow T(\vec{v}) - c\vec{v} = \vec{0} \Longleftrightarrow (T - cId)(\vec{v}) = \vec{0}.$$

■

En el caso de que V sea de dimensión finita, podemos agregar los siguientes incisos

- $T - c \cdot Id_V$ no es biyectiva.
- $[T - c \cdot Id_V]_\beta^\beta$ no es invertible.
- $\det [T - c \cdot Id_V]_\beta^\beta = 0$.

Teorema 95 *Son equivalentes para* $\vec{0} \neq \vec{v} \in V, V \to V, \lambda \in F$, $\dim(V) = n$.

1. $T(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.
2. $[T]_\beta^\beta (\vec{x}) = \lambda [\vec{x}]_\beta$.

Demostración. Se sigue del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rrr, "T"] \arrow[ddd, "\varphi_\beta"'] & & & V \arrow[ddd, "\varphi_\beta"] \\
& \vec{v} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & T(\vec{v}) = \lambda\vec{v} \arrow[d, mapsto] & \\
& [\vec{x}]_\beta \arrow[r, mapsto] & [T]_\beta^\beta (\vec{v}) = \lambda [\vec{v}]_\beta & \\
F^n \arrow[rrr, "{[T]_\beta^{\beta'} \cdot -}"'] & & & F^n
\end{tikzcd}$$

■

Ejemplo 111 *Si λ es un valor propio de $A \in M_{n\times n}(F)$, entonces*

1. *λ^k es un valor propio de A^k.*
2. *λ^k es un valor propio de $c \cdot A^k$, $\forall c \in F$.*
3. *$f(\lambda)$ es un valor propio de $f(A)$.*

Pues $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Rightarrow AA\vec{x} = A\lambda\vec{x} = \lambda A\vec{x} = \lambda\lambda\vec{x}$. por inducción $A^k\vec{x} = \lambda^k\vec{x}$. En general, si $f(t) = a_0 + ... + a_k t^k$, entonces

$$(f(t)(A))(\vec{x}) = (f(A))(\vec{x}) = \left(a_0 I_n + ... + a_k A^k\right)(\vec{x}) = a_0\vec{x} + a_1\lambda\vec{x} ... + a_k\lambda^k\vec{x} =$$

$$= \left(a_0 + a_1\lambda ... + a_k\lambda^k\right)\vec{x} = f(\lambda)\vec{x}.$$

Ejercicio 190 *Se dice que una matriz $A \in M_{n\times n}(F)$, es nilpotente si*

$$A^k = 0, \text{ para alguna } k \in \mathbb{N}.$$

Demuestre que si A es nilpotente entonces 0 es valor propio de A, y es el único valor propio de A.

8.2. El polinomio característico

Nota 4 *Si R es un anillo conmutativo, y A es una matriz de $n \times n$ con coeficientes en R, tenemos por definición que*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sig(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} A_{n,j} \det\left(\widehat{A_{n,j}}\right).$$

Observación 79 *Si $A, B \in M_{n\times n}(F)$ entonces $A+tB \in M_{n\times n}(F[t])$ y $\det(A+tB) \in P_n[F]$ el conjunto de los polinomios de grado $\leqslant n$, junto con el polinomio $\mathbb{O}$.*

Demostración. Por inducción sobre n.
Base. Si $n = 1$, entonces $A + tB = (a) + t(b) = (a + tb)$, cuyo determinante es

$$a + tb \in P_1[F].$$

Paso inductivo.

$$\det(A+tB) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} (A_{n,j} + tB_{n,j}) \det\left(A_{n,\widehat{j+t}B_{n,j}}\right) =$$

$$= \sum_{j=1} (-1)^{n+j} (A_{n,j} + tB_{n,j}) \det\left(\widehat{A_{n,j}} + t\widehat{B_{n,j}}\right).$$

Con $(A_{n,j} + tB_{n,j}) \in P_1(F)$ y $\det\left(\widehat{A_{n,j}} + t\widehat{B_{n,j}}\right) \in P_{n-1}(F)$ ■

Definición 105 *Si $A \in M_{n\times n}(F)$ definimos el polinomio característico de A, $\chi_{_A}(t)$ por:*

$$\chi_{_A}(t) = \det(A - tI_n).$$

Lema 16 *Si $A \in M_{n\times n}(F)$ entonces $\chi_{_A}(t)$ es un polinomio de grado n con coeficiente principal $(-1)^n$.*

Demostración. Por la Observación anterior, $\chi_{_A}(t) \in P_n(F)$.
Por inducción sobre n.
Base.
Si $n = 1$ entonces $\chi_{_{(a)}}(t) = \det((a) - tI_1) = \det((a - t)) = a - t$.

Paso inductivo.
Si $A \in M_{n\times n}(F)$, entonces

$$\chi_{_A}(t) = \det(A - tI_n) =$$

$$= \left(\sum_{j<n} (-1)^{n+j} \left(A_{n,j} - t \cdot (I_n)_{n,j} \right) \det \left(\widehat{A_{n,j} - t\,(I_n)_{n,j}} \right) \right) +$$

[1]

$$+ \left(A_{n,n} - t\,(I_n)_{n,n} \right) \det \left(\widehat{A_{n,n} - t\,(I_n)_{n,n}} \right).$$

Ahora,

$$\det(\widehat{A_{n,n} - t(I_n)_{n,n}}) = \det(\widehat{A_{n,n}} - t\widehat{(I_n)_{n,n}}) = \det(\widehat{A_{n,n}} - tI_{n-1}) = \chi_{\widehat{A_{n,n}}}(t)$$

Así que el coeficiente principal de $\chi_{_A}(t)$ es

$$(-1)(-1)^{n-1} = (-1)^n.$$

■

Teorema 96 *Dos matrices similares $A, B \in M_{n\times n}(F)$ tienen el mismo polinomio característico.*

Demostración. Supongamos que $A = Q^{-1}BQ$. Entonces

$$\chi_{_A}(t) = \det(A - tI_n) = \det\left(Q^{-1}BQ - tI_n\right) = \det\left(Q^{-1}BQ - tQ^{-1}I_nQ\right) =$$
$$= \det\left(Q^{-1}(B - tI_n)Q\right) = \det\left(Q^{-1}\right)\det(B - tI_n)\det(Q) =$$
$$= \det(B - tI_n) = \chi_{_B}(t).$$

■

Recordando que dos matrices cuadradas $A, B \in M_{n\times n}(F)$ son similares si y sólo si representan a un mismo operador, podemos hacer la siguiente definición.

Definición 106 *Si $V \xrightarrow{T} V$ es un operador lineal en un espacio de dimensión n, el polinomio característico de T, $\chi_{_T}(t)$ se define como $\chi_{_A}(t)$, donde A es cualquier matriz que represente a T.*

---

[1] $t \cdot (I_n)_{n,j} = 0$ si $n \neq j$.

Observación 80 *En vista del Teorema 95 tenemos que los valores propios de un operador* $V \xrightarrow{T} V$ *en un espacio de dimensión finita, son los mismos que los valores propios de cualquier matriz* $[T]_{\beta}^{\beta}$ *que represente al operador.*

Teorema 97 *Sea* $A \in M_{n\times n}(F)$*, los valores propios de* A *son las raíces de su polinomio característico.*

Demostración. Como tenemos que λ es un valor propio de A si y sólo si $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Basta demostrar que

$$\chi_{A}(t)(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Ahora,

$$\chi_{A}(t) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \left(A_{n,j} - t(I_n)_{n,j}\right) \det\left(\widehat{A_{n,j} - t(I_n)_{n,j}}\right).$$

Recordemos que $F[t] \xrightarrow{Ev_\lambda} F$ es un morfismo de anillos, así que Ev_λ respeta sumas y productos, por lo que podemos escribir

$$\chi_{A}(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \left(A_{n,j} - \lambda(I_n)_{n,j}\right) \det\left(\widehat{A_{n,j} - \lambda(I_n)_{n,j}}\right) =$$

$$= \det(A - \lambda I_n).$$

■

Ejemplo 112 *Calculemos el polinomio característico de* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\chi_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}(t) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 0 \\ 2 & 1-t \end{pmatrix} =$$

$$= 1 - 2t + t^2 = (t-1)^2.$$

Luego el único valor propio de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *es* 1.

En efecto: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. *Ahora, los vectores propios de*

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *son las soluciones de* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$.
Que a su vez, son las soluciones de

$$x_1 = 0.$$

Es decir, $x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 \in F \backslash \left\{ \vec{0} \right\}$ *son los vectores propios de* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 113 *Sea*

$$\begin{array}{ccc} P_2 & \xrightarrow{T} & P_2 \\ f & \mapsto & f + tf' + f'' \end{array},$$

Sea $\beta = \{1, t, t^2\}$ *la base canónica de* T*. Entonces*

$$[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Así que

$$\chi_{[T]_\beta^\beta}(t) = \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 0 & 2-t & 2 \\ 0 & 0 & 3-t \end{pmatrix} = (1-t)(2-t)(3-t).$$

Por lo que los valores propios de T *son* $1, 2, 3$.
Resolvamos

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \vec{x} = \vec{0}$$

es decir, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $x_2 = 0 = x_3$. *Por lo tanto las soluciones son* $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Análogamente, para encontrar los vectores propios de* $[T]_\beta^\beta$ *correspondientes a* 2 *resolvemos*

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \vec{x} = \vec{0},$$

cuya matriz del sistema es $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ahora. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *de donde se tiene que*

$$x_1 = x_2, \ x_3 = 0.$$

Una solución es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Por último resolvamos

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \vec{x} = \vec{0},$$

Con matriz asociada

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así que $x_1 = x_3, x_2 = 2x_3$ *una solución es* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Así, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *son los vectores propios de* $[T]_\beta^\beta$. *Por lo que*

$$\varphi_\beta^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \ \varphi_\beta^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 11 + t, \ \varphi_\beta^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 2t + t^2$$

deben ser los vectores propios de T :
$T(1) = 1 = 1 \cdot 1,$
$T(1+t) = 1 + t + t \cdot \frac{d}{dt}(1+t) + \frac{d}{dt}(1+t) = 2 + 2t = 2 \cdot (1+t)$
$T(1+2t+t^2) = 1 + 2t + t^2 + t \cdot \frac{d}{dt}(1+2t+t^2) + \frac{d}{dt}(1+2t+t^2) =$
$3 + 6t + 3t^2 = 3 \cdot (1+2t+t^2)$.

Definición 107 *1. Si* $V \xrightarrow{T} V$ *es un operador lineal, decimos que* T *es diagonalizable si existe una base* β *de* V *formada por vectores propios de* V*.*

2. Decimos que una matriz $A \in M_{n\times n}(F)$ *es diagonalizable si es similar a una matriz diagonal.*

Teorema 98 *Si* $V \xrightarrow{T} V$ *es un operador lineal en un espacio de dimensión* n*, son equivalentes:*

1. T *es diagonalizable.*
2. $\exists\beta$ *base de* ${}_FV$ *tal que* $[T]_\beta^\beta$ *es diagonalizable.*
3. $[T]_\gamma^\gamma$ *es diagonalizable* $\forall\gamma \underset{base}{\hookrightarrow} {}_FV$*.*

Demostración. 1)⇒ 2) Sea $\beta = \{\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n\}$ una base de ${}_FV$ formada por vectores propios de ${}_FV$. Digamos que

$$T(\vec{x}_i) = \lambda_i \vec{x}_i.$$

Entonces

$$[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Que no sólo es diagonalizable sino que ya es diagonal. (Es diagonalizable pues es similar a sí misma).

2)⇒3) Si $[T]_\beta^\beta$ es diagonalizable, entonces $[T]_\beta^\beta$ es similar a una matriz diagonal, digamos D. Entonces $[T]_\beta^\beta \backsimeq D$. Cualquier otra matriz $[T]_\gamma^\gamma$ que represente a T, también es similar a $[T]_\beta^\beta$. Así que

$$[T]_\gamma^\gamma \backsimeq [T]_\beta^\beta \backsimeq D.$$

3)⇒ 2) Obvio.

2)⇒1) Supongamos que $\beta = \{\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n\}$ y que

$$[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\varphi_{_\beta}\left(T\left(\vec{x}_j\right)\right) = \left[T\left(\vec{x}_j\right)\right]_\beta = \left([T]_\beta^\beta\right)^{\underline{j}} = \lambda_j \vec{e}_j.$$

Aplicando $\varphi_{_\beta}^{-1}$ obtenemos

$$T\left(\vec{x}_j\right) = \varphi_{_\beta}^{-1}\left(\lambda_j \vec{e}_j\right) = \lambda_j \varphi_{_\beta}^{-1}\left(\vec{e}_j\right) = \lambda_j \vec{x}_j.$$

Además cada $\vec{x}_j \neq \vec{0}$, por formar parte de una base β de V. Entonces β es una base formada por vectores propios de T. ■

Corolario 27 *A es diagonalizable si y sólo si $A \cdot \_$ es diagonalizable.*

Demostración. $A = \left[F^n \xrightarrow{A\cdot\_} F^n\right]_{can}^{can}$. ■

8.3. Espacios propios y diagonalizabilidad

Definición 108 *Sea ${}_FV \xrightarrow{T} {}_FV$ un operador lineal y sea $\lambda \in F$. Definimos*

$$E_\lambda = Ker(T - \lambda Id_V).$$

Observación 81 *λ es un valor propio de T si y sólo si $E_{_\lambda} \neq \left\{\vec{0}\right\}$.*

Lema 17 *Sean $\lambda \neq \gamma$ dos valores propios distintos de T. Supongamos que $\vec{v} \in E_\lambda, \vec{w} \in E_\gamma$ son vectores propios de T (por lo tanto ambos son distintos de $\vec{0}$). Entonces $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ es linealmente independiente en V.*

Demostración. Si $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ fuera linealmente dependiente entonces uno de los dos vectores sería combinación lineal de los anteriores, pero no es $\vec{v}$, porque $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Entonces

$$\vec{w} = c\vec{v} \tag{8.1}$$

Apliquemos T, para obtener

$$\gamma\vec{w} = c\lambda\vec{v}.$$

Ahora multipliquemos la ecuación 8.1 por γ para obtener

$$\gamma\vec{w} = c\gamma\vec{v}$$

Restando la última ecuación de la penúltima, obtenemos

$$\vec{0} = c\,(\lambda - \gamma)\,\vec{v}.$$

En vista de que $\vec{v} \neq \vec{0}$, tenemos que $c\,(\lambda - \gamma) = 0$, pero como $\lambda \neq \gamma$, entonces $c = 0$, por lo que $\vec{w} = 0\vec{v} = \vec{0}.\underset{\circ}{\nabla}$ ■

Podemos generalizar el Lema anterior de la manera siguiente:

Teorema 99 *Sea $\{\vec{v}_i\}_{i\in X}$ un conjunto de vectores propios de T, tales que $\vec{v}_i$ corresponde al valor propio λ_i de T y además $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Entonces $\{\vec{v}_i\}_{i\in X}$ es un conjunto l. i en V.*

Demostración. Recordemos un conjunto es linealmente independiente si y sólo si cada uno de sus subconjuntos finitos es linealmente independiente. Entonces podemos suponer sin perder generalidad que $\{\vec{v}_i\}_{i\in X}$ es finito.

Demostraremos que $\{\vec{v}_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ es finito por inducción sobre n.

Base. Si $n = 1$, no hay nada que demostrar, pues un conjunto con un único vector distinto de $\vec{0}$ es *l. i.*

Paso inductivo. Supongamos que $n > 1$ y que la afirmación es cierta para $n-1$.

Si

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1}, \vec{v}_n\}$$

no fuera *l. d.* entonces un vector de la lista es combinación lineal de los anteriores, pero como, por hipótesis de Inducción, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1}\}$ es *l. i.* entonces $\vec{v}_n$ tendría que ser combinación lineal de los anteriores.

$$\vec{v}_n = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_{n-1}\vec{v}_{n-1}.$$

A la ecuación anterior primero le aplicamos T y luego la multiplicamos por λ_n para obtener respectivamente

$$\lambda_n\vec{v}_n = c_1\lambda_1\vec{v}_1 + c_2\lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + c_{n-1}\lambda_{n-1}\vec{v}_{n-1}$$

y

$$\lambda_n \vec{v}_n = c_1 \lambda_n \vec{v}_1 + c_2 \lambda_n \vec{v}_2 + ... + c_{n-1} \lambda_n \vec{v}_{n-1}.$$

Restando la segunda a la primera, obtenemos

$$\vec{0} = c_1 (\lambda_1 - \lambda_n) \vec{v}_1 + c_2 (\lambda_2 - \lambda_n) \vec{v}_2 + ... + c_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) \vec{v}_{n-1}.$$

Como $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_{n-1}\}$ es *l. i.*, entonces los coeficientes de la ecuación anterior son todos 0:

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_n) = 0 = c_2 (\lambda_2 - \lambda_n) = ... = c_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n)$$

y como $\lambda_n \notin \{\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}\}$, entonces cada $c_i = 0$.

Por lo tanto

$$\vec{v}_n = 0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + ... + 0 \cdot \vec{v}_{n-1} = \vec{0}. \underset{\circ}{\nabla}$$

■

Lema 18 *Si* $\{\lambda_i\}_{i \in X}$ *es una familia de escalares distintos y* ${}_FV \xrightarrow{T} {}_FV$ *es un operador lineal, entonces la suma de los espacios propios* E_{λ_i} *es directa. Es decir*

$$\sum_{i \in X} E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i \in X} E_{\lambda_i}.$$

Demostración. Necesitamos ver que la intersección de uno de los subespacios con la suma de los demás es el subespacio $\left\{\vec{0}\right\}$.

Supongamos que

$$E_{\lambda j} \cap \sum_{i \in X^o \{j\}} E_{\lambda_i} \neq \left\{\vec{0}\right\}.$$

Entonces

$$\exists \dot{0} \neq \vec{x}_j \in E_{\lambda j} \cap \sum_{i \in X \setminus \{j\}} E_{\lambda_i}$$

por lo que $\vec{x}_j = \vec{x}_{i_1} + \vec{x}_{i_2} + ... + \vec{x}_{i_k}$, con $\{i_1, i_2, ..., i_k\} \subseteq X \setminus \{j\}$.

Por lo tanto

$$\{\vec{x}_j, \vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2}, ..., \vec{x}_{i_k}\}$$

es linealmente dependiente. Pero el Teorema anterior asegura que es linealmente independiente por ser un conjunto de vectores propios que corresponden a valores propios distintos dos a dos. $\underset{\circ}{\nabla}$ ■

Recordemos que una suma de subespacios $\sum \{W_i\}_{i \in X}$ es directa, cuando la intersección de cada sumando con la suma de los demás subespacios es $\left\{\vec{0}\right\}$.

Es decir $\sum \{W_i\}_{i\in X} = \bigoplus \{W_i\}_{i\in X}$ si

$$W_j \cap \sum_{i\in X\setminus\{j\}} \{W_i\} = \left\{\vec{0}\right\},\ \forall j \in X.$$

Teorema 100 *Son equivalentes para una familia $\{W_i\}_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ de subespacios vectoriales no nulos de un espacio ${}_FV$ de dimensión finita:*

1. $V = \bigoplus \{W_i\}_{i\in\{1,\ldots,m\}}$.
2. $V = \sum \{W_i\}_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ *y* $\sum\limits_{\{1,\ldots,m\}} \{\dim(W_i)\} = \dim(V)$.

Demostración. 1)$\Rightarrow$ 2)

Observemos que si $i \neq j$, y β_i es una base para V_i, β_j una base par V_j, entonces $\beta_i \cap \beta_j = \emptyset$. Pues si $\vec{x} \in \beta_i \cap \beta_j$, entonces

$$\vec{x} \in W_i \cap \left(\sum_{j\neq i} W_j\right) \underset{\circ}{\nabla}.$$

Notemos que si $\beta_i \underset{base}{\hookrightarrow} W_i$ entonces $\cup\{\beta_i\}_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ es una base para ${}_FV$:

Recordemos que el subespacio generado por una unión de conjuntos es la suma de los subespacios generados por ellos. (Definición 23).

Por lo tanto

$$\mathfrak{L}\left(\cup\{\beta_i\}_{i\in\{1,\ldots,m\}}\right) = \sum \left\{\mathfrak{L}\{\beta_i\}_{i\in\{1,\ldots,m\}}\right\} = V,$$

entonces tenemos que $\cup\{\beta_i\}_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ es un conjunto generador de V.

Si $\cup\{\beta_i\}_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ fuera linealmente dependiente, contendría un subconjunto finito *l. d.* digamos que

$$\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots \vec{x}_n\} \subseteq \cup\{\beta_i\}_{i\in\{1,\ldots,m\}}$$

es linealmente dependiente. Como los conjuntos β_i son linealmente independientes, no todos los elementos de $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots \vec{x}_n\}$ pertenecen al mismo conjunto β_j.

Agrupemos los elementos de $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots \vec{x}_n\}$, según la base β_j a la que pertenecen, podemos suponer, reordenando si hiciera falta, que

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_{1,1}, \vec{x}_{2,1}, \ldots, \vec{x}_{k_1,1} \in \beta_1,\ \vec{x}_{1,2}, \vec{x}_{2,2}, \ldots, \vec{x}_{k_2,2} \in \beta_2, \ldots$$

$$\ldots, \vec{x}_{1,s}, \vec{x}_{2,s}, \ldots, \vec{x}_{k_s,s} = \vec{x}_n \in \beta_s.$$

Ahora hay una combinación lineal de estos vectores que da $\vec{0}$ con no todos los coeficientes 0 :

$$\vec{0} = \sum_{i,j} c_{i,j}\vec{x}_{i,j} = \sum_{j}\left(\sum_{i=1}^{k_j}\vec{x}_{i,j}\right) = \sum_{j}\vec{w}_j.$$

Con $\vec{w}_j = \sum\limits_{i=1}^{k_j}\vec{x}_{i,j} \in W_j$.

Entonces $\vec{0} \neq \vec{w}_1 = \vec{w}_2 + ... + \vec{w}_s \in W_1 \cap \left(\sum\limits_{i\neq 1} W_i\right) \underset{\circ}{\nabla}$.

$\vec{0} \neq \vec{w}_1$, pues $\vec{w}_1$ es combinación lineal no trivial de elementos de un conjunto linealmente independiente β_1.

La contradicción anterior muestra que $\cup\{\beta_i\}_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ es linealmente independiente, así que es una base de ${}_FV$.

$$\therefore \dim(V) = \left|\cup\{\beta_i\}_{i\in\{1,\ldots,m\}}\right| = \sum\{|\beta_i|\} = \sum\{\dim(W_i)\}.$$

2) $\Rightarrow$ 1)

Por induccción sobre m.

Base. Si $m = 1$ no hay nada que demostrar.

Si $m = 2$ entonces $V = W_1 + W_2$ y $\dim(V) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$. Recordemos ahora que (Teorema 21).

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2),$$

entonces

$$\dim(V) = \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

$$= \dim(W_1) + \dim(W_2)$$

entonces $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$, así que $W_1 \cap W_2 = \left\{\vec{0}\right\}$, por lo que

$$V = W_1 \bigoplus W_2.$$

Paso inductivo.

Supongamos que $m > 2$.

$$V = \sum_{i=1}^{m}\{W_i\}$$

y que

$$\dim(V) = \sum_{i=1}^{m} \{\dim(W_i)\}.$$

Entonces

$$V = W_1 + \sum_{i=2}^{m} \{W_i\}$$

y

$$\dim(V) = \dim(W_1) + \left(\sum_{i=2}^{m} \{\dim(W_i)\} \right).$$

Por el caso $m = 2$, tenemos que

$$V = W_1 \bigoplus \left(\sum_{i=2}^{m} \{W_i\} \right).$$

Como

$$\dim\left(\sum_{i=2}^{m} \{W_i\} \right) = \dim(V) - \dim(W_1) = \left(\sum_{i=1}^{m} \{\dim(W_i)\} \right) - \dim(V_1) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} \{\dim(W_i)\} \right),$$

tenemos, por hipótesis de inducción que

$$\sum_{i=2}^{m} \{W_i\} = \bigoplus_{i=2}^{m} \{W_i\}.$$

Por lo tanto

$$V = W_1 \bigoplus \left(\sum_{i=2}^{m} \{W_i\} \right) = W_1 \bigoplus \left(\bigoplus_{i=2}^{m} \{W_i\} \right)$$

Ahora, es fácil comprobar que

$$W_1 \bigoplus \left(\bigoplus_{i=2}^{m} \{W_i\} \right) = \bigoplus_{i=1}^{m} \{W_i\}.$$

■

Ejercicio 191 *Demuestre que son equivalentes para una familia*

$$\{W_i\}_{i\in\{1,...,m\}}$$

de subespacios vectoriales de ${}_FV$ *:*

1. $V = W_1 \bigoplus \left(\bigoplus_{i=2}^{m} \{W_i\} \right).$

2. $V = \bigoplus_{i=1}^{m} \{W_i\}$. *(Es decir,* $V = \sum_{i=1}^{m} \{W_i\}$ *y la intersección de cada subespacio con la suma de los demás subespacios es trivial.*

3. $\forall \vec{v} \in V, \exists! \vec{x}_i \in W_i,\ i \in \{1, ..., m\}$ *tales que* $\vec{v} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + ... + \vec{x}_m$.

4. *(*$V = \sum_{i=1}^{m} \{W_i\}$*, y* $\vec{0} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + ... + \vec{x}_m$*, con* $\vec{x}_i \in W_i$*)* $\Rightarrow \vec{x}_1 = \vec{0} = \vec{x}_2 = ... = \vec{x}_m$.

Observación 82 *Si* $T : V \to V$ *es un operador lineal diagonalizable en un espacio de dimensión finita, entonces* $\chi_{_T}(t)$ *es un producto de factores de grado uno.*

Demostración. Si T es diagonalizable, entonces existe una matriz diagonal D que representa a T. Digamos que

$$[T]_\beta^\beta = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

de aquí es claro que

$$\chi_{_T}(t) = \chi_{_D}(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) ... (\lambda_n - t).$$

■

Lo anterior muestra que para que un operador lineal en un espacio de dimensión finita sea diagonalizable, debe suceder que el polinomio característico se factorice como producto de factores de grado uno.

Ejemplo 114 *Consideremos la rotación por* $\pi/4$,

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\rho_{\pi/4}} \mathbb{R}^2,$$

cuya matriz es

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -sen(\pi/4) \\ sen(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix},$$

con polinomio característico

$$t^2 - t\sqrt{2} + 1$$

que es irreducible sobre $\mathbb{R}$, *pues sus dos raíces son complejas no reales.*
Así, tenemos que $\rho_{\pi/4}$ *(y* $\begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -sen(\pi/4) \\ sen(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}$*) no son diagonalizables.*

Ejemplo 115 *En cambio si pensamos que la rotación ocurre en el plano complejo, entonces*

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\rho_{\pi/4}=\left(e^{i\pi/4}\cdot\_\right)} \mathbb{C},$$

de tal manera que todos los elementos de $\mathbb{C}\setminus\{(0,0)\}$ *son vectores propios de* $\left(e^{i\pi/4}\cdot\_\right)$, *correspondientes al valor propio* $e^{i\pi/4}$. *Así que la matriz diagonal que representa a* $\left(e^{i\pi/4}\cdot\_\right)$ *es*

$$\left(e^{i\pi/4}\right) \in M_{1\times 1}(\mathbb{C}).$$

Por otra parte, no basta que el polinomio característico se factorice como producto de factores de grado uno, para que sea diagonalizable.

Ejemplo 116 *Consideremos la matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *es claro que su polinomio característico,* $\det\begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)(1-t)$, *es un producto de factores de grado* 1, *pero no es diagonalizable:*
Si lo fuera, tendríamos que sería similar a una matriz diagonal, con el mismo polinomio característico, es decir, tendría que ser similar a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *pero entonces*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}Q^{-1} = QQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\circ}{\nabla}.$$

Ejercicio 192 *Una matriz triangular superior* A *con todos sus elementos de la diagonal iguales, es diagonalizable si y sólo si* A *es diagonal.*

8.4. Matrices diagonalizables

Teorema 101 *Son equivalentes para un operador lineal* ${}_FV \xrightarrow{T} {}_FV$ *en un espacio de dimensión finita* ${}_FV$:

1. T *es diagonalizable, con valores propios* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$.

2. $V = \bigoplus E_{\lambda_i}$.

   a) $\chi_T(t) = (\lambda_1 - t)^{m_1} (\lambda_2 - t)^{m_2} ... (\lambda_k - t)^{m_k}$

   b) $\dim (E_{\lambda_i}) = nul(T - \lambda_i Id) = m_i$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$2) Si T es diagonalizable, con valores propios λ_1, λ_2,...,λ_k, entonces existe una base de ${}_FV$ formada por vectores propios de T. De esta base tomemos los elementos que corresponden a λ_i para formar β_i.

Entonces

$$V = \bigoplus_{i=1} \{E_{\lambda_i}\}.$$

2)$\Rightarrow$ 3) Si $V = \bigoplus\limits_{i=1} \{E_{\lambda_i}\}$, tomemos β_i una base de E_{λ_i}. Entonces la matriz de T respecto a la base $\beta_1 \cup \beta_2 \cup ... \cup \beta_k$ es

$$\begin{pmatrix} |\beta_1| \times |\beta_1| \begin{cases} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{cases} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & |\beta_k| \times |\beta_k| \begin{cases} \lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{cases} \end{pmatrix},$$

por lo que el polinomio característico de T es ,

$$(\lambda_1 - t)^{|\beta_1|} (\lambda_2 - t)^{|\beta_2|} ... (\lambda_k - t)^{|\beta_k|}.$$

Además

$$|\beta_1| + |\beta_2| + ... + |\beta_k| = n.$$

Basta hacer $m_i = |\beta_i|$.

3)⇒ 2) supongamos que

$$\chi_{_T}(t) = (\lambda_1 - t)^{m_1}(\lambda_2 - t)^{m_2} \ldots (\lambda_k - t)^{m_k}$$

y que

$$\dim(E_{\lambda_i}) = \operatorname{nul}(T - \lambda_i Id) = m_i, \forall i \in \{1, ..., k\}.$$

Como las raíces del polinomio característico son los valores propios del operador T, entonces $E_{\lambda_i} \neq \left\{\vec{0}\right\}, \forall i \in \{1, ..., k\}$.

Además

$$\sum \{E_{\lambda_i}\} = \bigoplus \{E_{\lambda_i}\},$$

por el Lema 18.

Entonces

$$\dim\left(\sum \{E_{\lambda_i}\}\right) = \dim\left(\bigoplus \{E_{\lambda_i}\}\right) = \sum \{\dim(E_{\lambda_i})\} =$$

$$= \sum \{m_i\} = \operatorname{grad}\left(\chi_{_T}(t)\right) = n$$

Como $\dim(\bigoplus \{E_{\lambda_i}\}) = n = \dim(V)$, entonces $\bigoplus \{E_{\lambda_i}\} = V$.

2)⇒ 1) Si $\bigoplus \{E_{\lambda_i}\} = V$ entonces la unión $\cup\{\beta_i\}$, donde β_i es una base de E_{λ_i} es una base de ${}_FV$ formada por vectores propios de T. ∎

Definición 109 *Sea λ un valor propio del operador T de dimensión finita, la multiplicidad de λ como valor propio de T es la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico de T. Es la mayor potencia entera de $(t - \lambda)$ que divide a $\chi_{_T}(t)$.*

Ejemplo 117 *Es claro que la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable, pues es diagonal.

Los valores propios de A son 1, 2, 3 con multiplicidades $1, 2, 1$ *ya que el polinomio característico es*

$$(1 - t)(2 - t)^2(3 - t).$$

$$\dim(E_1) = 4 - \mathit{rango}(A - I_4) =$$

$$= 4 - rango\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= 4 - rango\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = 4 - 3 = 1.$$

$$\dim(E_2) = 4 - rango\,(A - 2I_4) =$$

$$= 4 - rango\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= 4 - rango\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 4 - 2 = 2.$$

$$\dim(E_3) = 4 - rango\,(A - 3I_4) =$$

$$= 4 - rango\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= 4 - rango\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 4 - 3 = 1.$$

Ejemplo 118 *Mostrar que* $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ *es diagonalizable.*

$$\det\begin{pmatrix} -t & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4-t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6-t & 0 \\ -6 & 2 & -2 & 8-t \end{pmatrix} = (6-t)\cdot\det\begin{pmatrix} -t & 2 & 2 \\ 0 & 4-t & 0 \\ -6 & 2 & 8-t \end{pmatrix} =$$

$$= (6-t)\cdot(4-t)\det\begin{pmatrix} -t & 2 \\ -6 & 8-t \end{pmatrix} = (6-t)\cdot(4-t)\left(t^2-8t+12\right) =$$

$$= (6-t)\cdot(4-t)\,(t-6)\,(t-2) = (6-t)^2\,(4-t)\,(2-t)\,.$$

Además:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & 2 & -2 & 8 \end{pmatrix} - 6I_4 = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las soluciones de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \dot{0}$$

está generadas por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & 2 & -2 & 8 \end{pmatrix} - 4I_4 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -6 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las soluciones de

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -6 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0},$$

están generadas por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & 2 & -2 & 8 \end{pmatrix} - 2I_4 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -6 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las soluciones de

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -6 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

están generadas por:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Entonces

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de F^4 formada por vectores propios de A.
Además si $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *entonces* $Q^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. *Por lo que* $4Q^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 6 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. *Ahora*

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 6 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & 2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Teorema 102 *Si A es diagonalizable, entonces* $\chi_{_A}(t)(A) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Demostración. $\chi_{_A}(t) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - t)^{m_i}$, $F^n = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$.
Sea $\vec{x} \in F^n$, entonces $\vec{x} = \sum c_i \vec{x}_i,\ \vec{x}_i \in E_{\lambda_i}$.
Por otra parte, $\chi_{_A}(t)(A) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - t)^{m_i}(A) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i Id - A)^{m_i}$. ■
Entonces

$$\prod_{i=1}^{k} (\lambda_i Id - A)^{m_i} = (\lambda_1 Id - A)^{m_1} \circ (\lambda_2 Id - A)^{m_2} \circ ... \circ (\lambda_k Id - A)^{m_k}.$$

Apliquemos $\left(\prod_{i=1}^{k} (\lambda_i Id - A)^{m_i}\right) \cdot \_$ en $c_i \vec{x}_i$:

$$((\lambda_1 Id - A)^{men_1} \cdot (\lambda_2 Id - A)^{m_2} \cdot ... \cdot (\lambda_k Id - A)^{m_k})(c_i \vec{x}_i) =$$

$$= (\lambda_1 Id - A)^{m_1} \cdot ... \cdot (\lambda_{i-1} Id - A)^{m_{i-1}} \cdot (\lambda_{i+1} Id - A)^{m_{i+1}} \cdot ... \cdot$$
$$\cdot (\lambda_k Id - A)^{m_k} \cdot (\lambda_i Id - A)^{m_i}(c_i \vec{x}_i) = \vec{0}.$$

Pues $(\lambda_i Id - A)(c_i \vec{x}_i) = c_i((\lambda_i Id - A)(\vec{x}_i)) = \vec{0}$. Notemos que en

$$(\lambda_1 Id - A)^{m_1} \cdot (\lambda_2 Id - A)^{m_2} \cdot ... \cdot (\lambda_k Id - A)^{m_k}$$

los operadores se pueden reacomodar, pues

$$((\lambda_j Id - A)^{m_j} \cdot (\lambda_i Id - A)^{m_i}) = ((\lambda_j Id - t)^{m_j} \cdot (\lambda_i Id - t)^{m_i})(A) =$$

$$= ((\lambda_i Id - t)^{m_i} \cdot (\lambda_j Id - t)^{m_j})(A) = (\lambda_i Id - A)^{m_i} \cdot (\lambda_j Id - A)^{m_j}.$$

Entonces

$$\left(\prod_{i=1}^{k} (\lambda_i Id - A)^{m_i}\right)(\vec{x}) = \vec{0},\ \forall \vec{x} \in F^n,$$

por lo tanto $\left(\prod_{i=1}^{k} (\lambda_i Id - A)^{m_i}\right) \cdot \_$ es el operador $\hat{0}$ en F^n, por lo que

$$\left(\prod_{i=1}^{k} (\lambda_i Id - A)^{m_i}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 193 *Compruebe lo anterior con la matriz* $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ -3 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

8.5. El polinomio mínimo

Como ya hemos notado, si $V \xrightarrow{T} V$ es un operador lineal en el espacio vectorial ${}_FV$. Se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & F\left[t\right] \arrow[d, "\Lambda"] & t \arrow[d, mapsto] \\
F \arrow[ur] \arrow[r] & Hom_F\left(V,V\right) & T \\
c \arrow[r, mapsto] & c\cdot _ &
\end{tikzcd}$$

donde Λ es un morfismo de anillos que satisface:

$$\Lambda\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n\right) = a_0 Id_V + a_1 T + a_2 T^2 + ... + a_n T^n.$$

Notación 14 *Denotemos*

$$\left(\hat{0} : T\right) = \left\{f \in F\left[t\right] \mid f\left(T\right) = \hat{0}\right\},$$

el conjunto de polinomios que se anulan en T. Llamaremos a $\left(\hat{0} : T\right)$ el anulador de T.

Observación 83 $\left(\hat{0} : T\right)$ *es un ideal de $F\left[t\right]$.*

Demostración. Es claro que $\left(\hat{0} : T\right)$ es cerrado bajo la suma, que contiene al polinomio 0 y que es cerrado bajo multiplicación por cualquier polinomio. ■

Observación 84 *Como los ideales de $F\left[t\right]$ están generados por un sólo polinomio, que se puede escoger mónico, tenemos que si $\left(\hat{0} : T\right) \neq \{\mathbb{O}\}$, entonces*

$$\left(\hat{0} : T\right) = F\left[t\right] \cdot \mu[t].$$

El polinomio mónico $\mu[t]$ se llama el polinomio mínimo para T.

Teorema 103 *Si $V \xrightarrow{T} V$ es un operador lineal en un espacio vectorial ${}_FV$ de dimensión finita, entonces $\left(\hat{0} : T\right) \neq \{\mathbb{O}\}$.*

Demostración. Recordemos que el espacio vectorial $Hom_F(V,V)$ es isomorfo a $M_{n\times n}(F)$, así que ambos tienen dimensión n^2. Luego el conjunto

$$\left\{Id, T.T^2, ..., T^{n^2}\right\}$$

es un conjunto con más de n^2 vectores en un espacio vectorial de dimensión n^2, por lo que resulta linealmente dependiente.

Así que existe una combinación lineal

$$c_0 Id + c_1 T + c_2 T^2 + ... + c_{n^2} T^{n^2} = \hat{0}$$

con no todos los coeficientes iguales a 0.

Es claro que entonces el polinomio

$$\mathbb{O} \neq c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n^2} t^{n^2} \in \left(\hat{0} : T\right).$$

■

Ejemplo 119 *Sea* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \_ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. *Tomemos*

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

notemos que es linealmente independiente pues en esta lista ningún vector es combinación lineal de los anteriores $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. *Ahora.*

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\right\}$$

es linealmente dependiente pues el sistema

$$x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es equivalente a

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que tiene la solución no trivial

$$x = -3,\ y = -2,\ z = 1$$

Así que

$$-3Id - 2A + A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego el polinomio mínimo para A es un divisor mónico de

$$-3 - 2t + t^2 = (t-3)(t+1).$$

Notando que $(t-3) \notin \left(\hat{0} : A\right),\ (t+1) \notin \left(\hat{0} : A\right)$, tenemos que

$$\mu_A(t) = -3 - 2t + t^2.$$

Ejemplo 120 *Si $dim(V)$ no es finita puede suceder que un operador no tenga polinomio mínimo.*
Por ejemplo consideremos el operador

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[t] & \xrightarrow{\int_o^t} & \mathbb{R}[t] \\ f & \longmapsto & \int_o^t f \end{array}$$

Este operador no tiene polinomio mínimo:
notemos que

$$\left((t^n)\left(\int_o^t\right)\right)(1) = \underbrace{\int_o^t\left(...\left(\int_o^t\left(\int_o^t(1)\right)\right)\right)}_{n \text{ signos de integral}} = \frac{t^n}{n!}.$$

Así que si un polinomio $a_0 + a_1t + a_2t^2 + ... + a_nt^n \neq o(t)$ se evalúa en $\int_o^t$ y después evaluamos en 1, obtenemos

$$\left(\left(a_0 + a_1t + a_2t^2 + ... + a_nt^n\right)\left(\int_o^t\right)\right)(1) = a_0t + \frac{a_1}{2!}t^2 + ... + \frac{a_n}{n!}t^n \neq 0(t).$$

8.5.1. El polinomio mínimo y diagonalizabilidad

Teorema 104 *Un operador* $V \xrightarrow{T} V$ *definido en el espacio de dimensión finita* n *es diagonalizable si y sólo si* $\mu_T(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\ldots(t-\lambda_k)$, *donde* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *son los distintos valores propios de* T.

Demostración. $\Rightarrow$) Si T es diagonalizable, entonces existe una base β de vectores propios de T. Consideremos el polinomio $\prod_{i=1}^{k}\{t-\lambda_i\}$, donde $\{\lambda_i\}_{i\in\{1,\ldots,k\}}$ es el conjunto de los valores propios de T. Tomemos $\vec{x} \in \beta$ y supongamos que $T(\vec{x}) = \lambda_j \vec{x}$, entonces

$$\left(\left(\prod_{i=1}^{k}\{t-\lambda_i\}\right)(T)\right)(\vec{x}) = \left(\left(\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k}\{t-\lambda_i\}\right)\cdot(t-\lambda_j)\right)(T)\right)(\vec{x}) =$$

$$= \left(\left(\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k}\{T-\lambda_i Id\}\right)\cdot(T-\lambda_j Id)\right)(\vec{x})\right) =$$

$$= \left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k}\{T-\lambda_i Id\}\right)((T-\lambda_j Id)(\vec{x})) =$$

$$\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k}\{T-\lambda_i Id\}\right)\left(\vec{0}\right) = \vec{0}.$$

Tenemos pues que el operador $\left(\prod_{i=1}^{k}\{t-\lambda_i\}\right)(T)$ se anula en cada elemento de la base β, por lo tanto (Corolario 7) $\prod_{i=1}^{k}\{T-\lambda_i Id\}$ es el operador $\hat{0}$. Entonces el polinomio

$$\prod_{i=1}^{k}\{t-\lambda_i\} \in \left(\hat{0} : T\right)$$

Por lo que

$$\left(\prod_{i=1}^{k}\{t-\lambda_i\}\right)F[t]\subseteq\left(\hat{0}:T\right)=\mu_T(t)\cdot F[t].$$

Por otra parte si $T(\vec{x})=\lambda\vec{x}$, entonces

$$\vec{0}=\hat{0}(\vec{x})=\mu_T(T)(\vec{x})=\mu_T(\lambda)(\vec{x}),$$

por el Ejemplo 111. Esto muestra que si λ es un valor propio de T entonces λ es una raíz de su polinomio mínimo.

En particular, λ valor propio de $T\Rightarrow(t-\lambda)\mid\mu_T(t)$.

Por lo tanto $\left(\prod_{i=1}^{k}\{t-\lambda_i\}\right)\mid\mu_T(t)$ y así

$$\mu_T(t)\in\left(\prod_{i=1}^{k}\{t-\lambda_i\}\right)F[t].$$

Por lo tanto

$$\left(\prod_{i=1}^{k}\{t-\lambda_i\}\right)F[t]=\mu_T(t)\cdot F[t].$$

De aquí que

$$\left(\prod_{i=1}^{k}\{t-\lambda_i\}\right)=\mu_T(t).$$

$\Leftarrow$) Recíprocamente, si

$$\left(\prod_{i=1}^{k}\{t-\lambda_i\}\right)=\mu_T(t).$$

Veremos que T es diagonalizable por inducción sobre k.

Base. Si $k=1$, entonces $(T-\lambda Id)=\hat{0}$ implica que $T=\lambda Id$. Que es diagonalizable.

Si $k=2$, entonces $(T-\lambda_1 Id)\circ(T-\lambda_2 Id)=\hat{0}$.

Hagamos la división

$$\begin{array}{r|l} & \quad\quad 1 \\ \cline{2-2} t-\lambda_2 & \ \ t-\lambda_1 \\ & \lambda_2-\lambda_1 \end{array}$$

Entonces
$$\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left((t-\lambda_1)-(t-\lambda_2)\right)=1$$
Entonces, evaluando en T,
$$\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left((T-\lambda_1 Id_V)-(T-\lambda_2 Id_V)\right)=Id_V,$$
Así que $\forall\vec{v}\in V$,
$$\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(T-\lambda_1 Id_V\right)(\vec{v})-\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(T-\lambda_2 Id_V\right)(\vec{v})=Id_V\left(\vec{v}\right)=\vec{v},$$
Ahora, observe que $\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(T-\lambda_1 Id_V\right)(\vec{v})\in E_{\lambda_2}$ pues
$$(T-\lambda_2)\left(\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(T-\lambda_1 Id_V\right)(\vec{v})\right)=$$
$$=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\left(T-\lambda_2 Id_V\right)\left(T-\lambda_1 Id_V\right)(\vec{v})\right)=\vec{0}.$$
De la misma manera, $\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(T-\lambda_2 Id_V\right)(\vec{v})\in E_{\lambda_1}$.

Por lo tanto $V=E_{\lambda_1}+E_{\lambda_2}$.

Paso inductivo

Supongamos que $k>2$,

Debemos demostrar que
$$\sum_{\substack{\lambda \text{ valor} \\ \text{propio de } T}} E_\lambda = V.$$
Consideremos el diagrama
$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "T"] & V \\ \sum_{i=1}^{k-1} E_{\lambda_i} \arrow[u] \arrow[r, "T_{|_{\sum_{i=1}^{k-1} E_{\lambda_i}}}"] & \sum_{i=1}^{k-1} E_{\lambda_i} \arrow[u] \end{tikzcd}$$
Notemos que el diagrama anterior tiene sentido pues la imagen bajo T de un elemento de $\sum_{i=1}^{k-1} E_{\lambda_i}$, sigue estando en $\sum_{i=1}^{k-1} E_{\lambda_i}$.

Es inmediato que el polinomio mínimo para $T|_{\sum_{i=1}^{k-1} E_{\lambda_i}}$ es

$$(t-\lambda_1)\cdot(t-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_{k-1}).$$

Tomemos una combinación de los polinomios $(t-\lambda_1)\cdot(t-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_{k-1})$ y $t-\lambda_i$, con coeficientes en $F[t]$ que coincida con el polinomio 1.

Esto se puede hacer porque el máximo común divisor entre

$$(t-\lambda_1)\cdot(t-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_{k-1}) \text{ y } (t-\lambda_k)$$

en $F[t]$ es 1. Simplemente observe que el único divisor mónico común posible es 1. O bien, haciendo la división

$$\begin{array}{r|l} & \hfill q(t) \\ \hline t-\lambda_k & (t-\lambda_1)\cdot(t-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_{k-1}) \\ & \hfill c \quad c\neq 0 \end{array}$$

se tiene que

$$1=-\frac{1}{c}q(t)(t-\lambda_k)+\frac{1}{c}(t-\lambda_1)\cdot(t-\lambda_2\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_{k-1}.$$

Entonces

$$Id=-\frac{1}{c}q(T)(T-\lambda_k Id)+\frac{1}{c}(T-\lambda_1 Id)\circ(T-\lambda_2 Id)\circ\ldots\circ(T-\lambda_{k-1}Id),$$

de aquí que cualquier vector $\vec{v}$ se puede escribir como

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \left(-\frac{1}{c}q(T)(T-\lambda_k Id)\right)(\vec{v})+ \\ &\quad +\frac{1}{c}(T-\lambda_1 Id)\circ(T-\lambda_2 Id)\circ\ldots\circ(T-\lambda_{k-1}Id)(\vec{v})\end{aligned}$$

el primer sumando está en

$$\operatorname{Ker}((T-\lambda_1 Id)\circ(T-\lambda_2 Id)\circ\ldots\circ(T-\lambda_{k-1}Id))=\sum_{i=1}^{k-1}E_{\lambda_i}$$

(¿por qué?) y el segundo sumando está en E_{λ_k}.

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
{}_F V &= (\mathrm{Ker}\left((T - \lambda_1 Id) \circ (T - \lambda_2 Id) \circ \ldots \circ (T - \lambda_{k-1} Id)\right)) + E_{\lambda_k} = \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} E_{\lambda_i} + E_{\lambda_k}.
\end{aligned}
$$

■

Ejercicio 194 *Demuestre que*

$$
Ker\left((T - \lambda_1 Id) \circ (T - \lambda_2 Id) \circ \ldots \circ (T - \lambda_{k-1} Id)\right) = \sum_{i=1}^{k-1} E_{\lambda_i}
$$

en la demostración anterior. Sugerencia:

$$
\frac{(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\ldots(t-\lambda_{k-1})}{(t-\lambda_1)}, \frac{(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\ldots(t-\lambda_{k-1})}{(t-\lambda_2)}, \ldots
$$

$$
\ldots, \frac{(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\ldots(t-\lambda_{k-1})}{(t-\lambda_{k-1})}
$$

son primos relativos en $F[t]$ por lo que hay una combinación con coeficientes en $F[t]$ tal que

$$
\begin{aligned}
1 &= q_1[t]\frac{(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\ldots(t-\lambda_{k-1})}{(t-\lambda_1)} + \ldots + \\
&\quad + q_{k-1}[t]\frac{(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\ldots(t-\lambda_{k-1})}{(t-\lambda_{k-1})}.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 195 *Demuestre que si $T \in Hom_F(V,V)$, con $dim(V) < \infty$, entonces los valores propios de T son las raíces de $\mu_T(t)$. Concluya que $\mu_T(t)$ y $\chi_T(t)$ tienen las mismas raíces (por supuesto, las multiplicidades puede no coincidir.*

Ejercicio 196 *Escriba 1 como combinación de $t-1$, $t-2$ y $t-3$ con coeficientes en $\mathbb{R}[t]$.*

Ejercicio 197 *Escriba 1 como combinación de $(t-1)(t-2)$, $(t-2)(t-3)$ y $(t-1)(t-3)$ con coeficientes en $\mathbb{R}[t]$.*

Ejemplo 121 *Consideremos la siguiente matriz en* $M_{5\times 5}(\mathbb{Z}_5)$.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 4 & 2\\ 0 & 4 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2\\ 3 & 0 & 1 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 4 & 2\\ 0 & 4 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2\\ 3 & 0 & 1 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0\end{pmatrix}-tI_5=\begin{pmatrix} 4-t & 0 & 1 & 4 & 2\\ 0 & 4-t & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & -t & 4 & 2\\ 3 & 0 & 1 & 2-t & 4\\ 2 & 0 & 4 & 2 & -t\end{pmatrix}.$$

Su determinante es

$$\det\begin{pmatrix} 4-t & 0 & 1 & 4 & 2\\ 0 & 4-t & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & -t & 4 & 2\\ 3 & 0 & 1 & 2-t & 4\\ 2 & 0 & 4 & 2 & -t\end{pmatrix}=3+2t+2t^2+4t^3-t^5=$$

$$=\chi_T(t)=3+2t+2t^2+4t^3-t^5.$$

$\chi_T(2)=0$ *y*

$$\begin{array}{r|r} & -t^4-2t^3+2t+1\\ \hline t-2 & -t^5+4t^3+2t^2+2t+3\\ & -2t^4-t^3+2t^2+2t+3\\ & 2t^2+2t+3\\ & t+3\\ & 0\end{array}$$

Sea $g(t)=-t^4-2t^3+2t+1,$ *como* $g(1)=0,$

$$\begin{array}{r|r} & -t^3-3t^2-3t-1\\ \hline t-1 & -t^4-2t^3+2t+1\\ & -3t^3+2t+1\\ & -3t^2+2t+1\\ & -t+1\\ & 0\end{array}.$$

Sea $h(t) = -t^3 - 3t^2 - 3t - 1$, *como* $h(4) = 0$, *podemos hacer*

$$\begin{array}{r|l} & \quad -t^2 - 2t - 1 \\ \cline{2-2} t+1 & -t^3 - 3t^2 - 3t - 1 \\ & \quad -2t^2 - 3t - 1 \\ & \qquad\quad -t - 1 \\ & \qquad\qquad\quad 0 \end{array}.$$

$u(t) = -t^2 - 2t - 1 = -(t^2 + 2t + 1) = -(t+1)^2 - (t-4)^2$.
Entonces

$$\chi_T(t) = (t-2)(t-1)(t-4)^3.$$

La matriz A *es diagonalizable si y sólo si* $\mu_T(t) = (t-2)(t-1)(t-4)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 2I_5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 1I_5 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 4I_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

y

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}\right).$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 & 20 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 10 \\ 0 & 0 & -15 & 20 & 10 \\ 20 & 0 & 10 & 20 & 10 \\ 10 & 0 & 5 & 20 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto A es diagonalizable.

Ejercicio 198 *Encuentre una base de $\mathbb{Z}_5^5$ formada por vectores propios de*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 199 *Demuestre que si $T : V \to V$ es un operador lineal en un espacio de dimensión finita n, tiene n valores propios distintos, entonces T es diagonalizable.*

Ejercicio 200 *Decidir si* $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *es diagonalizable.*

Ejercicio 201 *Decidir si* $\begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{2} \\ -4 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *es diagonalizable.*

Ejercicio 202 *Supongamos que el operador* $T : V \rightarrow V$ *en el espacio vectorial de dimensión finita* n *tiene* k *valores propios distintos.*

1. *Si* $\dim(E_\lambda) = n - k + 1$, *para algún valor propio* λ, *demuestre que* T *es diagonalizable.*

2. *Si existen valores propios de* T $\lambda_1, ..., \lambda_j$ *tales que*

$$\dim\left(E_{\lambda_1} + ... + E_{\lambda_j}\right) = n - k + j,$$

demuestre que T *es diagonalizable.*

Capítulo 9

Subespacios T-invariantes

9.1. Subespacios $T-$invariantes

Definición 110 *Sea* ${}_FV \xrightarrow{T} {}_FV$ *un operador lineal y sea* $W \leqslant_F V$*. Diremos que* W *es un subespacio* $T-$*invariante de* ${}_FV$ *(escribiremos* $W \underset{T}{\leqslant} V$*), si* $T(W) \subseteq W$*.*

En caso de que $W \underset{T}{\leqslant} V$, tenemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] & V \\
W \arrow[u, "inc."] \arrow[r, "T_{|W}"] \arrow[ur, phantom, "="] & W \arrow[u, "inc."']
\end{tikzcd}$$

es decir que $W \underset{T}{\leqslant} V$ si y sólo si $W \overset{T_{|W}}{\to} W$ es un operador en W.

Ejemplos 122 *Para cualquier* $T : V \to V$ *:*

1. $\left\{\vec{0}\right\} \underset{T}{\leqslant} V$.

2. $V \underset{T}{\leqslant} V$.

3. $Ker(T) \underset{T}{\leqslant} V$.

4. $T(V) \underset{T}{\leqslant} V$.

Teorema 105 *Sea $T : V \to V$ lineal, $W \underset{T}{\leqslant} V$, $\dim(V) = n < \infty$, entonces $\chi_{T_{|W}}(t)$ divide a $\chi_T(t)$.*

Demostración. Tomemos una base γ de W y completémosla a una base β de $_FV$. Digamos que $m = \dim(W)$.

Entonces

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} [T_{|W}]_\gamma^\gamma & B \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$[T]_\beta^\beta - tI_n = \begin{bmatrix} [T_{|W}]_\gamma^\gamma - tI_m & B \\ 0 & C - tI_{m-n} \end{bmatrix}.$$

Así que

$$\chi_T(t) = \chi_{T_{|W}}(t)\,\chi_C(t).$$

■

Ejemplo 123 *Sea*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a+b+2c-d \\ b+d \\ 2c-d \\ c+d \end{pmatrix} \end{array},$$

entonces

$$[T]_{can}^{can} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si tomamos $W = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}$, entonces $W \underset{T}{\leqslant} V$, pues

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r+s \\ s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hagamos $\gamma = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ *y* $\beta = \gamma \cup \{\vec{e}_3, \vec{e}_4\}$.
$\left[T_{|W}\right]_{\gamma}^{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $\chi_{T_{|W}}(t) = (1-t)^2 \mid \chi_T(t) = (1-t)^3 (2-t)$.

Definición 111 *Sea* $W \leqslant V$ *y consideremos*

$$H_W^V = \{T : V \to V \mid T \text{ es lineal y } T(W) \subseteq W\}.$$

Teorema 106 *1.* $H_W^V \leqslant Hom_F(V, V)$.

2. H_W^V *es cerrado bajo la composición.*

Demostración. 1. H_W^V es un subespacio de $Hom_F(V,V)$:
$\hat{0} \in H_W^V$ pues $\hat{0}(W) = \left\{\vec{0}\right\} \subseteq W$.
$T, U \in H_W^V \Rightarrow (T+U)(W) \subseteq T(W) + U(W) \subseteq W + W = W$.
$c \in F, T \in H_W^V \Rightarrow (cT)(W) \subseteq c(T(W)) \subseteq cW \subseteq W$.
2.$T, U \in H_W^V \Rightarrow (T \circ U)(W) \subseteq T(U(W)) \subseteq T(W) \subseteq W$.
Notemos además que $Id_V \in H_W^V$. ■
En vista del Teorema anterior tenemos que

Observación 85 *1.* H_W^V *es un espacio vectorial.*

2. $\left(H_W^V, +, \circ, \hat{0}, Id_V\right)$ *es un anillo (no conmutativo en general).*

Ejemplo 124 *Sea*

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\} \leqslant \mathbb{R}^4 = V.$$

Calcularemos H_W^V.
Necesitamos encontrar todas las matrices $X \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ *tales que*

$$X \begin{pmatrix} r \\ s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq W.$$

Como $\left(X\begin{pmatrix} r\\ s\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right)_{\underline{i}} = (X)_{\underline{i}}\begin{pmatrix} r\\ s\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, *vemos que basta resolver*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\\ s\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = 0$$

Es decir $x_1 r + x_2 s = 0$, $\forall r, s \in \mathbb{R}$. *Es claro que*

$$x_1 = 0, x_2 = 0.$$

Por lo tanto las matrices que corresponden a operadores en H_W^V *son de la forma*

$$X = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Ejercicio 203 *1. Compruebe que*

$$\{A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}) \mid A_{3,1} = A_{3,2} = A_{4,1} = A_{4,2} = 0\}$$

es un subanillo de $M_{4\times 4}(\mathbb{R})$, *es decir que es cerrado bajo la resta, el producto y que contiene al* 1.

2. Compruebe que

$$\{A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}) \mid A_{3,1} = A_{3,2} = A_{4,1} = A_{4,2} = 0\}$$

es un subespacio vectorial de $M_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

Teorema 107 *Si* $T \in H_W^V$, *y* $g(t) \in F[t]$ *entonces* $g(T) \in H_W^V$.

Demostración. Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] & V \\ W \arrow[u, "inc."] \arrow[r, "T_{|W}"] \arrow[ur, phantom, "="] & W \arrow[u, "inc."'] \end{tikzcd}$$

que se puede componer consigo mismo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] & V \arrow[r, "T"] & V \\ W \arrow[u, "inc."] \arrow[r, "T_{|W}"] & W \arrow[u, "inc."] \arrow[r, "T_{|W}"] & W \arrow[u, "inc."'] \end{tikzcd}$$

como este diagrama sigue siendo conmutativo, vemos que $\left(T_{|W}\right) \circ \left(T_{|W}\right) = (T \circ T)_{|W}$, así que $T \circ T \in H_W^V$. por inducción, tenemos que $T^n \in H_W^V$. Como H_W^V es un espacio vectorial, entonces $c_n T^n \in H_W^V, \forall c_n \in F$. Además

$$c_0 Id + c_1 T + ... + c_n T^n \in H_W^V.$$

■

Teorema 108 *Sean $T, U \in Hom(V, V)$ tales que $T \circ U = U \circ T$ entonces*

1. $Ker(T) \underset{U}{\leqslant} V$.
2. $T(V) \underset{U}{\leqslant} U$.
3. $f(T) \circ g(U) = g(U) \circ f(T), \forall f, g \in F[t]$.
4. $\forall f, g \in F[t]$, $Ker(f(T)) \underset{g(U)}{\leqslant} V$ *y* $f(T)(V) \underset{g(U)}{\leqslant} V$.
5. $E_\lambda = Ker(T - \lambda Id) \underset{T}{\leqslant} V$.
6. $Ker\Big((T - \lambda Id)^k\Big) \underset{T}{\leqslant} V$.

Demostración. 1. Si $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(T)$ entonces

$$T(U(\vec{x})) = U(T(\vec{x})) = U\left(\vec{0}\right) = \vec{0},$$

esto es, $U(\vec{x}) \in \mathrm{Ker}(T)$, por lo que $U(\mathrm{Ker}(T)) \subseteq \mathrm{Ker}(T)$, y entonces $\mathrm{Ker}(T) \underset{U}{\leqslant} V$.

2. $U(T(V)) = T(U(V)) \subseteq T(V)$ por lo tanto $T(V) \underset{U}{\leqslant} V$.

3. Se demuestra por inducción que $U \circ T^k = T^k \circ U$ y por lo tanto $U^r T^k = T^k U^r$ $\forall k, r \in \mathbb{N}$.

También por inducción sobre el grado de f, se demuestra que

$$f(T) \circ g(U) = g(U) \circ f(T).$$

4. Se sigue de 1. 2. y 3.
5. $\vec{v} \in \mathrm{Ker}(T - \lambda Id) \Rightarrow T(\vec{v}) = \lambda\vec{v} \Rightarrow T(T(\vec{v})) = T(\lambda(\vec{v})) = \lambda T(\vec{v}) \Rightarrow$
$T(\vec{v}) \in \mathrm{Ker}(T - \lambda Id)$.
Por lo tanto $T(\mathrm{Ker}(T - \lambda Id)) \subseteq \mathrm{Ker}(T - \lambda Id)$, y así $\mathrm{Ker}(T - \lambda Id) \underset{T}{\leqslant} V$.
6) Ejercicio. ■

Ejercicio 204 *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *consideremos el operador* $A \cdot \_ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. *Verifique que* $Ker(A \cdot \_) \leq_{A\cdot\_} \mathbb{R}^2$ *y que* $Im(A \cdot \_) \leq_{A\cdot\_} \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 205 *Háganse las inducciones del inciso* 3) *del Teorema anterior.*

Ejercicio 206 *Demuéstrese el inciso* 6) *del Teorema anterior.*

Ejercicio 207 *En* $V = P_4(\mathbb{R})$ *considere* $W = \mathfrak{L}(\{t, t^3\})$. *Encuentre* H_W^V.

Ejercicio 208 *En* $V = C([0,1])$, *el espacio de las funciones reales continuas definidas en* $[0,1]$, *considere el subespacio* $W = \mathfrak{L}\{sen(t), \cos(t)\}$. *Muestre que para todo polinomio* $f(t) \in \mathbb{R}[t]$, $f(\mathcal{T}) \in H_W^V$, *donde* $\mathcal{T} = \int_0^t$ *es el operador integral.*

Notación 15

1. *Denotemos por* ${}_T\left[\left\{\vec{0}\right\}, V\right]$ *el conjunto de los subespacios* $T-$*invariantes de* ${}_FV$.
2. *Denotemos por* ${}_T[W, V]$ *el conjunto de los subespacios* $T-$*invariantes de* V *que incluyen a* W. *Al usar esta notación estamos suponiendo que* $W \underset{T}{\leqslant} V$, *si no fuera el caso usamos* ${}_T(W, V]$.

Teorema 109 *Si* $\{W_\alpha\}_{\alpha\in X}$ *es una familia de subespacios* $T-$*invariantes de* V, *entonces* $\cap\{W_\alpha\}_{\alpha\in X}$ *es un subespacio* $T-$*invariante de* V.

Demostración. Como $\cap\{W_\alpha\}_{\alpha\in X} \leqslant V$, basta demostrar que

$$T\left(\cap\{W_\alpha\}_{\alpha\in X}\right) \subseteq \cap\{W_\alpha\}_{\alpha\in X}.$$

Sea $\vec{x} \in \cap\{W_\alpha\}_{\alpha\in X}$. Entonces $\vec{x} \in W_\alpha, \forall\alpha \in X$. Por lo tanto $T(\vec{x}) \in W_\alpha, \forall\alpha \in X$. Por lo tanto $T(\vec{x}) \in \cap\{W_\alpha\}_{\alpha\in X}$. ■

En vista del Teorema anterior, dado un subconjunto $S \subseteq V$ y un operador ${}_F V \xrightarrow{T}{}_F V$, existe el subespacio $T-$invariante generado por S. Denotaremos este espacio por $\mathfrak{L}_T(S)$.

$$\mathfrak{L}_T(S) = \cap \left\{ W \underset{T}{\leqslant} V \mid S \leqslant W \right\}.$$

Es claro que $\mathfrak{L}_T(S)$ es el menor subespacio $T-$invariante que incluye a S.

Teorema 110 *Si $\{W_\alpha\}_{\alpha \in X}$ es una familia de subespacios $T-$invariantes de V, entonces $\sum \{W_\alpha\}_{\alpha \in X}$ es un subespacio $T-$invariante de V.*

Demostración. Si $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + ... + \vec{x}_n$ con $\vec{x}_i \in W_{\alpha_i}$, entonces $T(\vec{x}) = T(\vec{x}_1) + T(\vec{x}_2) + ... + T(\vec{x}_n) \in W_{\alpha_1} + ... + W_{\alpha_n}$, pues $T(\vec{x}_i) \in W_{\alpha_i}$. ■

9.2. Subespacios T-cíclicos

Definición 112 *Se define el subespacio $T-$cíclico generado por $\vec{x}$ como $\mathfrak{L}_T(\vec{x})$, donde $\vec{x} \in V$ y $V \xrightarrow{T} V$ es lineal.*

Observación 86 $\mathfrak{L}_T(\vec{x}) = \mathfrak{L}\left(\{\vec{x}, T(\vec{x}), T^2(\vec{x}), ...\}\right) = \{f(T)(\vec{x}) \mid f \in F[t]\}$.

Demostración. $\mathfrak{L}_T(\vec{x}) \subseteq \mathfrak{L}\left(\{\vec{x}, T(\vec{x}), T^2(\vec{x}), ...\}\right)$:

Para esto, basta demostrar que $\mathfrak{L}\left(\{\vec{x}, T(\vec{x}), T^2(\vec{x}), ...\}\right)$ es un subespacio $T-$invariante. En efecto, tomemos una combinación lineal de

$$\left\{\vec{x}, T(\vec{x}), T^2(\vec{x}), ...\right\},$$

$$\sum_{i=1}^{k} c_i T^i(\vec{x}),$$

aplicando T obtenemos

$$\sum_{i=1}^{k} c_i T^{i+1}(\vec{x}) \in \mathfrak{L}\left(\left\{\vec{x}, T(\vec{x}), T^2(\vec{x}), ...\right\}\right).$$

$\mathfrak{L}\left(\{\vec{x}, T(\vec{x}), T^2(\vec{x}), ...\}\right) \subseteq \{f(T)(\vec{x}) \mid f \in F[t]\}$:

Como arriba, un elemento de $\mathfrak{L}\left(\left\{\vec{x}, T\left(\vec{x}\right), T^2\left(\vec{x}\right), ...\right\}\right)$ es de la forma

$$\sum_{i=1}^{k} c_i T^i\left(\vec{x}\right),$$

es claro que esto es

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{k} c_i t^i\right)(T)\right)\left(\vec{x}\right),$$

con

$$\left(\sum_{i=1}^{k} c_i t^i\right) = c_0 t^0 + c_1 t^1 + ... + c_k t^k \in F\left[t\right].$$

$\left\{f\left(T\right)\left(\vec{x}\right) \mid f \in F\left[t\right]\right\} \subseteq \mathfrak{L}_T(\vec{x})$:

Para esto basta notar que como $\vec{x} \in \mathfrak{L}_T(\vec{x}) \underset{T}{\leqslant} V$, entonces todos los elementos de la sucesión

$$\vec{x}, T\left(\vec{x}\right), T^2\left(\vec{x}\right), ..., T^k\left(\vec{x}\right), ...$$

pertenecen a $\mathfrak{L}_T(\vec{x})$. También dada cualquier conjunto finito de escalares

$$c_0, c_1, ..., c_k$$

$$c_0\vec{x},\ c_1 T\left(\vec{x}\right), ..., c_k T^k\left(\vec{x}\right) \in \mathfrak{L}_T(\vec{x})$$

y también

$$c_0\vec{x} + c_1 T\left(\vec{x}\right) + ... + c_k T^k\left(\vec{x}\right) \in \mathfrak{L}_T(\vec{x}).$$

De aquí debe ser claro que $f\left(T\right)\left(\vec{x}\right) \in \mathfrak{L}_T(\vec{x}), \forall f(t) \in F\left[t\right].$ ■

Lema 19 $W \underset{T}{\leqslant} V \Rightarrow (W \underset{f(T)}{\leqslant} V$ *y* $f\left(T\right)_{|W} = f\left(T_{|W}\right))$.

Demostración. Por el Teorema 107 se tiene que $W \underset{T}{\leqslant} V \Rightarrow W \underset{f(T)}{\leqslant} V$.

Ahora, el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] & V \\ W \arrow[u, "inc."] \arrow[r, "T_{|W}"] \arrow[ur, phantom, "="] & W \arrow[u, "inc."'] \end{tikzcd}$$

se puede componer consigo mismo para producir el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] & V \arrow[r, "T"] & V \\ W \arrow[u, "inc."] \arrow[r, "T_{|W}"] & W \arrow[u, "inc."] \arrow[r, "T_{|W}"] & W \arrow[u, "inc."'] \end{tikzcd}$$

de donde podemos observar que $(T^2)_{|W} = \left(T_{|W}\right)^2$. Por inducción podemos demostrar que $\left(T^k\right)_{|W} = \left(T_{|W}\right)^k, \forall k \in \mathbb{N}$.

Ahora, $c_k \cdot T^k \in H_W^V$ así que $W \underset{c_k \cdot T^k}{\leqslant} V$. Es fácil ver que

$$\left(c_k \cdot T^k\right)_{|W} = \left(c_k \cdot T_{|W}\right)^k.$$

Como $c_0 \cdot Id$, $c_1 \cdot T^1, \ldots\ c_k \cdot T^k \in H_W^V$, entonces W es

$$\left(c_0 \cdot Id + c_1 \cdot T^1 + \ldots + c_k \cdot T^k\right) - \text{invariante}$$

y es claro que

$$\left(c_0 \cdot Id + c_1 \cdot T^1 + \ldots + c_k \cdot T^k\right)_{|W} =$$
$$= \left((c_0 \cdot Id)_{|W} + (c_1 \cdot T)_{|W} + \ldots + \left(c_k \cdot T^k\right)_{|W}\right).$$

■

Teorema 111 $W \underset{T}{\leqslant} V \Rightarrow \mu_{T_{|W}}(t) \mid \mu_T(t)$.

Demostración. $\mu_T(t)\left(T_{|W}\right) = \mu_T\left(T_{|W}\right) = \mu_T(T)_{|W} = \hat{0}_{|W}$. Por definición de polinomio mínimo, tenemos que $\mu_T(t) \in F[t]\,\mu_{T_{|W}}(t)$. ■

Teorema 112 *Si $T :_F V \rightarrow_F V$ es un operador lineal en un espacio de dimensión finita n, entonces $\mu_T(t) = m.c.m.\left\{\mu_{T_{|\mathfrak{L}_T(\vec{x})}}(t) \mid \vec{x} \in V\right\}$.*

Demostración. Por el Teorema anterior, $\mu_{T_{|\mathfrak{L}_T(\vec{x})}}(t) \mid \mu_T(t)$. Por lo tanto

$$m.c.m.\left\{\mu_{T_{|\mathfrak{L}_T(\vec{x})}}(t) \mid \vec{x} \in V\right\} \mid \mu_T(t).$$

Por otra parte si hacemos

$$m(t) =: m.c.m.\left\{\mu_{T_{|\mathfrak{L}_T(\vec{x})}}(t) \mid \vec{x} \in V\right\},$$

entonces $\forall\vec{x}\in V$, tenemos que $\mu_{T_{|\mathfrak{L}_T(\vec{x})}}(t)\mid m(t)$, por lo que

$$h(t)\,\mu_{T_{|\mathfrak{L}_T(\vec{x})}}(t)=m(t),$$

para algún $h(t)\in F[t]$, así que

$$m(T)(\vec{x})=\left(h(T)\circ\mu_{T_{|\mathfrak{L}_T(\vec{x})}}(T)\right)(\vec{x})=h(T)\left(\left(\mu_{T_{|\mathfrak{L}_T(\vec{x})}}(T)\right)(\vec{x})\right)=\vec{0}.$$

Entonces $\mu_T(t)\mid m(T)$.

Por lo tanto $\mu_T(t)=m(T)$.

Ejercicio 209 *Demuestre que* $W\underset{T}{\leqslant}V$ *si y sólo si* $W=\sum\{\mathfrak{L}_T(\vec{x})\mid\vec{x}\in W\}$.

■

9.3. Polinomio característico y polinomio mínimo

Teorema 113 *Si* $V=\mathfrak{L}_T(\{\vec{x}\})$ *con* $\dim(V)=n<\infty$, *entonces* $\mu_T(t)=\pm\chi_T(t)$.

Demostración. Es una consecuencia de las hipótesis que

$$\beta=\left\{\vec{x},T(\vec{x}),...,T^{n-1}(\vec{x})\right\}$$

es una base de ${}_FV$:

Se tiene que

$$\left\{T^k(\vec{x})\mid k\in\mathbb{N}\right\}$$

genera V. Notemos que si $T^k(\vec{x})\in\mathfrak{L}\left(\vec{x},T(\vec{x}),...,T^{k-1}(\vec{x})\right)$ entonces

$$\{T^n(\vec{x})\mid n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathfrak{L}\left(\vec{x},T(\vec{x}),...,T^{k-1}(\vec{x})\right)$$

y así $\left\{\vec{x},T(\vec{x}),...,T^{k-1}(\vec{x})\right\}$ genera ${}_FV$. Por lo tanto $k\geq n$.

Tomemos ahora

$$\ell=\text{men}\left\{k\in\mathbb{N}\mid T^k(\vec{x})\in\mathfrak{L}\left(\vec{x},T(\vec{x}),...,T^{k-1}(\vec{x})\right)\right\}.$$

$$\ell\geq n.$$

Tomemos $\left\{\vec{x}, T\left(\vec{x}\right), ..., T^{\ell-1}\left(\vec{x}\right)\right\}$, por la manera en que escogimos ℓ en la lista anterior ningún vector es combinación lineal de los anteriores, por lo que

$$\left\{\vec{x}, T\left(\vec{x}\right), ..., T^{\ell-1}\left(\vec{x}\right)\right\}$$

es linealmente independiente. Por lo tanto

$$\ell \leqslant n.$$

Así que $\ell = n$ y por lo tanto

$$\beta = \left\{\vec{x}, T\left(\vec{x}\right), ..., T^{n-1}\left(\vec{x}\right)\right\}$$

es una base para ${}_F V$.

Además

$$[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} & \alpha_0 \\ \vec{e}_2 \vdots \vec{e}_3 \vdots \cdots \vdots \vec{e}_n \vdots & \alpha_1 \\ & \vdots \\ & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

donde

$$T^n\left(\vec{x}\right) = \alpha_0 \vec{x} + \alpha_1 T\left(\vec{x}\right) + ... + \alpha_{n-1} T^{n-1}\left(\vec{x}\right).$$

Calculemos el polinomio característico:

$$\chi_T(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 0 & & 0 & \alpha_0 \\ 1 & -t & & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -t & \alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & & 1 & \alpha_{n-1} - t \end{pmatrix}$$

desarrollando el determinante respecto al primer renglón tenemos

$$\chi_T(t) = -t \det \begin{pmatrix} -t & 0 & & 0 & \alpha_1 \\ 1 & -t & & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots\cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -t & \alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & & 1 & \alpha_{n-1} - t \end{pmatrix} + \left(-1^{n+1}\right)\alpha_0,$$

por inducción,

$$\chi_T(t) = t\left(\left(-1\right)^{n-1}\left(t^{n-1} - \alpha_{n-1}t^{n-2} - ... - \alpha_2 t - \alpha_1\right)\right) + \left(-1^{n+1}\right)\alpha_0 =$$

$$= (-1)^n \left(t^n - \alpha_{n-1}t^{n-1} - ... - \alpha_2 t^2 - \alpha_1 t - \alpha_0\right).$$

Así que

$$\chi_T(t)(T) = (-1)^n \left(T^n - \alpha_{n-1}T^{n-1} - ... - \alpha_2 T^2 - \alpha_1 T - \alpha_0\right)$$

calculando en $\vec{x}$:
$\left(\chi_T(T)\right)(\vec{x}) =$

$$(-1)^n \left(T^n(\vec{x}) - \alpha_{n-1}T^{n-1}(\vec{x}) - ... - \alpha_2 T^2(\vec{x}) - \alpha_1 T(\vec{x}) - \alpha_0(\vec{x})\right) = \vec{0}.$$

Por lo tanto $\mu_T(t) \mid \chi_T(t)$.

Supongamos ahora que $\mu_T(t) = b_0 + b_1 t + ... + t^m$, entonces

$$\vec{0} = \hat{0}(\vec{x}) = \mu_T(T)(\vec{x}) = (b_0 + b_1 T + ... + T^m)(\vec{x}),$$

de donde tenemos que $b_0(\vec{x}) + b_1 T(\vec{x}) + ... + b_{m-1}T^{m-1}(\vec{x}) = -T^m(\vec{x})$, entonces $m \geq n$.

Por lo tanto grad$(\mu_T(t)) = m \geq n =$ grad$\left(\chi_T(t)\right)$. Por otra parte, $\mu_T(t) \mid \chi_T(t)$ como vimos arriba, así que $m \leqslant n$. Por lo tanto $\mu_T(t)$ y $\chi_T(t)$ tienen el mismo grado y sólo pueden diferir en el signo, es decir

$$\mu_T(t) = \pm\chi_T(t).$$

Resta comprobar la base de la inducción de que

$$\chi_T(t) = (-1)^n \left(t^n - \alpha_{n-1}t^{n-1} - ... - \alpha_2 t^2 - \alpha_1 t - \alpha_0\right),$$

si $n = 1$, entonces $V = \mathfrak{L}(\vec{x})$ y $T(\vec{x}) = \alpha_0\vec{x}$, luego $\beta = \{\vec{x}\}$, $[T]_\beta^\beta = (\alpha_0)$ y $\chi_T(t) = \alpha_0 - t = (-1)^1(t - \alpha_0)$. ■

Ejercicio 210 *Demuestre el recíproco del Teorema anterior.*

Ejemplo 125 *Sea*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a+2b \\ -2a+b \end{pmatrix} \end{array}.$$

Entonces $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, *así que*

$$\mathfrak{L}_T\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right) = \mathfrak{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}\right) = \mathbb{R}^2.$$

Respecto a la base

$$\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\},$$

la matriz de T *es* $[T]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Con polinomio característico*

$$\chi_T(t) = -t(2-t) + 5 = t^2 - 2t + 5.$$

Además $\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De donde $\mu_T(t) \mid t^2 - 2t + 5$. *Además* $t^2 - 2t + 5$, *es irreducible en* $\mathbb{R}[t]$ *pues sus raíces son:* $1 + 2i$ *y* $1 - 2i$ $(t - 1 - 2i)(t - 1 + 2i) = +t^2 - 2t + 5$.
Por lo tanto $\mu_T(t) = \chi_T(t)$.

Ejercicio 211 *Suponga que le consta que*

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -z\lambda^2 \\ z & x + 2\lambda z \end{pmatrix}.$$

1. *Muestre que hay* 25 *matrices que conmutan con* $\begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix}$ *en* $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)$.

2. *De éstas, ¿cuántas son invertibles?*

3. *¿Cuántas matrices invertibles hay en* $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)$?

4. $P\begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix}P^{-1} = Q\begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix}Q^{-1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow Q^{-1}P \text{ conmuta con } \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

5. *¿Cuántas matrices en* $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)$ *son similares a* $\begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix}$?

Ejercicio 212 *¿Cuántas matrices hay en $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)$ no diagonalizables, pero que tienen valores propios?* ***Sugerencia.*** *Notar que A no puede tener dos valores propios distintos si no es diagonalizable, entonces $\chi_{_A}(t) = (t-\lambda)^2 = \mu_{_A}(t)$.*

Ejercicio 213 *¿Cuántas matrices hay en $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)$ que no sean diagonalizables, porque no tener valores propios?* ***Sugerencia.*** *Notar que t^2+bt+c no tiene raíces en $\mathbb{Z}_5 \Leftrightarrow b^2+c \in \{2,3\}$. Así que hay 10 polinomios mónicos de grado 2 sin raíces en $\mathbb{Z}_5$.*

Ejercicio 214 *¿Qué hay más en $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)$, matrices diagonalizables o matrices no diagonalizables?*

9.4. El Teorema de Cayley-Hamilton

Teorema 114 (Hamilton-Cayley) *Si $T \in Hom_F(V,V)$ y*

$$dim(V) = n < \infty,$$

entonces

$$\chi_{_T}(t)(T) = \hat{0} : V \to V.$$

Equivalentemente: $\mu_T(t) \mid \chi_{_T}(t)$.

Demostración. Recordemos los siguientes resultados que ya demostramos.
1. $\mu_T(t) = m.c.m.\left\{\mu_{T_{|\mathfrak{L}_T\{\vec{x}\}}}(t) \mid \vec{x} \in V\right\}$. (Teorema 112).
2. $\mu_{T_{|\mathfrak{L}_T\{\vec{x}\}}}(t) = \pm\chi_{T_{|\mathfrak{L}_T\{\vec{x}\}}}(t)$ (Teorema 113).
3. $W \underset{T}{\leqslant} V \Rightarrow \chi_{T_{|W}}(t) \mid \chi_{_T}(t)$.(Teorema 105).

Sea $\vec{x} \in V$, entonces $\mu_{T_{|\mathfrak{L}_T\{\vec{x}\}}}(t) = \pm\chi_{T_{|\mathfrak{L}_T\{\vec{x}\}}}(t)$.
Además $\mathfrak{L}_T\{\vec{x}\} \underset{T}{\leqslant} V$, así que por 3.,

$$\mu_{T_{|\mathfrak{L}_T\{\vec{x}\}}}(t) = \chi_{T_{|\mathfrak{L}_T\{\vec{x}\}}}(t) \mid \chi_{_T}(t).$$

Por lo tanto, $\chi_{_T}(t)$ es un múltiplo común para $\left\{\mu_{T_{|\mathfrak{L}_T\{\vec{x}\}}}(t) \mid \vec{x} \in V\right\}$. Por lo tanto $\mu_T(t) \mid \chi_{_T}(t)$.

Digamos que $\mu_T(t)\,h(t) = \chi_{_T}(t)$, con $h(t) \in F[t]$.

Así que, evaluando en T :

$$\chi_{_T}(T) = \mu_T(T) \circ h(T) = \hat{0} \circ h(T) = \hat{0}.$$

■

Ejemplo 126 *Sea*

$$\begin{array}{ccc} P_2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{T} & P_2(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f + f' \end{array},$$

y sea $\beta = \{1, t, t^2\}$ *la base canónica de* $P_2(\mathbb{R})$. *Entonces*

$$[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que $\chi_T(t) = (1-t)^3 = 1 - 3t + 3t^2 - t^3$

Escribamos las potencias de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

así que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\mathfrak{L}_T(t^2) = \mathfrak{L}(\{t^2, t^2+2t, t^2+2t+2\})$ *y además* $\{t^2, t^2+2t, t^2+2t+2\}$ *es l. i. entonces* $\mathfrak{L}_T(t^2) = P_2(\mathbb{R})$. *Así que* $\mu_T(t) = \chi_T(t)$, *por ser* $P_2(\mathbb{R})$ *un espacio* $T-$*cíclico. Puede uno ver directamente que* T *(o su matriz) no satisfacen* $1-t$ *ni* $(1-t)^2$.

Ejercicio 215 *Mostrar que la matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *no satisface* $1-t$ *y no satisface* $(1-t)^2$.

Teorema 115 *Si* $W \underset{T}{\leqslant} V$, $T : V \to V$ *es diagonalizable, y* $\dim(V) = n < \infty$, *entonces* $T_{|W} : W \to W$ *es diagonalizable.*

Demostración. T es diagonalizable $\iff \mu_T(t) = (t-\lambda_1)\cdot(t-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_k)$, donde $\lambda_1, ..., \lambda_k$ son los distintos valores propios de T.

Ahora, $\mu_{T_{|W}}(t) \mid \mu_T(t)$, así que $\mu_{T_{|W}}(t)$ es un producto de factores de grado uno distintos. Como las raíces del polinomio mínimo son los valores propios del operador, tenemos que $T_{|W}$ es diagonalizable. ■

9.5. Diagonalización simultánea

Definición 113 *Dos operadores $T, U : V \rightrightarrows V$ son simultáneamente diagonalizables, si existe una base β de V tal que las matrices $[T]_\beta^\beta$ y $[U]_\beta^\beta$ son diagonales.*

Teorema 116 *Sean $T, U : V \rightrightarrows V$ dos operadores en un espacio de dimensión finita n. Supongamos que tanto T como U son diagonalizables. Entonces son equivalentes:*

1. *$T \circ U = U \circ T$.*
2. *T y U son simultáneamente diagonalizables.*

Demostración. 2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que β es una base formada por vectores propios de T y de U. Sea $\vec{x} \in \beta$ y digamos que $T(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, $U(\vec{x}) = \gamma\vec{x}$.

Entonces

$$(T \circ U)(\vec{x}) = T(U(\vec{x})) = T(\gamma\vec{x}) = \gamma(T(\vec{x})) = \gamma(\lambda\vec{x}),$$

simétricamente,

$$(U \circ T)(\vec{x}) = U(T(\vec{x})) = U(\lambda\vec{x}) = \lambda(T(\vec{x})) = \lambda(\gamma\vec{x}),$$

de aquí es claro que los operadores $T \circ U$ y $U \circ T$ coinciden en la base β. Por la propiedad universal de las bases, tenemos que $T \circ U = U \circ T$.

1) $\Rightarrow$ 2) Por inducción sobre $\dim(V)$.

Base. Si $\dim(V) = 1$, no hay nada que demostrar, pues

$$Hom(V, V) \approxeq Hom(F, F) \approxeq F$$

con

$$\begin{array}{ccc} F & \approxeq & Hom(F, F) \\ c & \mapsto & c \cdot \_ \end{array}.$$

Paso inductivo.

Supongamos que $\dim(V) = n > 1$, digamos que

$$V = E_{\lambda_1} \bigoplus E_{\lambda_2} \bigoplus \dots \bigoplus E_{\lambda_k},$$

donde $\left\{\vec{0}\right\} \neq E_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(T - \lambda_i Id_V)\,,\ i \in \{1, \dots, k\}\,.$

Supongamos que $\dim(E_{\lambda_1}) < \dim(V)$. $E_{\lambda_1} \underset{U}{\leqslant} V$, puesto que T y U conmutan además $U_{E_{\lambda_1}|}$es diagonalizable puesto que U es diagonalizable (Teorema 115). Entonces, por hipótesis de inducción, $T_{|E_{\lambda_1}}$y $U_{|E_{\lambda_1}}$ son simultáneamente diagonalizables. Con el mismo argumento, tenemos también que $T_{|E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}}$,y $U_{|E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}}$, son simultáneamente diagonalizables.

Podemos suponer entonces que $V = E_\lambda$, donde $E_\lambda = \operatorname{Ker}(T - \lambda Id)$. Entonces $T = \lambda \cdot \_$ y entonces una base de vectores propios de U es también una base de vectores propios de T. ■

Ejemplo 127 *Veremos que*

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix},\ y\ \begin{pmatrix} -4 & 0 & 9 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

son simultáneamente diagonalizables.

El polinomio característico para $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ *es*

$$\det \begin{pmatrix} -1-t & -3 & 3 \\ 0 & -2-t & 1 \\ 0 & -4 & 3-t \end{pmatrix} = 2 + 3t - t^3 = (2-t)(-1-t)^2\,.$$

Como

$$((t-2)(t+1)) \left(\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vemos que el polinomio mínimo para esta matriz es $(t-2)(t+1)$, *por lo que la matriz es diagonalizable.*

El polinomio característico para $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 9 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ *es*

$$\det\left(\begin{pmatrix} -4-t & 0 & 9 \\ 0 & 8-t & 0 \\ 0 & 0 & 8-t \end{pmatrix}\right) = -256 + 12t^2 - t^3 = (-4-t)(8-t)^2,$$

Ahora,

$$\begin{aligned} ((t+4)(t-8))\begin{pmatrix} -4 & 0 & 9 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -12 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

De aquí, que $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 9 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ *es diagonalizable.*

Resta ver que ambas matrices conmutan:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 9 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -24 & 15 \\ 0 & -16 & 8 \\ 0 & -32 & 24 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 9 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -24 & 15 \\ 0 & -16 & 8 \\ 0 & -32 & 24 \end{pmatrix}.$$

Una base de vectores propios para la primera matriz se obtiene resolviendo

$$\left(\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} - 2I_3\right)\vec{x} = \vec{0}.$$

$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *las soluciones están generadas por* $\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$.

$$\left(\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} + 1I_3\right)\vec{x} = \vec{0}.$$

$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Espacio de soluciones:*
$\mathfrak{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$.
Una base de vectores propios para $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ *es*

$$\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

donde el primer vector es un vector propio que corresponde a 2 y los otros dos corresponden al valor propio -1.
Tomemos la segunda matriz $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 9 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, *como* [1]

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 9 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 9 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

---

[1] $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Vemos que $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *son vectores propios de* $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 9 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} -4-\lambda & 0 & 9 \\ 0 & 8-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 8-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 24-3\lambda \\ 8-\lambda \\ 32-4\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = 8$$

Análogamente,

$$\begin{pmatrix} -4-\lambda & 0 & 9 \\ 0 & 8-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 8-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -4-\lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

Como vimos, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *no es un vector propio de la segunda matriz, pero* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *sí puede serlo:*
Resolvamos

$$\begin{pmatrix} -4-\lambda & 0 & 9 \\ 0 & 8-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 8-\lambda \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -4-\lambda & 0 & 9 \\ 0 & 8-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 8-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4\alpha + \alpha\lambda + 9 \\ 8-\lambda \\ 8-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\lambda = 8$ *y* $4\alpha + \alpha\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow 12\alpha + 9 = 0$*, por lo tanto* $\alpha = -\frac{3}{4}$*, así que*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (-3/4) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio común para ambas matrices.
Por lo tanto, una base de vectores propios comunes a las dos matrices es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Los valores propios de la primera matriz respecto de los vectores anteriores son:

$$2, -1, -1$$

mientras que los de la segunda matriz son

$$8, -4, 8.$$

Ejercicio 216 *Decidir si las siguientes dos matrices son simultáneamente diagonalizables y de serlo encontrar una base común de vectores propios.*

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ -6 & -6 & 3 & 12 \\ -2 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 217 *Decidir si la siguientes dos matrices son simultáneamente diagonalizables y de serlo encontrar una base común de vectores propios.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9.5.1. El centralizador de un operador diagonalizable

Teorema 117 *Sea* $V \xrightarrow{T} V$ *es un operador lineal en un espacio de dimensión* n*, entonces*

1.

$$C(T) = \{U \in Hom(V,V) \mid T \circ U = U \circ T\}$$

es un subespacio vectorial de $Hom(V,V)$ *y*

2. $C(T)$ *es cerrado bajo la composición.*

3. $C(T)$ *es un subanillo de* $Hom(V,V)$.

Demostración. 1. $\widehat{0}$ conmuta con T.
S, U conmutan con $T \Rightarrow$

$$(S+U) \circ T = S \circ T + U \circ T = T \circ S + T \circ U = T \circ (S+U).$$

S conmuta con T, $c \in F \Rightarrow$

$$(cS) \circ T = (c \cdot \_ \circ S) \circ T = c \cdot \_ \circ (S \circ T) = c \cdot \_ \circ (T \circ S) =$$

$$= (c \cdot \_ \circ T) \circ S = (T \circ c \cdot \_) \circ S = T \circ (c \cdot \_ \circ S) = T \circ (cS).$$

2. S, U conmutan con $T \Rightarrow$

$$(S \circ U) \circ T = S \circ (U \circ T) = S \circ (T \circ U) = (S \circ T) \circ U =$$

$$= (T \circ S) \circ U = T \circ (S \circ U).$$

3. Basta notar que Id_V conmuta con T. ■

Ejercicio 218 *Muestre que un operador* $T : V \to V$ *conmuta con*

$$V \xrightarrow{c \cdot \_} V, \forall c \in F.$$

Denotemos $\mathfrak{D}(V) = \{T \in Hom(V,V) \mid T \text{ es diagonalizable}\}$.

Teorema 118 *Si* $T : V \to V$ *es un operador lineal diagonalizable en* V *de dimensión finita, entonces*

$$C(T) \cap \mathfrak{D}(V) = \{U : V \to V \mid U \text{ es simultáneamente diagonalizable con } T\}.$$

Demostración. Se sigue del Teorema 116. ■

Ejercicio 219 *Use el Ejemplo 111 para mostrar que para una matriz $D \in M_{n\times n}(F)$ diagonal y un polinomio $g(t) \in F[t]$,*

$$g\begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{i,i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\lambda_{1,1}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g(\lambda_{i,i}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g(\lambda_{n,n}) \end{pmatrix}.$$

Teorema 119 *Son equivalentes para $T, U : V \rightrightarrows V$ operadores lineales simultáneamente diagonalizables en un espacio ${}_FV$ de dimensión finita, con conjuntos de valores propios $\{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$: y $\{\gamma_1, ..., \gamma_m\}$*

1. *$\exists g(t) \in F[t]$ tal que $U = g(T)$.*
2. *Existe una suprayección*

$$\{1, ..., k\} \overset{\Psi}{\twoheadrightarrow} \{1, ..., m\}$$

tal que

$$E'_{\gamma_j} = \sum_{\Psi(u)=j} E_{\lambda_u}$$

Donde

$$E_\lambda = Ker(T - \lambda Id),\ E'_\gamma = Ker(U - \gamma Id).$$

Demostración. 1) $\Rightarrow$2) Si $T(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ entonces $g(T)(\vec{x}) = g(\lambda)\vec{x}$, (Ejemplo 111). Así que el conjunto de valores propios de $g(T)$ son

$$\gamma_1 = g(\lambda_1), ..., \gamma_m = g(\lambda_k)$$

Entonces Ψ es

$$\begin{array}{ccc} \{1, ..., k\} & \xrightarrow{\Psi} & \{1, ..., m\} \\ j & \longmapsto & s \ \text{ si } g(\lambda_j) = \gamma_s \end{array}.$$

Ahora, $\vec{x} \in E_{\lambda_j} \Rightarrow \vec{x} \in E'_{g(\lambda_j)}$, por lo que

$$\sum_{\substack{u \\ g(\lambda_u)=g(\lambda_j)}} E_{\lambda_u} \leqslant E'_{g(\lambda_j)}, \tag{9.1}$$

$\forall j \in \{1, ..., k\}$. Además

$$V = \sum_{g(\lambda_j)} \left(\sum_{\substack{u \\ g(\lambda_u)=g(\lambda_j)}} E_{\lambda_u} \right) \leqslant \sum_{g(\lambda_j)} E'_{g(\lambda_j)} = V.$$

Como las sumas de arriba son directas, podemos concluir que

$$\sum_{g(\lambda_j)} \left(\sum_{\substack{u \\ g(\lambda_u)=g(\lambda_j)}} \dim \ (E_{\lambda_u}) \right) = \dim (V) = \sum_{g(\lambda_j)} \dim \left(E'_{g(\lambda_j)} \right),$$

por lo que, a la vista de la ecuación 9.1,

$$\dim \left(E'_{g(\lambda_j)} \right) = \left(\sum_{\substack{u \\ g(\lambda_u)=g(\lambda_j)}} \dim \ (E_{\lambda_u}) \right).$$

2) $\Rightarrow$ 1)

Supongamos que $\{1, ..., k\} \overset{\Psi}{\twoheadrightarrow} \{1, ..., m\}$ es tal que

$$E'_{\gamma_j} = \left(\sum_{\substack{u \\ \Psi(u)=j}} E_{\lambda_u} \right), \forall j \in \{1, ..., m\}.$$

Tomemos un polinomio $g(t)$ tal que $g(\lambda_i) = \gamma_{_{\Psi(i)}}$. Entonces

$$T(\vec{x}) = \lambda_i \vec{x} \Rightarrow g(T)(\vec{x}) = g(\lambda_i)\vec{x} = \gamma_{_{\Psi(i)}} \cdot \vec{x}.$$

Por otra parte,

$$T(\vec{x}) = \lambda_i \vec{x} \Rightarrow \vec{x} \in E_{\lambda_i} \leqslant E'_{\gamma_{\Psi(i)}},$$

así que $U(\vec{x}) = \gamma_{_{\Psi(i)}} \cdot \vec{x} = g(T)(\vec{x})$.

En particular, U y $g(T)$ coinciden en una base de vectores propios para T, por lo que

$$g(T) = U.$$

■

Ejercicio 220 *Demuestre que ninguna de las dos matrices en el Ejemplo 127 se puede expresar como un polinomio evaluado en la otra matriz.*

Ejemplo 128 *Consideremos las dos matrices reales* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Los valores propios de la primera son las raíces de

$$\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} - t\right) = 4 - 8t + 5t^2 - t^3 = (1-t)(2-t)^2 .$$

Llamemos $E_1 = Ker\left(\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} - 1I_3\right)\cdot \_\right) = \mathfrak{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Llamemos $E_2 = Ker\left(\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} - 2I_3\right)\cdot \_\right) =$

$= \mathfrak{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Los valores propios de la segunda son: las raíces de

$$\det\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} - t\right) = -9 - 3t + 5t^2 - t^3 = (-1-t)(3-t)^2 .$$

Llamemos

$$E'_{-1} = Ker\left(\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} + 1I_3\right)\cdot \_\right) = \mathfrak{L}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Llamemos

$$E'_3 = Ker\left(\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} - 3I_3\right)\cdot \_\right) = \mathfrak{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Tomemos la función

$$\begin{array}{ccc} \{1,2\} & \longrightarrow & \{-1,3\} \\ 1 & \mapsto & -1 \\ 2 & \mapsto & 3 \end{array}.$$

Tenemos que $E'_{-1} = E_1$ *y*

$$\begin{aligned} E'_3 &= \mathfrak{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= E_2 = \mathfrak{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Entonces debe existir un polinomio $g(t)$ *tal que*

$$g\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tomemos un polinomio $g(t)$ *tal que* $g(1) = -1$ *y tal que* $g(2) = 3:$

$$-3(1-t) - (2-t) = -5 + 4t.$$

En efecto.

$$\left(4\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} - 5I_3\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 221 *Encuentre un polinomio* $h(t)$ *tal que*

$$h\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 222 *Sean* $A, B \in M_{n\times n}(F)$, *muestre que si* B *tiene más valores propios que* A *no puede haber un polinomio* $h(t) \in F[t]$ *tal que* $h(A) = B$.

Ejercicio 223 *Muestre dos matrices diagonales $A, B \in M_{n\times n}(F)$, con el mismo número de valores propios tal que ninguna de ellas sea un polinomio $f(t) \in F[t]$ evaluado en la otra.*

Ejercicio 224 *Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces*

$$\chi_A(t) = \det\left(\begin{pmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{pmatrix}\right) = t^2 - (a+d)t + ad - bc.$$

tiene dos raíces distintas en $\mathbb{Z}_5$ sii $(a^2 - 2ad + d^2 + 4bc) \in \{1, 4\}$.

Ejercicio 225 *¿Cuántas matrices diagonalizables hay en $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_5)$? Sugerencia: dos matrices similares tienen el mismo polinomio característico.*

Ejercicio 226 *Encuentre todas las matrices en $M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$ que conmutan con $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Ejercicio 227 *Cuente todas las matrices diagonalizables en $M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$ que conmutan con $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Ejercicio 228 *Encuentre todas las matrices diagonalizables en $M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$ que son de la forma $h\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, para algún polinomio $h(t) \in F[t]$.*

Teorema 120 *Sea $\{T_1, ..., T_k\}$ un conjunto finito de operadores diagonalizables que conmutan dos a dos, entonces $T_1, ..., T_k$ son simultáneamente diagonalizables.*

Demostración. Por inducción sobre k.
Base. Si $k = 1$ *no* hay nada que demostrar.
$k = 2$
Supongamos que

$$V = E_{\lambda_{i,1}} \bigoplus E_{\lambda_{i,2}} \cdots$$

donde $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, ...$ son los distintos valores propios de T_i.

Como T_2 conmuta con T_1, entonces $E_{\lambda_{1,j}} \underset{T_2}{\leq} V$ (Teorema 108).

Por el Teorema 115,

$$E_{\lambda_{1,j}} \overset{T_{2|E_{\lambda_{1,j}}}}{\longrightarrow} E_{\lambda_{1,j}}$$

es diagonalizable.

Así que

$$E_{\lambda_{1,j}} = \sum_k \left(E_{\lambda_{1,j}} \cap E_{\lambda_{2,k}}\right),$$

de donde tenemos que

$$V = \sum_{j,k} \left(E_{\lambda_{1,j}} \cap E_{\lambda_{2,k}}\right), \tag{9.2}$$

esta suma es directa (ejercicio).

Así es claro que si tomamos una base $\beta_{j,k}$ de $E_{\lambda_{1,j}} \cap E_{\lambda_{2,k}}$, entonces

$$\bigcup_{j,k} \beta_{j,k}$$

es una base de vectores propios de T_1 y de T_2.

Paso inductivo.

Supongamos que $k > 2$ y que $T_1, ..., T_{k-1}$ son simultáneamente diagonalizables, digamos que los vectores propios de T_j son

$$\lambda_{j,1}, \lambda_{j,2}, ..., \lambda_{j,m_j},$$

entonces

$$V = \bigoplus_{(i_1,i_2,...,i_{k-1})} \left(E_{\lambda_{1,i_1}} \cap E_{\lambda_{2,i_2}} \cap ... \cap E_{\lambda_{k-1,i_{k-1}}}\right).$$

Fijémonos en un sumando directo de la ecuación arriba, por ejemplo en

$$W = E_{\lambda_{1,1}} \cap E_{\lambda_{2,1}} \cap ... \cap E_{\lambda_{k-1,1}}.$$

Este sumando es T_k- invariante por ser una intersección de subespacios T_k- invariantes.

Como $T_{k|W}$ es diagonalizable, entonces

$$W = \bigoplus_{i_k} \left(W \cap E_{\lambda_k, i_k}\right).$$

$\therefore$

$$V = \bigoplus_{(i_1,i_2,...,i_{k-1},i_k)} \left(E_{\lambda_{1,i_1}} \cap E_{\lambda_{2,i_2}} \cap ... \cap E_{\lambda_{k-1,i_{k-1}}} \cap E_{\lambda_{k,i_k}}\right).$$

Es decir $T_1, ..., T_k$ son simultáneamente diagonalizables. ■

Ejercicio 229 *Demostrar que la suma en 9.2 es directa.*

Capítulo 10

Formas canónicas

10.1. Lemas básicos de descomposición

Teorema 121 *Sea* $T \in Hom_F(V,V)$ *y* $\mu_T(t) = f(t)g(t)$ *con m.c.d.* $\{f(t), g(t)\} = 1$. *Entonces*

$$V = Ker(f(T)) \bigoplus Ker(g(T)).$$

Demostración. $1 = h(t)\,f(t) + k(t)\,g(t)$, para algunos $h(t), k(t) \in F[t]$, entonces

$$Id_V = h(T)\,f(T) + k(T)\,g(T),$$

entonces,

$$\forall \vec{v} \in_F V, \vec{v} = (f(T)\,h(T))(\vec{v}) + (g(T)\,k(T))(\vec{v}),$$

notemos que el primer sumando pertenece a $\mathrm{Ker}(g(T))$:

$$g(T)((f(T)\,h(T))(\vec{v})) = (g(T) \circ f(T))[h(T)(\vec{v})] =$$

$$= \mu_T(T)[h(T)(\vec{v})] = \hat{0}[h(T)(\vec{v})] = \vec{0}.$$

Análogamente, $(g(T)\,k(T))(\vec{v}) \in \mathrm{Ker}(f(T))$.

Por lo tanto

$$V = \mathrm{Ker}(f(T)) + \mathrm{Ker}(g(T)).$$

Resta ver que $\mathrm{Ker}(f(T)) \cap \mathrm{Ker}(g(T)) = \left\{\vec{0}\right\}$.

Como $Id_V = h(T)\,f(T) + k(T)\,g(T)$, entonces

$$\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f(T)) \cap \mathrm{Ker}(g(T)) \Rightarrow \vec{x} \in \mathrm{Ker}(Id_V) = \left\{\vec{0}\right\}.$$

Por lo tanto
$$\operatorname{Ker}(f(T)) \cap \operatorname{Ker}(g(T)) = \left\{\vec{0}\right\}.$$

■

Lema 20 *Sea $T \in Hom_F(V,V)$ y $\mu_T(t) = p_1^{k_1}(t) \cdot p_2^{k_2}(t) \cdot ... \cdot p_s^{k_s}(t)$, con $p_i(t)$ irreducible mónico para cada $i \in \{1,...,s\}$, y $p_i(t) \neq p_j(t)$ si $i \neq j$. Sea*

$$W = Ker\left(p_2^{k_2}(T) \circ ... \circ p_s^{k_s}(T)\right).$$

entonces

1. $W \underset{T}{\leq} V$.

2. $\mu_{T|W}(t) = p_2^{k_2}(t) \cdot ... \cdot p_s^{k_s}(t)$.

Demostración. 1. Sea sigue del Teorema 108.
2. Como un operador se anula en su núcleo, entonces

$$p_2^{k_2}(T) \cdot ... \cdot p_s^{k_s}(T) = \left(p_2^{k_2}(t) \cdot ... \cdot p_s^{k_s}(t)\right)(T)$$

se anula en W. Por lo tanto

$$\mu_{T|W}(t) \mid p_2^{k_2}(t) \cdot ... \cdot p_s^{k_s}(t).$$

Por otra parte, se sigue del Teorema anterior que

$$V = \operatorname{Ker}\left(p_1^{k_1}(T)\right) \bigoplus W,$$

así que es claro que

$$p_1^{k_1}(T) \circ \mu_{T|W}(T) = \left(p_1^{k_1}(t) \cdot \mu_{T|W}(t)\right)(T)$$

se anula en V. Por lo tanto,

$$\mu_T(t) = p_1^{k_1}(t) \cdot p_2^{k_2}(t) \cdot ... \cdot p_s^{k_s}(t) \mid p_1^{k_1}(t) \cdot \mu_{T|W}(t),$$

así que
$$p_2^{k_2}(t) \cdot ... \cdot p_s^{k_s}(t) \mid \mu_{T|W}(t).$$

■

Teorema 122 *Sea* $T \in Hom_F(V,V)$ *y* $\mu_T(t) = p_1^{k_1}(t) \cdot p_2^{k_2}(t) \cdot ... \cdot p_s^{k_s}(t)$, *con* $p_i(t)$ *irreducible mónico para cada* $i \in \{1,...,s\}$, *y* $p_i(t) \neq p_j(t)$ *si* $i \neq j$. *Entonces*

$$V = Ker\left(p_1^{k_1}(T)\right) \bigoplus Ker\left(p_2^{k_2}(T)\right) \bigoplus ... \bigoplus Ker\left(p_s^{k_s}(T)\right).$$

Demostración. *m.c.d.* $\left\{p_1^{k_1}(t), p_2^{k_2}(t), ..., p_s^{k_s}(t)\right\} = 1$. Entonces, por el Teorema anterior,

$$V = \text{Ker}\left(p_1^{k_1}(T)\right) \bigoplus \left(\text{Ker}\left(p_2^{k_2}(T) \circ ... \circ p_s^{k_s}(T)\right)\right).$$

Sea W =Ker$\left(p_2^{k_2}(T) \circ ... \circ p_s^{k_s}(T)\right)$, entonces con un razonamiento inductivo (ya que el polinomio mínimo de $T_{|W}$ es $p_2^{k_2}(t) \cdot ... \cdot p_s^{k_s}(t)$ (Lema anterior),

$$W = \text{Ker}\left(p_2^{k_2}(T)\right) \bigoplus ... \bigoplus \text{Ker}\left(p_s^{k_s}(T)\right).$$

Así, finalmente,

$$V = \text{Ker}\left(p_1^{k_1}(T)\right) \bigoplus \text{Ker}\left(p_2^{k_2}(T)\right) \bigoplus ... \bigoplus \text{Ker}\left(p_s^{k_s}(T)\right).$$

(Obsérvese que la base de la inducción, $s = 1$ es trivial y para $s = 2$ es inmediato del Teorema anterior). ■

Lema 21 *Si* $\mu_T(t) = p(t)$ *es irreducible y* $dim(V) = n$, *entonces*

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathfrak{L}_T(\vec{x}_i).$$

Demostración. Sea $\vec{v} \in V \setminus \left\{\vec{0}\right\}$, entonces $\left\{\vec{0}\right\} \subsetneqq \mathfrak{L}_T(\vec{v}) \underset{T}{\leqslant} V$, por lo que

$$1 \neq \mu_{T_{|\mathfrak{L}_T(\vec{v})}}(t) \mid \mu_T(t) = p(t).$$

Así que $p(t) = \mu_{T_{|\mathfrak{L}_T(\vec{v})}}(t) = \pm\varkappa_{T_{|\mathfrak{L}_T(\vec{v})}}(t)$ (Teorema 113).

Ahora,

$$\dim\left(\mathfrak{L}_T(\vec{v})\right) = \text{grad}\left(p(t)\right).$$

Si $\mathfrak{L}_T(\vec{v}) \subsetneqq V$, tomemos $\vec{v}_1 \in V \setminus \mathfrak{L}_T(\vec{v})$, entonces

$$\mathfrak{L}_T(\vec{v}) + \mathfrak{L}_T(\vec{v}_1) = \mathfrak{L}_T(\vec{v}) \bigoplus \mathfrak{L}_T(\vec{v}_1),$$

pues si $\vec{0} \neq \vec{w} \in \mathfrak{L}_T(\vec{v}) \cap \mathfrak{L}_T(\vec{v}_1)$, entonces $\mathfrak{L}_T(\vec{v}), \mathfrak{L}_T(\vec{v}_1), \mathfrak{L}_T(\vec{w})$ serían todos de dimensión grad($p(t)$) y como $\mathfrak{L}_T(\vec{w}) \subseteq \mathfrak{L}_T(\vec{v})$, $\mathfrak{L}_T(\vec{w}) \subseteq \mathfrak{L}_T(\vec{v}_1)$, entonces

$$\mathfrak{L}_T(\vec{v}_1) = \mathfrak{L}_T(\vec{w}) = \mathfrak{L}_T(\vec{v}), \underset{\circ}{\nabla}(\vec{v}_1 \in V \setminus \mathfrak{L}_T(\vec{v})).$$

Si $\mathfrak{L}_T(\vec{v}) \bigoplus \mathfrak{L}_T(\vec{v}_1) \lneqq V$, tomemos $\vec{v}_2 \in V \setminus (\mathfrak{L}_T(\vec{v}) \bigoplus \mathfrak{L}_T(\vec{v}_1))$, entonces

$$(\mathfrak{L}_T(\vec{v}) \bigoplus \mathfrak{L}_T(\vec{v}_1)) + \mathfrak{L}_T(\vec{v}_2) = (\mathfrak{L}_T(\vec{v}) \bigoplus \mathfrak{L}_T(\vec{v}_1)) \bigoplus \mathfrak{L}_T(\vec{v}_2)$$

pues si $\vec{0} \neq \vec{w} \in (\mathfrak{L}_T(\vec{v}) \bigoplus \mathfrak{L}_T(\vec{v}_1)) \cap \mathfrak{L}_T(\vec{v}_2)$, entonces $\mathfrak{L}_T(\vec{w}) = \mathfrak{L}_T(\vec{v}_2)$, y entonces $\vec{v}_2 \in \mathfrak{L}_T(\vec{v}_2) \leqslant \mathfrak{L}_T(\vec{v}) \bigoplus \mathfrak{L}_T(\vec{v}_1)$ $\underset{\circ}{\nabla}$.

Continuando de esta manera encontramos una sucesión de subespacios

$$\mathfrak{L}_T(\vec{v}), \mathfrak{L}_T(\vec{v}_1), \mathfrak{L}_T(\vec{v}_2), ..., \mathfrak{L}_T(\vec{v}_{s-1})$$

tales que

$$\mathfrak{L}_T(\vec{v}) \bigoplus \mathfrak{L}_T(\vec{v}_1) \bigoplus \mathfrak{L}_T(\vec{v}_2) \bigoplus ... \bigoplus \mathfrak{L}_T(\vec{v}_{s-1}) = V$$

(La sucesión termina pues $\dim(V) = n < \infty$).

Además

$$\dim(V) = s \cdot \operatorname{grad}(p(t)),$$

es decir que $\operatorname{grad}(p(t)) \mid \dim(V)$. ■

10.2. La matriz compañera de un polinomio

Definición 114 *Sea*

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_{n-1} t^{n-1} + t^n$$

un polinomio mónico de grado n, definamos la matriz compañera de f como

$$C_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Teorema 123 $\chi_{_T}(C_f) = \pm f(t)$.

Demostración. Véase la demostración del Teorema 113 ■

Ejemplo 129 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ *tiene polinomio característico* $-\left(1+2t+3t^2+t^3\right)$:

$$\det\begin{pmatrix} -t & 0 & -1 \\ 1 & -t & -2 \\ 0 & 1 & -3-t \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1+2t & -t & -2 \\ 3t+t^2 & 1 & -3-t \end{pmatrix} =$$

$$= -1\det\begin{pmatrix} 1+2t & -t \\ 3t+t^2 & 1 \end{pmatrix} = -\left(1+2t+3t^2+t^3\right).$$

Ejemplo 130 *Como* t^2+1 *es irreducible en* $\mathbb{R}[t]$, *entonces su matriz compañera no es diagonalizable, es decir,*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

no es diagonalizable.
Por la misma razón, la matriz compañera de

$$\left(t^2+1\right)(t-2)(t) = t^4-2t^3+t^2-2t$$

no es diagonalizable:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

10.3. Matrices diagonales por bloques

Teorema 124 *Si* $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ *entonces* $\mu_A(t) = [\mu_B(t); \mu_C(t)]$.

Demostración.

$$A^m = \begin{pmatrix} B^m & 0 \\ 0 & C^m \end{pmatrix},$$

para toda $m \in \mathbb{N}$ y también,

$$\forall c_m \in F, c_m A^m = \begin{pmatrix} c_m B^m & 0 \\ 0 & c_m C^m \end{pmatrix}.$$

Entonces para
$$f(t) = c_0 + c_1 t + ... + c_m t^m,$$
tenemos que
$$f(A) = c_0 I + c_1 A + ... + c_m A^m$$
y que
$$f(A) = \begin{pmatrix} f(B) & 0 \\ 0 & f(C) \end{pmatrix}.$$
Entonces si $f(A) = 0$, también $f(B) = 0$ y $f(C) = 0$. Por lo tanto
$$\mu_B(t) \mid f(t)$$
y
$$\mu_C(t) \mid f(t).$$
Por lo tanto,
$$[\mu_B(t); \mu_C(t)] \mid f(t).$$
En particular,
$$[\mu_B(t); \mu_C(t)] \mid \mu_A(t).$$
Por otra parte denotemos
$$h(t) = [\mu_B(t); \mu_C(t)],$$
entonces
$$h(t) = \mu_B(t) k_1(t), \; h(t) = \mu_C(t) k_2(t),$$
entonces
$$h(B) = k_1(B) \mu_B(B) = 0$$
y
$$h(C) = k_2(C) \mu_C(C) = 0.$$
Por lo tanto
$$h(A) = \begin{pmatrix} h(B) & 0 \\ 0 & h(C) \end{pmatrix} = \left(\begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \right).$$

Entonces

$$\mu_A(t) \mid h(t) = [\mu_B(t)\,;\mu_C(t)]\,.$$

Por lo tanto

$$\mu_A(t) = [\mu_B(t)\,;\mu_C(t)]\,.$$

■

Ejemplo 131 $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$

El polinomio mínimo para B es: $-4 + 8X - 5X^2 + X^3$,
el polinomio mínimo para C es: $3 - 4X + X^2$.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$-4 + 8X - 5X^2 + X^3$, *tiene raíces:* $\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$.

Las raíces de $3 - 4X + X^2$, *son* $\begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$.

por lo tanto,

$$m.c.m.\left(\left\{-4 + 8X - 5X^2 + X^3, 3 - 4X + X^2\right\}\right) = (X-1)(X-2)^2(X-3),$$

así que el polinomio mínimo para A debe ser $(X-1)(X-2)^2(X-3)$.
En efecto,

$$(A-1) = (\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} - 1 \cdot Id_5) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A-2)^2 = (\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot Id_5)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A-3)=\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} - 3\cdot Id_5\right) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10.4. El p-zoclo

Definición 115 *Sea $V \xrightarrow{T} V$ un operador lineal en un espacio vectorial de dimensión finita, sea $p(t) \in F[t]$, un polinomio irreducible, entonces*

$$p - zoc(V) =: Ker(p(T)).$$

Observación 87 *$p{-}zoc(V) \underset{T}{\leqslant} V$.*

Demostración. Esto se sigue de que T y $p(T)$ conmutan (ver el Teorema 108).
■

Lema 22 *Sea $\{W_\alpha\}_{\alpha\in X}$, una familia en ${}_T\left[\{\vec{0}\}, V\right]$ tal que*

$$\sum_{\alpha\in X} W_\alpha = \bigoplus_{\alpha\in X} W_\alpha,$$

entonces

$$p - zoc(\bigoplus W_\alpha) = \bigoplus (p - zoc(W_\alpha)).$$

Demostración. Primero,

$$p - \text{zoc}(W_\beta) \subseteq W_\beta$$

y

$$\sum_{\alpha \in X \setminus \{\beta\}} p - \text{zoc}(W_\alpha) \subseteq \sum_{\alpha \in X \setminus \{\beta\}} (W_\alpha),$$

por lo que

$$p - \text{zoc}(W_\beta) \cap (\sum_{\alpha \in X \setminus \{\beta\}} \{p - \text{zoc}(W_\alpha)\}) \subseteq W_\beta \cap \sum_{\alpha \in X \setminus \{\beta\}} (W_\alpha) = \left\{\vec{0}\right\}$$

y por lo tanto

$$\sum_{\alpha \in X} p - \text{zoc}(W_\alpha) = \bigoplus_{\alpha \in X} p - \text{zoc}(W_\alpha).$$

$\subseteq$)

$$\bar{v} \in p - \text{zoc}(\bigoplus_{\alpha \in X} W_\alpha) \Rightarrow \bar{v} = \bar{w}_{\alpha_1} + ... + \bar{w}_{\alpha_k} \text{ con } \bar{w}_{\alpha_i} \in W_{\alpha_i}$$

y

$$\vec{0} = p(T)(\bar{v}) = p(T)(\bar{w}_{\alpha_1}) + ... + p(T)(\bar{w}_{\alpha_k}) \in$$
$$\in \sum_{\alpha \in X} W_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in X} W\alpha \Rightarrow p(T(\bar{w}_{\alpha_i}) = \vec{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{w}_{\alpha_i} \in p - \text{zoc}(W_{\alpha_i}) \Rightarrow \bar{v} \in \sum_{\alpha \in X} p - \text{zoc}(W_\alpha) = \bigoplus_{\alpha \in X} p - \text{zoc}(W_\alpha).$$

$\supseteq$)

$$\bar{v} \in \bigoplus_{\alpha \in X} p - \text{zoc}(W_\alpha) \Rightarrow \bar{v} = \bar{w}_{a_1} + ... + \bar{w}_{\alpha_k} \text{ con } \bar{w}_{\alpha_i} \in p - \text{zoc}(W_{\alpha_i}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(T)(\bar{w}_{\alpha_i}) = \vec{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p(T)(\bar{v}) = \vec{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{v} \in \text{Ker}(p(T)) \text{ y } \bar{v} \in \bigoplus_{\alpha \in X} W_\alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{v} \in p - \text{zoc}(\bigoplus_{\alpha \in X} W_\alpha).$$

■

Teorema 125 *Sea* $V=\mathcal{L}_T(\{\bar{x}\})$ *y* $\mu(t)=:\mu_T(t)$, *sea* $\bar{y}=h(T)(\bar{x})$ *con* $h(t)\in F[t]$. *(i. e.* $\bar{y}\in\mathcal{L}_T(\{\bar{x}\})$*), entonces*

$$\hat{\mu}(t)=:\mu_{T_{|\mathcal{L}_T(\{\bar{y}\})}}(t)=\frac{\mu(t)}{(\mu(t);h(t))}.$$

Demostración.

$$\left((\frac{\mu(t)}{(\mu(t);h(t))})(T)\right)(\bar{y})=\left((\frac{\mu(t)}{(\mu(t);h(t))})(T)\right)(h(T)(\bar{x}))=$$

$$=\left(\frac{\mu(t)}{(\mu(t);h(t))}\cdot h(t)\right)(T)(\bar{x})=\left(\frac{h(t)}{(\mu(t);h(t))}\cdot\mu(t)\right)(T)(\bar{x})=$$

$$=\left(\left(\frac{h(t)}{(\mu(t);h(t))}\right)(T)\circ\mu(T)\right)(\bar{x})=\left(\left(\frac{h(t)}{(\mu(t);h(t))}\right)(T)\circ\hat{0}\right)(\bar{x})=\bar{0}$$

Por lo tanto,

$$\bar{y}\in\operatorname{Ker}\left(\left(\frac{\mu(t)}{(\mu(t);h(t))}\right)(T)\right)\leqslant_T V$$

entonces

$$\mathcal{L}_T(\{\bar{y}\})\subseteq K\bar{e}r\left(\frac{\mu(t)}{(\mu(t);h(t))}\right)(T),$$

y

$$\left(\frac{\mu(t)}{(\mu(t);h(t))}\right)(T_{|\mathcal{L}_T(\{\bar{y}\})})=\hat{0}_{|\mathcal{L}_T(\{\bar{y}\})};$$

por lo que

$$\hat{\mu}(t)|\frac{\mu(t)}{(\mu(t);h(t))}.$$

Ahora,

$$\vec{0}=\hat{\mu}(t)(T)(\bar{y})=\hat{\mu}(T)(h(T)(\bar{x}))=(\hat{\mu}(t)\cdot h(t))(T)(\bar{x}),$$

por lo que

$$\bar{x}\in\operatorname{Ker}((\hat{\mu}(T)\cdot h(T))\leqslant_T V$$

y entonces

$$V=\mathcal{L}_T(\{\bar{x}\})\subseteq\operatorname{Ker}(\hat{\mu}(t)\cdot h(t))(T)$$

con lo que

$$(\hat{\mu}(t)h(t))(T)=\hat{0}.$$

Entonces

$$\mu(t)\mid\hat{\mu}(t)h(t)$$

y por lo tanto

$$\frac{\mu(t)}{(\mu(t);h(t))} \mid \hat{\mu}(t)\frac{h(t)}{(\mu(t);h(t))}$$

pero

$$\left(\frac{\mu(t)}{(\mu(t);h(t))};\frac{h(t)}{(\mu(t);h(t))}\right)=1,$$

por lo tanto

$$\frac{\mu(t)}{(\mu(t);h(t))} \mid \hat{\mu}(t).$$

Finalmente concluímos que

$$\frac{\mu(t)}{(\mu(t);h(t))} = \hat{\mu}(t).$$

■

Ejemplo 132 *De que si $V=\mathfrak{L}_T(\vec{x})$, con polinomio mínimo, entonces para cualquier otro polinomio $h(t)$, tenemos que*

$$\mu_{T|_{\mathfrak{L}_T(h(T)(\vec{x}))}}(t)=\frac{\mu_T(t)}{(\mu_T(t);h(t))}.$$

Tomemos el polinomio

$$(t-1)(t-2)\left(t^2+t+1\right)\in\mathbb{R}[t],$$

cuya matriz compañera es

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathbb{R}^4=\mathfrak{L}_T(\vec{e}_1).$$

Estamos tomando

$$T:\mathbb{R}^4\xrightarrow{A\cdot}\mathbb{R}^4$$

$$\left(T^2+T+1\cdot Id\right)(\vec{e}_1)=$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + I_4 \right) (\vec{e}_1) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} (\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lo que debemos esperar es que este vector genere un espacio T-cíclico tal que la restricción de T a este subespacio tenga polinomio mínimo $(t-1)(t-2)$, veamos que en efecto es así:

$$\mathfrak{L}_T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \right\} =$$

y

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ahora,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

ya es un conjunto linealmente dependiente. Expresemos el tercer vector como combinación lineal de los anteriores, resolviendo el sistema con matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así que

$$T^2(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) + 3T(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}),$$

por lo tanto el polinomio mínimo correspondiente es

$$t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2).$$

Lema 23 *Sea*

$$V = \mathfrak{L}_T(\bar{x})$$

y

$$\mu_T(t) = p^k(t)$$

con $p(t) \in F[T]$ *irreducible y mónico. Entonces*

$$p - zoc(V) = \left\{ \left(p^{k-1}(t) \cdot \alpha(t)\right)(T)(\bar{x}) \mid (\alpha(t); p(t)) = 1 \right\}.$$

Demostración. $\supseteq$) Obvio.
$\subseteq$)

$$\bar{y} \in (p - \text{zoc}(V)) \setminus \{\vec{0}\} = (p - \text{zoc}(\mathfrak{L}_T\{\bar{x}\})) \setminus \{\vec{0}\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{y} = h(T)(\bar{x}) \quad \text{p. a. } h(t) \in F1t]$$

y

$$p(T)(\bar{y}) = \vec{0}.$$

Así,

$$\mu_{T|_{\mathcal{L}_T(\{\bar{y}\})}}(t) \mid p(t)$$

(por definición), y entonces

$$\mu_{T|_{\mathcal{L}_T(\{\bar{y}\})}}(t) = p(t).$$

Pero por el Teorema anterior:

$$\mu_{T|_{\mathcal{L}_T(\{\bar{y}\})}}(t) = \frac{\mu_T(t)}{(\mu_T(t); h(t))} = \frac{p^k(t)}{(\mu_T(t); h(t))}$$

por lo que

$$(\mu_T(t); h(t))) = p^{k-1}(t),$$

entonces

$$h(t) = p^{k-1}(t)\alpha(t)$$

con $(p(t);\alpha(t))=1$.

Finalmente se concluye que

$$\bar{y}\in\left\{\left(p^{k-1}(t)\cdot\alpha\left(t\right)\right)\left(T\right)\left(\bar{x}\right)\mid\left(\alpha\left(t\right);p(t)\right)=1\right\}$$

■

Lema 24 *Sea* $V=\mathfrak{L}_T\left(\bar{x}\right)$, $\mu_T(t)=p^k(t)$ *con* $p(t)\in F\left[T\right]$ *irreducible y mónico y* $\bar{y}\in V\setminus\left\{\vec{0}\right\}$. *Entonces*

$$p-zoc\left(V\right)=p-zoc(\{\mathfrak{L}_T\left(\bar{y}\right)\}).$$

Demostración. $\supseteq$) Obvio.

$\subseteq$) El Lema anterior garantiza que,

$$\bar{z}\in p-\mathrm{zoc}(V)\Leftrightarrow\bar{z}=p^{k-1}(T)q(T)(\bar{x})$$

con $(p;q)=1$.

Ahora sea

$$\vec{0}\neq\bar{y}=h(T)(\bar{x}),$$

con

$$h(t)=p^m(t)g(t),$$

y

$$(g(t);p(t))=1,$$

entonces

$$\mu_{T_{|\mathcal{L}_T(\{\bar{y}\})}}\left(t\right)=\frac{p^k(t)}{(p^k(t);h\left(t\right))}=p^{k-m}(t).$$

$$\bar{w}\in p-\mathrm{zoc}(\mathfrak{L}_T(\{\bar{y}\})\Leftrightarrow\bar{w}=p^{k-m-1}(T)r\left(T\right)\left(\bar{y}\right)$$

$$\left(r\left(t\right);p(t)\right)=1.$$

Así que

$$p-\mathrm{zoc}(\mathfrak{L}_T(\{\bar{y}\})=\left\{p^{k-m-1}(T)r\left(T\right)\left(\bar{y}\right)\mid\ \left(r\left(t\right);p(t)\right)=1\ \right\}=$$

$$=\left\{p^{k-m-1}(T)r\left(T\right)\left(p^m(T)g(T)(\bar{x})\right)\mid\left(r\left(t\right);p(t)\right)=1\right\}=$$

$$=\left\{p^{k-1}(T)r\left(T\right)\left(g(T)(\bar{x})\right)\mid\ \left(r\left(t\right);p(t)\right)=1\ \right\}.$$

Ahora, como

$$(r\,(t)\,;p(t))=1$$

y

$$(g\,(t)\,;p(t))=1$$

entonces

$$(r\,(t)\,g\,(t)\,;p(t))=1.$$

Por lo tanto

$$p-\operatorname{zoc}(\mathfrak{L}_T(\{\bar{y}\})=\left\{p^{k-1}(T)r\,(T)\,g(T)(\bar{x})\mid\quad (r\,(t)\,;p(t))=1\right\}$$

Ahora, si

$$\bar{z}\in p-\operatorname{zoc}(\mathfrak{L}_T(\{\bar{x}\}),$$

entonces

$$\bar{z}=p^{k-1}(T)q(T)(\bar{x})$$

con $(p;q)=1$.

Sea $1=\alpha p+\beta g$, entonces

$$q=q*1=q*(\alpha p+\beta g)=\alpha qp+\beta gq,$$

por lo que

$$\bar{z}=p^{k-1}(T)q(T)(\bar{x})=p^{k-1}(T)\circ(\alpha qp+\beta gq)\,(T)\,(\bar{x})=$$
$$=p^k(T)\,(\alpha q)\,(T)\,(\bar{x})+\left(p^{k-1}\beta gq\right)(T)\,(\bar{x})=$$
$$=\vec{0}+\left[\left(p^{k-1}\beta qg\right)(T)\right](\bar{x})=\left[\left(p^{k-1}\beta qg\right)(T)\right](\bar{x})\,,$$

y $(\beta q;p)=1$.

Entonces

$$\bar{z}\in p-\operatorname{zoc}(\mathfrak{L}_T(\{\bar{y}\}).$$

Así que

$$\bar{z}\in p-\operatorname{zoc}\left(\mathfrak{L}_T(\{\bar{x}\})\right)\subseteq p-\operatorname{zoc}(\mathfrak{L}_T(\{\bar{y}\})$$

■

Teorema 126 *Si* $\dim(V)=n$, $T\in Hom(V,V)$ *y* $\mu_T\,(t)=p^k(t)$ *con* $p(t)\in F[t]$ *irreducible y mónico, entonces*

$$V=\bigoplus_{i=1}^{r}(\mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\})$$

p. a. $\bar{x}_i\in V,\quad i=1,...,r.$

Demostración. Por inducción sobre k.

La base se demostró anteriormente como un lema.

Considérese el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] & V \\
p(T)(V) \arrow[u, "inc."] \arrow[r, "T_{|p(T)(V)}"] \arrow[ur, phantom, "="] & p(T)(V) \arrow[u, "inc."']
\end{tikzcd}$$

así

$$p^{k-1}(T)(p(T)(V)) = \left\{\vec{0}\right\},$$

con lo que,

$$\mu_{T_{|p(T)(V)}}(t) \mid p^{k-1}(t)$$

y por lo tanto

$$\mu_{T_{|p(T)(V)}}(t) = p^{l}$$

con $l \leqslant k-1$.

Por hipótesis de inducción

$$p(T)(V) = \bigoplus_{i=1}^{s} (\mathfrak{L}_T(\{\bar{y}_i\}))$$

con $\bar{y}_i \in p(T)(V) \backslash \{\vec{0}\}$, pero si $\bar{y}_i \in p(T)(V)$ entonces $\bar{y}_i = p(T)(\bar{x}_i), \quad \bar{x}_i \neq \vec{0}$.

Demostraremos primero que

$$\sum_{i=1}^{s} (\mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\})) = \bigoplus_{i=1}^{s} (\mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\})).$$

$$\bar{z} \in \mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\}) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s} \mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_j\}) \Rightarrow \bar{z} = h_i(T)(\bar{x}_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s} h_j(T)(\bar{x}_j) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(T)(\bar{z}) = h_i(T)p(T)(\bar{x}_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s} h_j(T)\, p(T)(\bar{x}_j) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(T)(\bar{z}) = h_i(T)(\bar{y}_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s} h_j(\bar{y}_j) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p\,(T)\,(\bar{z}) \in \mathfrak{L}_T(\{\bar{y}_i\}) \cap \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} \mathfrak{L}_T(\{\bar{y}_j\}) = \{\vec{0}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathfrak{L}_T(\{\bar{y}_i\}) \cap \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} \mathfrak{L}_T(\{\bar{y}_j\}) = \{\vec{0}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_i(T)\,(\bar{y}_i) = p(T)\bar{(}\bar{z}) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^{\alpha_i}(t) = \mu_{T_{|\mathfrak{L}_T(\{\bar{y}_i\})}}\,(t)\,|h_i(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^{\alpha_i}(t) = \mu_{T_{|\mathfrak{L}_T(\{\bar{y}_i\})}}\,(t)\,|h_i(t)$$

para alguna $\alpha_i > 0$

$$\Rightarrow p(t) \mid h_i(t).$$

Con un razonamiento análogo, $p(t) \mid h_j(t)$ para $j = 1, ..., s$. Sea

$$h_i(t) = p(t)\hat{h}_i(t), \quad i = 1, ..., s.$$

Entonces como

$$h_i(T)(\bar{x}_i) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} h_j(T)(\bar{x}_j) = \bar{z},$$

tenemos que:

$$\bar{z} = \left(p(T) \circ \hat{h}_i(T)\right)(\bar{x}_i) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} \left(p(T) \circ \hat{h}_j(T)\right)(\bar{x}_j) =$$

$$= \left(\hat{h}_i(T) \circ p(T)\right)(\bar{x}_i) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} \left(\hat{h}_j(T) \circ p(T)\right)(\bar{x}_j) =$$

$$\hat{h}_i(T)(\bar{y}_i) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} \left(\hat{h}_j(T)\right)(\bar{y}_j) \in \mathfrak{L}_T(\{\bar{y}_i\}) \cap \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} \mathfrak{L}_T(\{\bar{y}_j\}) = \{\vec{0}\}.$$

Es decir $\bar{z} = \vec{0}$ y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{s} (\mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\})) = \bigoplus_{i=1}^{s} (\mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\})).$$

Ahora, $p-\text{zoc}(p(T)(V)) \subseteq p-\text{zoc}(V)$ y $p-\text{zoc}(V)$ satisface la base de la inducción ya que su polinomio mínimo es $p(t)$. Entonces $p-\text{zoc}(V) = p-\text{zoc}(p(T)(V)) \bigoplus K$ (con $K \leqslant_T V$ y es por lo tanto suma de $T-$cíclicos).

Veamos que
$$\bigoplus_{i=1}^{s}(\mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\})) \cap K = \{\vec{0}\}.$$

$$\bar{y} \in \left(\bigoplus_{i=1}^{s}(\mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\})) \cap K\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{y} \in p - \text{zoc}(V) \cap \left(\bigoplus_{i=1}^{s}(\mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\}))\right) =$$

$$= p - \text{zoc}(\bigoplus_{i=1}^{s}(\mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\}))) =$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{s}(p - \text{zoc}(\mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\}))) =$$

1

$$= \bigoplus_{i=1}^{s}(p - \text{zoc}(\mathfrak{L}_T(\{\bar{y}_i\})))$$

Por lo tanto,
$$\bar{y} \in (p - \text{zoc}(p(T)(V))) \cap K = \left\{\vec{0}\right\}.$$

Por último demostraremos que

$$V = (\bigoplus_{i=1}^{s}(\mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\})) \bigoplus K$$

(y por lo tanto $V = (\bigoplus_{i=1}^{r}(\mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\})))$.

$$\bar{v} \in V \Rightarrow p(T)(\bar{v}) \in \bigoplus_{i=1}^{s}\mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(T)(\bar{v}) = \sum_{i=1}^{s}h_i(T)(p\,(T)\,(\bar{x}_i) = p(T)\left(\sum_{i=1}^{s}h_i(T)((\bar{x}_i)\right)(\bar{x}_i) \Rightarrow$$

[1]Por el Teorema anterior.

$$\Rightarrow \bar{v} - \sum_{i=1}^{s} h_i(T)\left(\bar{x}_i\right) \in \operatorname{Ker}(p(T)) = p - \operatorname{zoc}(V) = p - \operatorname{zoc}(p(T)(V)) + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{v} = (\sum_{i=1}^{s} h_i(T)(\bar{x}_i) + \bar{w}) + \bar{k}$$

con

$$\bar{w} \in p - \operatorname{zoc}(p(T)(V)) \subseteq \sum_{i=1}^{s} (\mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\}))$$

y $\bar{k} \in K$ entonces

$$\bar{v} \in (\bigoplus_{i=1}^{s} (\mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\})) \bigoplus K$$

Por lo tanto

$$V = (\bigoplus_{i=1}^{s} (\mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\})) \bigoplus K.$$

■

Definición 116 *Si $A \in M_{n\times r}(F)$, y $B \in M_{n\times s}(F)$, la concatenación de A y B es la matriz $(A \mid B) \in M_{n,r+s}$ que se obtiene agregando a A las columnas de B. Explícitamente,* $(A \mid B)_{i,j} = \begin{cases} A_{i,j} & \text{si } j\leq r \\ B_{i,j-r} & \text{si } j>r \end{cases}$.

Ejemplo 133 *Consideremos el polinomio en $\mathbb{R}[x]$, $x^2+1 = p(x)$, cuya matriz compañera es*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

$(x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$, *cuya matriz compañera es:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

y $(x^2+1)^3$, cuya matriz compañera es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = C.$$

Formemos la matriz

$$D = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Por construcción, el polinomio mínimo para esta matriz es $(x^2+1)^3$.
Desde luego aquí ya tenemos expresado

$$\mathbb{R}^{12} = \mathfrak{L}_T(\{\vec{e}_1\}) \bigoplus \mathfrak{L}_T(\{\vec{e}_3\}) \bigoplus \mathfrak{L}_T(\{\vec{e}_7\}),$$

pero queremos ilustrar como funciona el argumento inductivo.[2]
Sea

$$T : \mathbb{R}^{12} \xrightarrow{D\cdot} \mathbb{R}^{12},$$

$$\left(x^2+1\right)(D) = \tag{10.1}$$

$$= \left(D^2+1\right) = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + 1 \cdot I_{12} \right)$$

[2]Escojo deliberadamente este ejemplo, en que la descomposición está a la vista, precisamente para que sea claro.

$$
= \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2
\end{pmatrix} = p(D).
$$

Notemos ahora que $p(T)(\mathbb{R}^{12})$ *está generado por*

$$
p(T)(\{\vec{e}_1 ... \vec{e}_{12}\}) = \left\{\vec{0}, p(T)(\vec{e}_3), ..., p(T)(\vec{e}_{12})\right\}.
$$

(Observar que las dos primeras columnas de la matriz son $\vec{0}$ *y corresponden a* $p(T)(\vec{e}_1)$ *y* $p(T)(\vec{e}_2)$*. Además*

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2
\end{pmatrix}
$$

tiene rango 6*, su transpuesta es*

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & 0 & -2
\end{pmatrix}.$$

Reduciendo y escalonando:

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},$$

su transpuesta es

$$\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\gamma =: \{\bar{e}_3+\bar{e}_5, \bar{e}_4+\bar{e}_6, \bar{e}_7+\bar{e}_9, \bar{e}_8+\bar{e}_{10}, \bar{e}_9+\bar{e}_{11}, \bar{e}_{10}+\bar{e}_{12}\}$$

es una base para $p(T)(V)$.

Ahora, la matriz de

$$p(T)(V) \xrightarrow{D\circ(\ )_{|p(T)(V)}} p(T)(V)$$

respecto a la base

$$\{\bar{e}_3+\bar{e}_5, \bar{e}_4+\bar{e}_6, \bar{e}_7, \bar{e}_8, \bar{e}_9, \bar{e}_{10}, \bar{e}_{11}, \bar{e}_{12}\}$$

se obtiene así:

$$\begin{pmatrix}
0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&-2&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&-3\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&-3\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0\\
0&0&1&0&1&0\\
0&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1
\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora quisiéramos expresar cada columna de la matriz de la derecha como combinación lineal de la base γ. Concatenando las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

escalonándola y reduciéndola obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De las 6 últimas columnas y eliminando los 6 últimos renglones , obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que es la matriz de

$$p(T)(V) \xrightarrow{D\circ(\ )_{|p(T)(V)}} p(T)(V)$$

respecto de la base γ..

Hemos reducido el problema original, para una matriz de 16×16 a una matriz de 6×6.

Notemos además que el polinomio mínimo de ,

$$P =: \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

es

$$1 + 2X^2 + X^4 = \left(X^2 + 1\right)^2.$$

Es claro del diagrama

$$\begin{tikzcd}
p\left(T\right)\left(V\right) \arrow[r, "T_{|p(T(V))}"] \arrow[d, "\phi_\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "="] & p\left(T\right)\left(V\right) \arrow[d, "\phi_\gamma"] \\
\mathbb{R}^6 \arrow[r, "P\cdot(\ )"] & \mathbb{R}^6
\end{tikzcd}$$

y de

$$\mathbb{R}^6 = \mathcal{L}_T(\{\vec{e}_1\}) \bigoplus \mathcal{L}_T(\{(\vec{e}_3)\})$$

que [3]

$$p\left(T\right)\left(V\right) = \mathcal{L}_T\left(\phi_\gamma^{-1}\left(\vec{e}_1\right)\right) \bigoplus \mathcal{L}_T\left(\phi_\gamma^{-1}\left(\vec{e}_3\right)\right) = \mathcal{L}_T\left(\bar{e}_3 + \bar{e}_5\right) \bigoplus \mathcal{L}_T\left(\bar{e}_7 + \bar{e}_9\right).$$

Ahora

$$\bar{e}_3 + \bar{e}_5 \in p\left(T\right)\left(V\right) \Rightarrow \bar{e}_3 + \bar{e}_5 = p\left(T\right)\left(\bar{x}_1\right):$$

resolvamos

$$\begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix} \left(\bar{x}_1\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[3]Recuerde que $\gamma =: \{e_3 + e_5, e_4 + e_6, e_7 + e_9, e_8 + e_{10}, e_9 + e_{11}, e_{10} + e_{12}\}$

reduzcamos y escalonemos la matriz aumentada,

$$
\begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix},
$$

por lo tanto

$$\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} = \left(- \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0\\0\\-1\\0\\-2\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left(-p\left(T\right)\left(\bar{e}_4\right) - p\left(T\right)\left(\bar{e}_6\right)\right) = p\left(T\right)\left(-\bar{e}_4 - \bar{e}_6\right).$$

Así

$$\bar{x}_1 = -\bar{e}_4 - \bar{e}_6.$$

Resolvamos ahora

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\bar{x}_3\right) = \bar{e}_7 + \bar{e}_9 = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix},$$

Concatenando: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, reduciendo y escalonando:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$-2p(T)(\bar{e}_8) - 3p(T)(\bar{e}_{10}) - p(T)(\bar{e}_{12}) = p(T)\left(-2\bar{e}_8 - 3(\bar{e}_{10}) - \bar{e}_{12}\right).$$

Por lo tanto

$$\bar{x}_3 = -2\bar{e}_8 - 3(\bar{e}_{10}) - \bar{e}_{12},$$

funciona.

Así,

$$V = \mathbb{R}^{12} = \left(\mathfrak{L}_T\left(\bar{x}_1\right) \bigoplus \mathfrak{L}_T\left(\bar{x}_3\right)\right) \bigoplus K.$$

$$\left(K \bigoplus p - \mathrm{zoc}(p\left(T\right)\left(V\right))\right) = p - \mathrm{zoc}\left(V\right).$$

$$p - \mathrm{zoc}(V) = \mathrm{Ker}(V)).$$

Resolvamos

$$p(D)\bar{x} = \vec{0}:$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \\ t_8 \\ t_9 \\ t_{10} \\ t_{11} \\ t_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

la solución es : [4]

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ 2t_5 \\ 2t_6 \\ t_5 \\ t_6 \end{pmatrix} :$$

$$t_1\bar{e}_1 + t_2\bar{e}_2 + t_3\left(\bar{e}_3 + \bar{e}_5\right) + t_4\left(\bar{e}_4 + \bar{e}_6\right) + t_5\left(\bar{e}_7 + 2\bar{e}_9 + \bar{e}_{11}\right) + t_6\left(\bar{e}_8 + 2\bar{e}_{10} + \bar{e}_{12}\right) =$$

[4] Si se reduce y escalona $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, se obtiene $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$
= t_1 \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}
+ t_2 \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}
+ t_3 \left(\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \right)
+ t_4 \left(\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \right) +
$$

$$
+ t_5 \left(\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \right)
+ t_6 \left(\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right)
$$

Así que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\2\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\2\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base para $p-\mathrm{zoc}(V)$ (observemos que tiene dimensión 6).

Algunos vectores de esta base pertenecen a $p\,(T)\,(V)$, podemos ver cuáles, resolviendo la ecuación

$$p\,(D)\,\bar{x} = \bar{z}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} (\bar{x}) =$$

$$= \vec{z} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\2\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\2\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Así, somos conducidos al problema de ver cuáles combinaciones lineales de las columnas de la matriz abajo a la izquierda, son combinaciones lineales de las columnas de la matriz abajo a la derecha.

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&-3&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&-3\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&-2&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&0&2\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix},$$

este problema es equivalente al de encontrar las soluciones del sistema homogéneo cuya matriz se obtiene concatenando las dos matrices anteriores:

$$\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&-3&0&0&0&0&0&2&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&-3&0&0&0&0&0&2\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&-2&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&-2&0&0&0&0&0&1
\end{pmatrix},$$

escalonando y reduciendo:

$$\begin{pmatrix}
0&0&1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&-2&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&-2&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}.$$

De aquí vemos que la primera, y la segunda columnas de

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&0&2\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

no están en $p(T)(V)$, es decir

$$\mathfrak{L}_T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\mathfrak{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=K.$$

Por lo tanto

$$\mathbb{R}^{12}=\mathfrak{L}_T\left(\bar{x}_1\right)\bigoplus\mathfrak{L}_T\left(\bar{x}_3\right)\bigoplus\mathfrak{L}_T\left(\bar{e}_1\right),$$

donde

$$\bar{x}_1=-\bar{e}_4-\bar{e}_6 y\bar{x}_3=-2\bar{e}_8-3\bar{e}_{10}-\bar{e}_{12}.$$

Ahora,

$$\dim\mathfrak{L}_T\left(\bar{x}_1\right)=\operatorname{grad}\left(\mu_{T|\mathfrak{L}_T(\bar{x}_1)}\left(t\right)\right)=\operatorname{grad}\left(p\left(t\right)*\mu_{T|\mathfrak{L}_T(\bar{y}_1)}\left(t\right)\right)=2+2=4$$

$$\dim\mathfrak{L}_T\left(\bar{x}_3\right)=\operatorname{grad}\left(p\left(t\right)*\mu_{T|\mathfrak{L}_T(\bar{y}_3)}\left(t\right)\right)=2+4=6$$

$$\dim \mathfrak{L}_T(\bar{e}_1) = \text{grad}\left(\mu_{T|\mathfrak{L}_T(\bar{e}_1)}(t)\right) = \text{grad}(p(t)) = 2,$$

Note, que en efecto,

$$4 + 6 + 2 = 12. \blacksquare$$

Proposición 20 *$T : V \to V$ lineal con $\mu(T_{|\mathfrak{L}_T}(\bar{x}), t) = p^r(t)$ $(p(t) \in F[t]$ irreducible) $\Rightarrow \{h(T)p^{r-1}(T)(\bar{x}) \mid (p;h) = 1\} = \{g(T)p^{r-1}(T)(\bar{x}) \mid g \in F[t]\}$*

Demostración. $\subseteq$) Obvio.
$\supseteq$) Si $p(t) \mid g(t)$ entonces

$$g(T)p^{r-1}(T) = \hat{0} \in \{h(T)p^{r-1}(T)(\bar{x}) \mid (p;h) = 1\}.$$

Si $p(t) \nmid g(t)$ entonces la pertenencia es clara. $\blacksquare$

10.5. Sumandos cíclicos

Observación 88 *Si $\dim(V) = n$ y $\mu_T(t) = p^k$ con $p \in F[t]$ irreducible y $T \in Hom(V,V)$ entonces el número m de sumandos en la descomposición de V en subespacios $T-$cíclicos es*

$$\frac{\dim(V) - rango(p(T))}{grad(p(T))}.$$

Esto es, si $V = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\})$, entonces $m = \frac{n - rango(p(T))}{grad(p(T))}$

Demostración. Sea $i \in \{l, ..., m\}$y

$$\mu(T\,|_{\mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\})}, t) = p^r(t), \quad 1 < r \leqslant k,$$

así,

$$p - \text{zoc}(\mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\})) = \{p^{r-1}(T) \circ h(T)(\bar{x}_i) \mid (p;h) = 1\} =$$
$$= \{g(T)p^{r-1}(T)(\bar{x}_i) \mid g \in F[t]\} = \mathfrak{L}_T(\{p^{r-1}(T)(x_i)\}),$$

entonces

$$1 \nmid \mu_{T|\mathfrak{L}_T\{\bar{x}_i\}}(t) \mid p(t)$$

(y por lo tanto son iguales), entonces

$$\dim(p - \text{zoc}(\mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\})) = \text{grad}(p(t)).$$

Además, ya que

$$p - \operatorname{zoc}(V) = \bigoplus_{i=1}^{m} (p - \operatorname{zoc}(\mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\}))),$$

se tiene

$$\dim(p - \operatorname{zoc}(V)) = m \cdot \operatorname{grad}(p(t)),$$

y por lo tanto

$$m = \frac{\dim(p - \operatorname{zoc}(V))}{\operatorname{grad}(p(t))} = \frac{\dim(\operatorname{Ker}(p\,(T)))}{\operatorname{grad}(p(t))} = \frac{\dim(V) - (\operatorname{rango}(p\,(T))}{\operatorname{grad}(p(t))}$$

■

10.6. Espacios cociente

Definición 117 *Sea $W \leq V$ definimos $\overset{W}{\equiv}$ en V por $\vec{x} \overset{W}{\equiv} \vec{y}$ si $\vec{x} - \vec{y} \in W$.*

Observación 89 *$\overset{W}{\equiv}$ es una relación de equivalencia en ${}_FV$.*

Demostración. Reflexividad) $\forall \vec{x} \in W$, $\vec{x} - \vec{x} = \overrightarrow{0} \in W$,
Simetría) $\vec{x} - \vec{y} \in W \Rightarrow -(\vec{x} - \vec{y}) = (\vec{y} - \vec{x}) \in W$.
Transitividad)

$$(\vec{x} - \vec{y} \in W,\ \vec{y} - \vec{z} \in W) \Rightarrow ((\vec{x} - \vec{z}) = (\vec{x} - \vec{y}) + (\vec{y} - z) \in W)$$

■

Definición 118 *V/W es el conjunto de clases de equivalencia*

$$V/W = \left\{ [\vec{v}]_{\overset{W}{\equiv}} \mid \vec{v} \in V \right\}.$$

Observación 90

$$[\vec{v}]_{\overset{W}{\equiv}} = \{\vec{z} \mid \vec{z} - \vec{v} \in W\} = \{\vec{z} \mid \vec{z} = \vec{v} + \vec{w}, p.\ a.\ \vec{w} \in W\} = \vec{v} + W.$$

Teorema 127

$$U/W \times V/W \xrightarrow{\hat{+}} V/W$$

definida por $[\vec{w}_1]_{\underset{\equiv}{W}} \hat{+} [\vec{w}_2]_{\underset{\equiv}{W}} = [\vec{w}_1 + \vec{w}_2]_{\underset{\equiv}{W}}$ está bien definida

Demostración. La definición $[\vec{x}]_{\underset{\equiv}{W}} \hat{+} [\vec{y}]_{\underset{\equiv}{W}}$ no depende del representante de $[\vec{x}]_{\underset{\equiv}{W}}$:

$$\left(\vec{x}_1 \overset{W}{\equiv} \vec{x}\right) \Rightarrow (\vec{x}_1 = \vec{x} + \vec{w}) \Rightarrow (\vec{x}_1 + \vec{y} = \vec{x} + \vec{w} + \vec{y}) \Rightarrow \left(\vec{x}_1 + \vec{y} \overset{W}{\equiv} \vec{x} + \vec{y}\right).$$

Análogamente, $[\vec{x}]_{\underset{\equiv}{W}} \hat{+} [\vec{y}]_{\underset{\equiv}{W}}$ no depende del representante de $[\vec{y}]_{\underset{\equiv}{W}}$. ■

Teorema 128 $\left(V/W, \widehat{+}, \left[\vec{0}\right]_{\underset{\equiv}{W}}\right)$ *es un grupo conmutativo.*

Demostración. Se deja como ejercicio. ■

Ejercicio 230 *Demostrar el Teorema anterior.*

Definición 119 *Definimos* $F \times V/W \overset{\hat{\circ}}{\longrightarrow} V/W$ *por* $c \mathbin{\hat{\circ}} [\vec{v}]_{\underset{\equiv}{W}} =: [c\vec{v}]_{\underset{\equiv}{W}}$.

Observación 91 $\hat{\circ}$ *no depende del representante de* $[\vec{v}]_{\underset{\equiv}{W}}$.

Demostración. Supongamos que $\vec{v} \overset{W}{\equiv} \vec{v}_1$, como

$$\vec{v} \overset{W}{\equiv} \vec{v}_1 \Leftrightarrow \vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{w},\ \vec{w} \in W,$$

entonces

$$c\vec{v}_1 = c\vec{v} + c\vec{w} \in W$$
$$\therefore c\vec{v}_1 \overset{W}{\equiv} c\vec{v}.$$

■

Teorema 129 V/W *es un espacio vectorial sobre* F*, con las operaciones anteriores.*

Demostración. Ejercicio. ■

Ejercicio 231 *Demuestre el Teorema anterior.*

Observación 92

$$\begin{array}{ccc} V & \overset{p}{\longrightarrow} & V/W \\ \vec{v} & \longmapsto & \vec{v} + W \end{array}$$

es una función lineal suprayectiva con núcleo W.

Demostración. Es claro que p respeta la suma.
Además,

$$p\,(c\vec{v}) = c\vec{v} + W = c\hat{\circ}\,(\vec{v} + W)$$

pues $c\hat{\circ}\,[\vec{v}]_{\underset{\equiv}{W}} = [c\vec{v}]_{\underset{\equiv}{W}}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(p) &= \left\{\vec{v} \mid \vec{v} + W = \vec{0} + W\right\} \\ &= \left[\vec{0}\right]_{\underset{\equiv}{W}} = \left\{\vec{0} + \vec{w} \mid \vec{w} \in W\right\} = W.\end{aligned}$$

Es claro que p es suprayectiva. ■

Corolario 28 *Sea $W \leq V$ y $p : V \twoheadrightarrow V/W$, Entonces*

1. $\dim(V) = \mathrm{nul}(p) +$ *rango*$(p(V)) = \dim(W) + \dim(V/W)$
2. $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$

Observación 93 *Consideremos*

$$\begin{array}{ccc} V & \underset{lineal}{\overset{p}{\gg\!\!\twoheadrightarrow}} & V/W \\ \vec{v} & \mapsto & \vec{v} + W \end{array}.$$

Si $\beta \underset{b}{\hookrightarrow} W$, *y* $\beta \overset{\circ}{\cup} \gamma \underset{b}{\hookrightarrow} V$, *entonces* $p(\gamma) \underset{base}{\hookrightarrow} V/W$.

Demostración. $p(\gamma)$ genera V/W :
Sea $\vec{x} \in V/W$, como $\vec{x} \in \mathfrak{L}(\beta) \oplus \mathfrak{L}\,(\gamma)$, entonces

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{y}_1 \text{ con } \vec{x}_1 \in \mathfrak{L}(\beta),\ \vec{y}_1 \in \mathfrak{L}\,(\gamma)\,,$$

así que $p\,(x) = p\,(\vec{x}_1) + p\,(\vec{y}_i) = p\,(\vec{y}_i)\,.$

$$\begin{aligned} &\therefore\ \ p\,(\vec{x}) \in p\,(\mathfrak{L}\,(\gamma)) = \mathfrak{L}\,(p\,(\gamma))\,. \\ &\therefore\ \ V/W = p\,(V) \subseteq \mathfrak{L}\,(p(\gamma) = p\,(\mathfrak{L}\,(\gamma)) \subseteq p\,(V)\,. \\ &\therefore\ \ V/W = p\,(\mathfrak{L}\,(\gamma))\,. \end{aligned}$$

$p\,(\gamma)$es $l.\ i.$ en V/W :
Supongamos que $a_1\,(p\vec{y}_1) + ... + a_k\,(p\vec{y}_k) = \vec{0},\ \vec{y}_i \in \gamma.$

Como $a_1(p\vec{y}_1)+...+a_k(p\vec{y}_k)=p(a_1\vec{y}_1+...+a_k\vec{y}_k)$, tenemos que

$$a_1\vec{y}_1+...+a_k\vec{y}_k\in W\cap\mathfrak{L}(\gamma)=\mathfrak{L}(\beta)\cap\mathfrak{L}(\gamma).$$

Como $\mathfrak{L}(\beta)\cap\mathfrak{L}(\gamma)=\left\{\vec{0}\right\}$, entonces $a_1\vec{y}_1+...+a_k\vec{y}_k=\vec{0}$. Pero como γ es linealmente independiente,

$$a_1=...=a_k=0.$$

■

Observación 94 *Si* ${}_FV\xrightarrow{T}{}_FV$ *es lineal y* $W\underset{T}{\leq}V$ *entonces*

$$\begin{array}{ccc} V/W & \xrightarrow{\overline{T}} & V/W \\ \vec{v}+W & \mapsto & T(\vec{v})+W \end{array}$$

es lineal y está bien definida.

Demostración. Veamos que e$\overline{T}$ está bien definida:

$$\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{w}\in W\Rightarrow T(\vec{v})=T(\vec{v}_1)+T(\vec{w})$$

con $T(\vec{w})\in W$. Por lo que $T(\vec{v})\overset{W}{\equiv}T(\vec{v}_1)$.

Toda vez que hemos visto que la definición de $\overline{T}$ es buena, es inmediato que $\overline{T}$ es una función lineal:

$$\overline{T}\left([\vec{u}]_{\underset{\equiv}{W}}+c[\vec{v}]_{\underset{\equiv}{W}}\right)=T\left([\vec{u}+c\vec{v}]_{\underset{\equiv}{W}}\right)=T(\vec{u}+c\vec{v})=$$
$$=T(\vec{u})+cT(\vec{v})=\overline{T}\left([\vec{u}]_{\underset{\equiv}{W}}\right)+c\overline{T}\left([\vec{v}]_{\underset{\equiv}{W}}\right).$$

■

Podemos hacer un diagrama para representar la situación anterior:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "inc."] \arrow[d, "T_{|W}"] \arrow[dr, phantom, "="] & V \arrow[r, "p"] \arrow[d, "T"] \arrow[dr, phantom, "="] & V/W \arrow[d, "\bar{T}"] \\ W \arrow[r, "inc."] & V \arrow[r, "p"] & V/W \end{tikzcd}$$

así que

$$\overline{T}\circ p=p\circ T. \tag{10.2}$$

Teorema 130 *Sea $V \xrightarrow{T} V$ un operador lineal en un espacio de dimensión finita y $W \underset{T}{\leq} V$. Entonces $\chi_{\overline{T}}(t) \mid \chi_T(t)$. Donde $V/W \xrightarrow{\overline{T}} V/W$ es tal que $\vec{v}+W \overset{\overline{T}}{\mapsto} T(\vec{v})+W$.*

Demostración. Sea $\beta \overset{\circ}{\cup} \gamma \underset{b}{\hookrightarrow} V$, donde $\beta \underset{base}{\hookrightarrow} W$, entonces

$$p(\gamma) \underset{base}{\hookrightarrow} V/W,$$

y observemos que

$$[T]_{\beta\cup\gamma}^{\beta\cup\gamma} = \begin{bmatrix} [T]_{\beta}^{\beta} & * \\ 0 & \left[\overline{T}\right]_{p(\gamma)}^{p(\gamma)} \end{bmatrix}.$$

Digamos que $|\beta| = k$, y que $\dim(V) = n$. Sea $\vec{y}_j$ el j-ésimo elemento de γ.

Entonces la columna $k+j-$ésima de $[T]_{\beta\cup\gamma}^{\beta\cup\gamma}$ es $[T(\vec{y}_j)]_{\beta\cup\gamma}$.

Por otra parte, la $j-$ésima columna de $\left[\overline{T}\right]_{p(\gamma)}^{p(\gamma)}$ es

$$\left[\overline{T}(\vec{y}_j+W)\right]_{p(\gamma)} = [T(\vec{y}_j)+W]_{p(\gamma)}.$$

Si

$$T(\vec{y}_j) = \vec{w} + \sum_l c_{k+l}\vec{y}_l,$$

con $\vec{w} \in W,\ \gamma = \{\vec{y}_1, ..., \vec{y}_{n-k}\}$, entonces

$$\begin{aligned} \overline{T}(\vec{y}_j+W) &= \overline{T}(p(\vec{y}_j)) = p\circ T(\vec{y}_j) = \\ &= p\left(\vec{w}+\sum_l c_{k+l}\vec{y}_l\right) = \sum_l c_{k+l}\,p(\vec{y}_l). \end{aligned}$$

Por lo que la $j-$ ésima columna de $\left[\overline{T}\right]_{p(\gamma)}^{p(\gamma)}$ es $\begin{pmatrix} c_{k+1} \\ c_{k+2} \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix}$, en tanto que la $k+j$ -ésima columna de $[T]_{\beta\cup\gamma}^{\beta\cup\gamma}$ es $\begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ c_{k+1} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. ■

Podemos observar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[rr, "inc"] \arrow[d, "T_{|W}"] \arrow[ddl, "\varphi_\beta"'] & & V \arrow[rr, "\pi"] \arrow[d, "T"] \arrow[ddl, "\varphi_{\beta\cup\gamma}"'] & & V/W \arrow[d, "\bar{T}"] \arrow[ddl, "\varphi_{\pi(\gamma)}"'] \\
 & W \arrow[rr, "inc"] \arrow[ddl, "\varphi_\beta"'] & & V \arrow[rr, "\pi"] \arrow[ddl, "\varphi_{\beta\cup\gamma}"'] & & V/W \arrow[ddl, "\varphi_{\pi(\gamma)}"'] \\
F^k \arrow[rr, "inc"] \arrow[d, "\left[T_{|W}\right]_{\beta}^{\beta}\cdot_"'] & & F^n \arrow[rr, "p_{F^{n-k}}^{F^k}"] \arrow[d, "\left[T\right]_{\beta\cup\gamma}^{\beta\cup\gamma}\cdot_"'] & & F^{n-k} \arrow[d, "\left[\bar{T}\right]_{\pi(\gamma)}^{\pi(\gamma)}\cdot_"'] & \\
F^k \arrow[rr, "inc"] & & F^n \arrow[rr, "p_{F^{n-k}}^{F^k}"] & & F^{n-k} &
\end{tikzcd}$$

Teorema 131 *Sea* $V \xrightarrow{T} V$ *un operador lineal en un espacio de dimensión finita y* $W \underset{T}{\leq} V$*. Denotemos* $\bar{T} : V/W \longrightarrow V/W$ *al operador tal que* $\vec{v} + W \mapsto T(\vec{v}) + W$*. Si* T *es diagonalizable, entonces* $\bar{T}$ *también es diagonalizable.*

Demostración. Es una consecuencia del Teorema 130 que $\mu_T\left(\bar{T}\right) = \hat{0} : V/W \longrightarrow V/W$. Así que $\mu_{\bar{T}}(t) \mid \mu_T(t)$. Así que si $\mu_T(t)$ es un producto de factores de grado uno distintos, entonces sucede lo mismo a $\mu_{\bar{T}}(t)$. ■

Podemos juntar el Teorema anterior con el Teorema 115:

Teorema 132 *Si* $W \underset{T}{\leqslant} V$*, y* $T : V \to V$ *es diagonalizable,* $\dim(V) = n < \infty$*, entonces* $T_{|W} : W \to W$ *y* $\bar{T} : V/W \longrightarrow V/W$ *son diagonalizables.*

El Teorema anterior puede sugerir la siguiente pregunta, ¿ si $T_{|W} : W \to W$ y $\bar{T} : V/W \longrightarrow V/W$ son diagonalizables, necesariamente T será diagonalizable?

Ejemplo 134 *Sea* $V = \mathbb{R}^2$ *y* $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \_ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$*. Tomemos*

$$W = \mathfrak{L}\left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right)\right).$$

Es claro que $T_{|W} = Id_W$, que es diagonalizable.
Por otra parte,

$$\bar{T} : V/W \longrightarrow V/W$$

está determinado por $\bar{T}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + W\right)$, *dado que* $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + W\right\}$ *es una base para el espacio V/W, que es de dimensión uno.*

$$\begin{aligned} \bar{T}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + W\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{e}_2 + W = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + W. \end{aligned}$$

Ya que

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{W}{\equiv} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} :$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in W = \mathfrak{L}\left(\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\}\right).$$

Así pues, $\bar{T} : V/W \longrightarrow V/W$ es la identidad en V/W, por lo que es diagonalizable. Sin embargo, $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ no es diagonalizable, pues su polinomio mínimo es $(t-1)^2$.

10.7. Forma canónica racional

Definición 120 *Si $T : V \to V$ tiene polinomio mínimo $p^k(t)$ con $p \in F[t]$ irreducible y mónico,*

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\}), \ \beta_i = \{\bar{x}_i, T(\bar{x}_i), \ldots\} \underset{base}{\hookrightarrow} \mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\}),$$

entonces

$$\beta = \bigcup_{i=1}^{m} \beta_i \underset{base}{\hookrightarrow} V$$

se llama una base canónica racional para V respecto de T.

Supóngase que el polinomio mínimo de T restringido a $\mathfrak{L}_T\{\bar{x}_j\}$ es $p^{m_j}(t)$. Así, si

$$p^{m_j}(t) = b_0 t + b_1 t + ... + b_{\operatorname{grad}\left(p^{m_j}\right)-1} t^{\operatorname{grad}\left(p^{m_j}\right)-1}(t) + t^{\operatorname{grad}\left(p^{m_j}\right)}$$

entonces

$$p^{m_j}(T)\left(\vec{x}_j\right) = \vec{0}.$$

Por lo que

$$(T^{\operatorname{grad}\left(p^{m_j}\right)})(\bar{x}_j) = -b_0\bar{x}_j - b_1 T(\bar{x}_j) - ... - b_{\operatorname{grad}\left(p^{m_j}\right)-1} T^{\operatorname{grad}\left(p^{m_j}\right)-1}(\bar{x}_j),$$

así, se tiene que

$$\left[T_{|\mathfrak{L}_T\{\bar{x}_j\}}\right]_{\beta_i}^{\beta_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & -b_{\operatorname{grad}\left(p^{m_j}\right)-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -b_{\operatorname{grad}\left(p^{m_j}\right)-1} \end{pmatrix}$$

es la matriz compañera de $p^{m_j}(T)$ y se le llama "bloque racional".

Así,

$$[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} \begin{matrix} & & \\ & \left[T_{|\mathfrak{L}_T\{\bar{x}_1\}}\right]_{\beta_1}^{\beta_1} & \\ & & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \cdots & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \left[T_{|\mathfrak{L}_T\{\bar{x}_2\}}\right]_{\beta_2}^{\beta_2} & \cdots & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \cdots & \left[T_{|\mathfrak{L}_T\{\bar{x}_m\}}\right]_{\beta_m}^{\beta_m} \end{pmatrix}.$$

Cuando$[T]_\beta^\beta$ está descrita en esta forma se dice que está descrita en su forma canónica racional.

10.7.1. Diagrama de puntos

Teorema 133 *Si $T : V \to V$ es lineal con $\mu_T(t) = p^k(t)$ con p irreducible entonces, $C_s(V)$, el número de sumandos con polinomio mínimo $p^s(t)$ en*

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} \{\mathfrak{L}_T(\{\bar{x}_i\})\}$$

es
$C_s(V) =$

$$= \frac{1}{grad\ p(t)} \cdot \left[\dim\left(p^{s-1}(T)(V)\right) - 2\dim\left(p^s(T)(V)\right) + \dim\left(p^{s+1}(T)(V)\right)\right].$$

Demostración. Recordar que si

$$P(T)(V) = \bigoplus_{i=1}^{m} \{\mathfrak{L}_T(\{\bar{y}_i\})\}$$

y $\bar{y}_i = p(T)(\bar{z}_i)$ entonces

$$V = \left(\bigoplus_{i=1}^{m} \{\mathfrak{L}_T(\{\bar{z}_i\})\}\right) \bigoplus K,$$

donde
$$p - \mathrm{zoc}(V) = p - \mathrm{zoc}\left(p(T)(V)\right) \bigoplus K,$$

y

$$K = \bigoplus_{j=1}^{l} \mathfrak{L}_T(\{\bar{w}_j\}).$$

Además[5]

$$\mu_{T_{|\mathfrak{L}_T(\bar{z}_i)}}(t) = p(t) \cdot \mu_{T_{|\mathfrak{L}_T(\bar{y}_i)}}(t)$$

[5]Por cada vector y_i escribamos una columna de la siguiente forma

$$\begin{array}{cccc} \vdots & & & \\ \bullet & \vdots & & \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ {}_{y_1}\bullet & {}_{y_2}\bullet & \cdots & {}_{y_r}\bullet \end{array}$$

y_1, y_2, y_r donde el número de puntos en la columna "j" es "s" si $\mu_{T_{|\mathfrak{L}_T(y_i)}}(t) = p^s(t)$. Este se llama un "diagrama de puntos para $p(T)(V)$". Agregando un punto por cada $x_1 ..., x_r$ y luego un

Denotemos por $C_s(V)$ al número de columnas con s puntos (esto es, el número de sumandos con polinomio mínimo $p^s(t)$, en la descomposición

$$V = \left(\mathfrak{L}_T(\{\bar{z}_1\}) \bigoplus ... \bigoplus \mathfrak{L}_T(\{\bar{z}_r\})\right) \bigoplus \left(\mathfrak{L}_T(\{\bar{w}_1\}) \bigoplus ... \bigoplus \mathfrak{L}_T(\{\bar{w}_l\})\right)$$

Es claro que

$$C_s(V) = C_{s-1}(P(T)(V)) = C_{s-2}(P^2(T)(V)) = \ldots = C_1(P^{s-1}(T)(V))$$

Ahora,

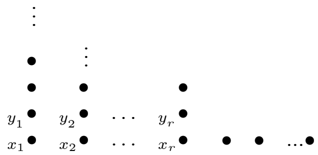
$$\dim\left(p - \operatorname{zoc}\left(p\left(T\right)\left(V\right)\right)\right) + \dim\left(K\right) =$$
$$= \dim\left(p - \operatorname{zoc}\left(p\left(T\right)\left(V\right)\right)\right) + l \cdot grad\left(p\left(T\right)\right)$$

Así[6]:

$$C_1(V) = l = \frac{\dim(K)}{\operatorname{grad}(p(T))} = \frac{\dim(p - \operatorname{zoc}(V)) - \dim((p - \operatorname{zoc}(p(T)(V))))}{\operatorname{grad}(p(T))} =$$

---

punto por cada sumando en $V = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathfrak{L}_T(\{w_j\})$, es decir, otros l puntos obtenemos



Este se llama el "diagrama de puntos" para V .

[6] $p - zoc\left(p\left(T\right)\left(V\right)\right) = p\left(T\right)\left(V\right) \cap \left(Ker\left(p\left(T\right)\right)\right)$. Ahora, de

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{p(T)} & V \\ \uparrow & & \uparrow \\ p(T)(V) & \xrightarrow{p(T)_{|p(T)}} & p(T)(V) \end{array}$$

vemos que $Ker\left(p\left(T\right)_{|p(T)}\right) = p\left(T\right)\left(V\right) \cap \left(Ker\left(p\left(T\right)\right)\right)$. Así que

$$Nul\left(p\left(T\right)_{|p(T)}\right) + \ rango\left(p^2\left(T\right)\right) = rango\left(p\left(T\right)\right)$$

$$Nul\left(p\left(T\right)_{|p(T)}\right) = rango\left(p\left(T\right)\right) - rango\left(p^2\left(T\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\text{grad}\,(p\,(T))} \cdot \left[\dim\left(\text{Ker}\,(p\,(T))\right) - \left(\text{rango}\,(p\,(T)) - \text{rango}\left(p^2\,(T)\right)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\text{grad}(p(T))} \cdot \left[\dim(V) - \text{rango}(p(T)) - (\ \text{rango}(p(T)) - \text{rango}(p^2(T)))\right] =$$

$$= \frac{1}{\text{grad}\,(p\,(T))} \cdot \left[\dim\,(V) - 2 \cdot \text{rango}\,(p\,(T)) + \text{rango}\left(p^2\,(T)\right)\right].$$

Por lo tanto

$$C_1(p^{s-1}(T)(V)) =$$

$$= \frac{1}{\text{grad}\,(p\,(T))}[\dim(p^{s-1}(T)(V)) - 2\dim(p^s(T)(V)) + \dim(p^{s-1}(T)(V))] =$$

$$= C_s(V).$$

■

Observación 95 $C_s(V)$ *también es el número de bloques de tamaño*

$$[s \cdot grad\,(p\,(t))] \times [s \cdot grad\,(p\,(t))]$$

en la forma canónica racional (los bloques que son la matriz compañera de $p^s(t)$*.*

Ejemplo 135 *Calcular la forma canónica racional de*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}\,(\mathbb{R})\,.$$

Solución.
$A\,(\bar{e}_1) = \bar{e}_2$, *y* $A^2\,(\bar{e}_1) = -\bar{e}_1$. *Por lo tanto* $t^2 + 1$ *es el polinomio mínimo para* $\bar{e}_1$.
Ahora,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^2\,(\bar{e}_3) = -\bar{e}_3.$$

Por lo tanto t^2+1*es el polinomio mínimo para* $\bar{e}_3$.
Por lo tanto, $\mathbb{R}^4 = \mathfrak{L}_T(\bar{e}_1) \bigoplus \mathfrak{L}_T(\bar{e}_3)$, $\mu_T(t) = t^2+1$
Forma canónica racional:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto

$$rango\left(A^2+1Id\right) = 0.$$

Entonces,

$$rango\,(Id) = 4,\ \ rango\left(A^2+1Id\right) = 0.$$

Por lo tanto

$$c_1 = \frac{1}{2}(4 - 2\cdot 0 + 0) = 2.$$

Por lo tanto el diagrama de puntos para A *es:*

$$\bullet\bullet$$

Dos bloques, cada uno de dimensión 2.

Ejemplo 136 *Calcular la forma canónica racional de*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

así que el polinomio mínimo para $\bar{e}_1$ *es* $t-2$ *(abreviatura de:* $t-2$ *es el polinomio mínimo para* $T_{|\mathfrak{L}_T(\bar{e}_1)}$*).*
Ahora,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{L}_T(\bar{e}_2) = \mathfrak{L}\{\bar{e}_2,\ A\bar{e}_2\}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

concatenando:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

reduciendo y escalonando:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$A^2(\bar{e}_2) = 4A(\bar{e}_2) - 4(\bar{e}_2)$, *por lo tanto, el polinomio mínimo para* $\bar{e}_2$ *es* $t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$.
Ahora,

$$A(\bar{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\left\{\bar{e}_3, A\left(\bar{e}_3\right), A^2\left(\bar{e}_3\right), A^3\left(\bar{e}_3\right)\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Concatenando:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

reduciendo y escalonando:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde

$$A^3\left(\bar{e}_3\right) = 6A^2\left(\bar{e}_3\right) - 12A\left(\bar{e}_3\right) + 8\bar{e}_3,$$

así que el polinomio mínimo es:

$$t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = (t-2)^3.$$

Finalmente,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

por lo que el polinomio mínimo correspondiente es $t-2$.
Por lo tanto el polinomio mínimo para A *es* $(t-2)^3$.
Ahora, $rango(A-2Id)^0 = 4$,

$$rango\,(A-2Id) = rango \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

$$rango\,(A-2Id)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = rango \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1,$$

$$rango\,(A-2Id)^3 = rango \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= rango \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Así,

$$c_1 = \frac{1}{1}\,(4-(2*2)+1) = 1$$
$$c_2 = \frac{1}{1}\,(2-(2*1)+0) = 0;$$
$$c_3 = \frac{1}{1}\,(1-(2*0)+0) = 1;$$

Por lo tanto, el diagrama de puntos es

$$\begin{array}{ll} \bullet & \\ \bullet & \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

y la forma canónica racional consta de un bloque de 3×3 *y de otro de* 1×1 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$(t-2)^3 = t^3 - 6t^2 + 12t - 8.$

$$(A-2Id) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tiene polinomio mínimo t^2. *Una base para* $(A-2Id)(\mathbb{R}^4)$ *es* $\bar{e}_1$ *y* $\bar{e}_2$. *Es claro que* $\bar{e}_2$ *genera* T*-cíclicamente* $(A-2Id)(\mathbb{R}^4)$.
Resolvamos

$$(A-2Id)(\bar{x}) = \bar{e}_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

las soluciones están en:

$$\left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ 0 \\ 1 \\ t_2 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por ejemplo $\bar{e}_3$ *es una solución.*
Ahora, hay que escoger un elemento de $Ker((A-2Id)\cdot -)$ *que no esté en*

$$\mathfrak{L}_T(\bar{e}_3) = \mathfrak{L}\left(\left\{\bar{e}_3, A\cdot\bar{e}_3, A^2\cdot\bar{e}_3\right\}\right) = \mathfrak{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right)$$

Concatenando: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Resolvamos la ecuación

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para obtener $Ker((A-2Id)\cdot -)$.
Las soluciones son:

$$\left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ 0 \\ 0 \\ t_2 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Encontremos ahora un elemento de $Ker((A-2Id)\cdot -)$ *que no esté en*

$$\mathfrak{L}_T\left(\bar{e}_3\right)=\mathfrak{L}\left(\left\{\bar{e}_3, A\cdot\bar{e}_3, A^2\cdot\bar{e}_3\right\}\right)=$$

$$=\mathfrak{L}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\4\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Consideremos la ecuación

$$x\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\4\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t_1\\0\\0\\t_2\end{pmatrix}.$$

La matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix}0&0&1&t_1\\0&1&4&0\\1&2&4&0\\0&0&0&t_2\end{pmatrix}.$$

Escalonando:

$$\begin{pmatrix}1&2&4&0\\0&1&4&0\\0&0&1&t_1\\0&0&0&t_2\end{pmatrix}.$$

Basta tomar $t_2\neq 0$. *Por ejemplo,obtenemos* $\bar{e}_4$ *si* $t_2=1$ *y* $t_1=0$.
Así, la base canónica racional es:

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\4\\4\\0\end{pmatrix}\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Comprobación: Sea $Q=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&4&0\\1&2&4&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$[7].

---

[7]

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix}4&-2&1&0\\-4&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

10.8. Más acerca de los diagramas de puntos

El siguiente Teorema nos dice que para calcular el diagrama de puntos para $T_{|\mathrm{Ker}\ p_1^{k_1}(T)}$, donde $\mu_T(V) = p_1^{k_1}(t)\, p_2^{k_2}(t) \ldots p_s^{k_s}(t)$, no hace falta calcular primero

$$\mathrm{Ker}\left(p_1^{k_1}(T)\right) \xrightarrow{T_{|\mathrm{Ker}\ p_1^{k_1}(T)}} \mathrm{Ker}\left(p_1^{k_1}(T)\right).$$

Regresemos a la situación general:

Teorema 134 *Sea $T : V \to V$ lineal, dim $(V) < \infty$. con*

$$\mu_T(V) = p_1^{k_1}(t)\, p_2^{k_2}(t) \ldots p_s^{k_s}(t).$$

Entonces

$$\begin{gathered} \textit{rango } p_1^{i-1}(T) - 2 * \textit{rango } p_1^{i}(T) + \textit{rango } p_1^{i+1}(T) = \\ = \textit{rango } p_1^{i-1}\left(T_{|Ker\ p_1^{k_1}(T)}\right) - 2 * \textit{rango } p_1^{i}\left(T_{|Ker\ p_1^{k_1}(T)}\right) + \\ + \textit{rango } p_1^{i+1}\left(T_{|Ker\ p_1^{k_1}(T)}\right). \end{gathered}$$

Demostración. Primero , recordemos que

$$V = \mathrm{Ker}\ p_1^{k_1}(T) \bigoplus \mathrm{Ker}\ p_2^{k_2}(T) \bigoplus \ldots \bigoplus \mathrm{Ker}\ p_s^{k_s}(T)$$

Además, tenemos que

$$\mathrm{Ker}\ p_1^{k_1}(T) \xrightarrow{T_{|\mathrm{Ker}\ p_1^{k_1}(T)}} \mathrm{Ker}\ p_1^{k_1}(T)$$

tiene polinomio mínimo $p_1^{k_1}(t)$.

Notemos que como

$$V = \mathrm{Ker}\ p_1^{k_1}(T) \bigoplus \mathrm{Ker}\ p_2^{k_2}(T) \bigoplus \ldots \bigoplus \mathrm{Ker}\ p_s^{k_s}(T),$$

entonces

$$T = T_{|\text{Ker } p_1^{k_1}(T)} \bigoplus T_{|\text{Ker } p_2^{k_2}(T)} \bigoplus \cdots \bigoplus T_{|\text{Ker } p_s^{k_s}(T)},$$

entonces

$$p_1(T) = p_1(T)_{|\text{Ker } p_1^{k_1}(T)} \bigoplus p_1(T)_{|\text{Ker } p_2^{k_2}(T)} \bigoplus \cdots \bigoplus p_1(T)_{|\text{Ker } p_s^{k_s}(T)}.$$

En este momento observemos que

$$p_1(T)_{|\text{Ker } p_2^{k_2}(T)} : \text{Ker } p_2^{k_2}(T) \to \text{Ker } p_2^{k_2}(T)$$

es un isomorfismo:

$$\bar{x} \in \text{Ker } p_2^{k_2}(T) \cap \text{Ker } p_1^{k_1}(T) \Rightarrow p_2^{k_2}(T)(\bar{x}) = 0 = p_1^{k_1}(T)(\bar{x})$$

$$\Rightarrow \mu_{T|_{\mathfrak{L}_T(\bar{x})}}(t) \mid \left(p_1^{k_1}(t); p_2^{k_2}(t)\right) = 1 \Rightarrow \mu_{T|_{\mathfrak{L}_T(\bar{x})}}(t) = 1 \Rightarrow \bar{x} = 0.$$

Por lo tanto $p_1(T)_{|\text{Ker } p_2^{k_2}(T)}^{|\text{Ker } p_2^{k_2}(T)}$ es una función lineal inyectiva, por lo tanto es un isomorfismo. Así,

$$\text{rango } \left(p_1(T)_{|\text{Ker } p_2^{k_2}(T)}\right) = \dim \text{ Ker } p_2^{k_2}(T).$$

Análogamente,

$$\text{rango} \left(p_1(T)_{|\text{Ker } p_j^{k_j}(T)}\right) = \dim \text{ Ker } p_j^{k_j}(T) \;\; \forall j \neq 1.$$

Por lo tanto,

$$\text{rango}\,(p_1(T)) =$$

$$= \text{rango} \left(p_1(T)_{|\text{Ker } p_1^{k_1}(T)} \bigoplus p_1(T)_{|\text{Ker } p_2^{k_2}(T)} \bigoplus \cdots \bigoplus p_1(T)_{|\text{Ker } p_s^{k_s}(T)}\right) =$$

$$= \text{rango } p_1(T)_{|\text{Ker } p_1^{k_1}(T)} + \dim \text{ Ker } p_2^{k_2}(T) + \dim \text{ Ker } p_3^{k_3}(T) + \ldots$$

$$\ldots + \dim \text{ Ker } p_s^{k_s}(T).$$

En resumen,

$$\text{rango}\,(p_1(T)) = \text{rango } p_1(T)_{|\text{Ker } p_1^{k_1}(T)} + \dim \text{ Ker } p_2^{k_2}(T) +$$

$$+ \dim \text{ Ker } p_3^{k_3}(T) + \ldots + \dim \text{ Ker } p_s^{k_s}(T).$$

Podemos aplicar el mismo argumento a $p_1^s(T)$, para obtener:

$$\text{rango}\,(p_1^s(T)) =$$

$$= \text{rango } p_1^s(T)_{|\text{Ker } p_1^{k_1}(T)} + \dim \text{ Ker } p_2^{k_2}(T) +$$
$$+ \dim \text{ Ker } p_3^{k_3}(T) + ... + \dim \text{ Ker } p_s^{k_s}(T).$$

Entonces

$$\text{rango } p_1^{i-1}(T) - 2 * \text{rango } p_1^{i}(T) + \text{rango } p_1^{i+1}(T) =$$
$$= \left(\text{rango } p_1^{i-1}\left(T_{|\text{Ker } p_1^{k_1}(T)}\right) + \sum_{j=2}^{s} \dim\text{Ker } p_j^{k_j}(T)\right)$$
$$-2\left(\text{rango } p_1^{i}\left(T_{|\text{Ker } p_1^{k_1}(T)}\right) + \sum_{j=2}^{s} \dim\text{Ker } p_j^{k_j}(T)\right)$$
$$+\left(\text{rango } p_1^{i+1}\left(T_{|\text{Ker } p_1^{k_1}(T)}\right) + \sum_{j=2}^{s} \dim\text{Ker } p_j^{k_j}(T)\right)$$
$$= \text{rango } p_1^{i-1}\left(T_{|\text{Ker } p_1^{k_1}(T)}\right) - 2\left(\text{rango } p_1^{i}\left(T_{|\text{Ker } p_1^{k_1}(T)}\right)\right) +$$
$$+\text{rango } p_1^{i+1}\left(T_{|\text{Ker } p_1^{k_1}(T)}\right).$$

■

Teorema 135 *Si rango $p(T) =$ rango $p^2(T)$, entonces*

$$\textit{rango}\left(p^i(T)\right) = \textit{rango}\,(p(T)), \forall i \in \mathbb{N}.$$

Demostración. De $p(T)(V) \xrightarrow{p(T)_{|p(T)(V)}} p^2(T)(V)$, se tiene que

$$\text{rango } p(T) = \text{nul}\left(p(T)_{|}\right) + \text{rango } p^2(T).$$

Por hipótesis, se tiene que $\text{nul}\left(p(T)_{|}\right) = 0$, así que $p(T)_{|}$ es un isomorfismo entre $p(T)(V)$ y $p^2(T)(V)$. Ahora como $p^2(T)(V) \subseteq p(T)(V)$. Tenemos que $p^2(T)(V) \xrightarrow{p(T)_{|}} p^3(T)(V)$ también es un isomorfismo. Se concluye por inducción. ■

Teorema 136 *Si rango $p^i(T) =$ rango $p^{i+1}(T)$, entonces rango $p^{i+j}(T) =$ rango $p^i(T)$, $\forall j \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Cópiese de la de arriba. ■

Ejemplo 137 *Sea* $A =: \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. *Encontraremos su forma canónica racional.*

El espacio cíclico generado por $\bar{e}_1$ *está generado por*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto el polinomio mínimo para $\bar{e}_1$ *es* $t^2 + 2$.

El espacio cíclico generado por $\bar{e}_2$ *está generado por*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto el polinomio mínimo para $\bar{e}_2$ *es* $t^2 + 2$.

El espacio cíclico generado por $\bar{e}_5$ *está generado por*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix},$$

concatenando: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 10 & 16 \end{pmatrix}$ *escalonando:* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Por lo tanto el polinomio mínimo para* $\bar{e}_5$ *es*

$$t^3 - 2t^2 + 2t - 4 = (t - 2)\left(t^2 + 2\right).$$

Entonces

$$\textit{el polinomio mínimo para } A \textit{ es } (t-2)\left(t^2+2\right).$$

Entonces

$$\mathbb{R}^5 = Ker(A - 2Id) \bigoplus Ker\left(A^2+2\right).$$

Ahora,

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} - 2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & -6 & 2 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & -6 & 2 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

el conjunto de soluciones es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t_1 \\ t_1 \\ t_1 \\ 2t_1 \end{pmatrix} \mid t_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por otra parte,

$$A^2+2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}^2 + 2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & -24 & 12 \end{pmatrix}$$

y

$$\left(A^2+2\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & -24 & 12 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & -72 & 36 \\ 0 & 0 & 36 & -72 & 36 \\ 0 & 0 & 36 & -72 & 36 \\ 0 & 0 & 72 & -144 & 72 \end{pmatrix}.$$

Así que

$$rango\left(A^2+2\right)^0=5,\ \ rango\left(A^2+2\right)=1,\ \ rango\left(A^2+2\right)^2=1.$$

y

$$c_1=\frac{5-2*1+1}{2}=2, c_2=\frac{1-2*1+1}{2}=0, c_3=0, ...$$

Por lo tanto el diagrama de puntos es

$$\bullet\ \ \bullet$$

Por lo tanto la forma canónica racional es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

10.9. Forma canónica de Jordan

Si $p(t)=t-\lambda$ con $\lambda\in F, \mu_T(t)=(t-\lambda)^k$ (o lo que es lo mismo, $\mu_{T-\lambda Id}(t)=(t)^k$), entonces haciendo $U=:T-\lambda Id$, tenemos que

$$[U]_\beta^\beta=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \text{ y por lo tanto}$$

$$[T]_\beta^\beta=$$

$$
= \begin{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ddots & \lambda & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda
\end{pmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \begin{pmatrix}
\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \lambda & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda
\end{pmatrix} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \begin{pmatrix}
\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \lambda & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda
\end{pmatrix}
\end{pmatrix}
$$

que se llama la forma canónica de Jordan para V.

Definición 121 *Un bloque de Jordan correspondiente al valor propio λ es de la forma*

$$
\begin{pmatrix}
\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \lambda & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda
\end{pmatrix}.
$$

Ejemplo 138 *Consideremos* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Es obvio que el polinomio mínimo para $\bar{e}_1$ es $t-2$.

El espacio T-cíclico generado por $\bar{e}_2$ está generado por los vectores

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -26 \\ 20 \\ 12 \\ -26 \end{pmatrix},$$

concatenando: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -6 & -26 \\ 1 & 3 & 8 & 20 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & -1 & -6 & -26 \end{pmatrix}$*, reduciendo y escalonando:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto el polinomio mínimo para $\bar{e}_2$ es

$$t^3 - 7t^2 + 16t - 12 = (t-3)(t-2)^2$$

Ahora,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

ya es una base de $\mathbb{R}^4$, pues

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \end{pmatrix} = 1 * 1 * (-6+4) = -2.$$

Por lo tanto

$$\mu_T(t) = (t-3)(t-2)^2.$$

Calculemos el diagrama de puntos para $Ker(T - 3Id)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango 3.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango 3.
Por lo tanto

$$c_1 = 4 - 2 * rango\,(A - 3Id) + rango\,(A - 3Id)^2 = 4 - 6 + 3 = 1$$

$$c2 = 3 - 2 * 3 + 3 = 0 = c3 = ...$$

Por lo tanto, el diagrama de puntos es:

$$\bullet$$

Diagrama de puntos para $Ker(T - 2Id)^2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es de rango 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

es de rango 1.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es de rango 1.
Entonces,

$$c_1 = 4 - 2 * 2 + 1 = 1$$

$$c_2 = 2 - 2 * 1 + 1 = 1$$

$$c_3 = 1 - 2 * 1 + 1 = 0 = c_4 = ...$$

Por lo tanto el diagrama de puntos para $Ker(T-2Id)^2$ *es*

$$\begin{array}{ll} \bullet & \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

Por lo tanto la forma canónica racional es

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esto significa que hay una base $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$ *tal que* $T(\bar{v}_3) = \bar{v}_4$, *y* $T(\bar{v}_4) = -4\bar{v}_3 + 4\bar{v}_4$. *Si cambiamos a la base*

$$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_4, (T-2Id)\,\bar{v}_4\},$$

como

$$(T-2Id)\,\bar{v}_4 = -4\bar{v}_3 + 4\bar{v}_4 - 2\bar{v}_4 = -4\bar{v}_3 + 2\bar{v}_4),$$

tendremos que $T(\bar{v}_4) = 2\bar{v}_4 + (T-2Id)\,\bar{v}_4$ *y* $(T-2Id)\,\bar{v}_4 = 2*(T-2Id)\,\bar{v}_4$. *Por lo que la matriz respecto de esta nueva base es:*

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

donde $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *es un bloque de Jordan.*

Teorema 137 *Sea* $V \xrightarrow[lineal]{T} V$, *con*

$$\dim(V) < \infty \text{ y } \mu_T(t) = (t-\lambda_1)^{k_1}(t-\lambda_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_s)^{k_s}.$$

Entonces el número de bloques de Jordan de $l \times l$, *correspondientes a* λ_1 *es*

$$c_{l,\lambda_1} = rango\,(T-\lambda_1 Id)^{l-1} - 2*rango\,(T-\lambda_1 Id)^{l} + rango\,(T-\lambda_1 Id)^{l.+1},$$

y en general,

$$c_{l,\lambda_u} = rango\,(T-\lambda_u Id)^{l-1} - 2*rango\,(T-\lambda_u Id)^{l} + rango\,(T-\lambda_u Id)^{l.+1}.$$

Demostración. Se sigue de la Observación 10.9. ∎

Corolario 29 *Sea* $V \xrightarrow{T} V$ *es lineal con* $\dim(V) < \infty$*. Son equivalentes*

1. *T es diagonalizable.*

   a) *(Los únicos factores irreducibles de $\mu_T(t)$ son de grado 1) y*

   b)
$$\left(rango\,(T - \lambda_u Id) = rango\,(T - \lambda_u Id)^2\right)$$
   para cada λ_u valor propio de T

Demostración. 1)⇒2))

Es claro que si T es diagonalizable, entonces todos los factores irreducibles de $\mu_T(t)$ son de la forma $t - \lambda_u$. Además, todos los bloques de Jordan (y racionales son de la forma (λ_u). Dado un valor propio λ_u, tenemos que la forma de Jordan para $\mathrm{Ker}(T - \lambda_u Id)$ es

$$\begin{pmatrix} \lambda_u & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_u & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_u \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$c_{1,\lambda_u} = \dim\left(\mathrm{Ker}\,(T - \lambda_u Id)\right).$$

Ahora,

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\,(T - \lambda_u Id)\right) = \dim(V) - \mathrm{rango}\,(T - \lambda_u Id).$$

Como

$$c_{1,\lambda_u} = \mathrm{rango}\,(T - \lambda_u Id)^0 - 2 * \mathrm{rango}\,(T - \lambda_u Id) + \mathrm{rango}\,(T - \lambda_u Id)^2.$$

entonces

$$c_{1,\lambda_u} = \dim\left(\mathrm{Ker}\,(T - \lambda_u Id)\right) = \dim(V) - \mathrm{rango}\,(T - \lambda_u Id) \Rightarrow$$

$$\dim(V) - 2 * \mathrm{rango}\,(T - \lambda_u Id) + \mathrm{rango}\,(T - \lambda_u Id)^2 =$$

$$= \dim(V) - rango\,(T - \lambda_u Id) \Rightarrow$$

$$\mathrm{rango}\,(T - \lambda_u Id) = \mathrm{rango}\,(T - \lambda_u Id)^2.$$

2)⇒1)

Tenemos que $\mu_T(t) = \prod_{i=1}^{s} (t-\lambda_i)^{k_i}$, basta ver que cada k_i es 1. Y para esto basta ver que

$$c_{l,\lambda_u} =$$
$$= \operatorname{rango}(T-\lambda_u Id)^{l-1} - 2 * \operatorname{rango}(T-\lambda_u Id)^{l} + \operatorname{rango}(T-\lambda_u Id)^{l.+1} = 0$$

para $l \geq 2$ (esto querría decir que no hay bloques de $2\times 2,\ 3\times 3, ...$ etc., es decir que todos los bloques serían de 1×1, y se verían así: (λ_u)).

Como rango$(T-\lambda_u Id)$ =rango$(T-\lambda_u Id)^2$. Entonces por el Teorema 135,

$$\operatorname{rango}(T-\lambda_u Id) = \operatorname{rango}(T-\lambda_u Id)^2 = \operatorname{rango}(T-\lambda_u Id)^3 = ...$$

entonces

$$c_{2,\lambda_u} = \operatorname{rango}(T-\lambda_u Id) - 2 * \operatorname{rango}(T-\lambda_u Id)^2 + \operatorname{rango}(T-\lambda_u Id)^3 = 0$$

y para $l \geq 2$,

$$\begin{aligned} c_{l,\lambda_u} &= \text{rango}(T-\lambda_u Id)^{l-1} - 2 * \text{rango}(T-\lambda_u Id)^{l} + \text{rango}(T-\lambda_u Id)^{l+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Teorema 138 *Sean $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(F)$. Son equivalentes:*

1. *A es similar a B.*

2. *A y B tienen la misma forma canónica racional. (Excepto por una permutación en el orden de los bloques).*

3. *A, B tienen el mismo polinomio mínimo y para cada $f(t)$ tal que $f(t) \mid \mu_A(t)$, se tiene que*
$$\textit{rango } f(A) = \textit{rango } f(B).$$

4. *rango $f(A) =$ rango $f(B)$, y para cada $f(t)$ tal que $f(t) \mid \mu_A(t)$, se tiene que*
$$\textit{rango } f(A) = \textit{rango } f(B).$$

5. *rango $f(A) =$ rango $f(B)$, para cada $f(t) \in F[t]$.*

Demostración. 1)⇒5))

Supongamos que $A = Q^{-1}BQ$. Entonces B y A son matrices que representan al operador lineal

$$F^n \overset{B\cdot}{\to} F^n,$$

así que

$$\text{rango}\,(A) = \text{rango}\ \ (B \cdot \_) = \text{rango}\ B.$$

Ahora,

$$Q^{-1}f\,(B)\,Q = f\left(Q^{-1}BQ\right) = f\,(A):$$

i) Se tiene que $Q^{-1}BQ = A$, entonces

$$Q^{-1}B^{k+1}Q = Q^{-1}B^kBQ = Q^{-1}B^kQQ^{-1}BQ = \left(Q^{-1}B^kQ\right)A.$$

Así que por inducción se tiene que $Q^{-1}B^mQ = A^m$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

ii) Es claro que $\forall c_m \in F$, $Q^{-1}c_mB^mQ = c_mA^m$.

iii) Es claro que

$$Q^{-1}\left(c_0I_n + c_1B + ... + c_mB^m\right)Q =$$
$$= \left(Q^{-1}c_0I_nQ + Q^{-1}c_1BQ + ... + Q^{-1}c_mB^mQ\right) =$$
$$= c_0I_n + c_1A + ... + c_mA^m.$$

Una vez que hemos visto que las matrices $f\,(B)$ y $f\,(A)$ son similares, podemos concluir que tiene el mismo rango.

5) ⇒ 4)) Es obvio.

4) ⇒ 3))

Solamente hay que demostrar que A y B tienen el mismo polinomio mínimo.

Como rango $\mu_A\,(B)$ = rango $\mu_A\,(A) = 0$, entonces $\mu_A\,(B) = 0$. Por lo tanto, $\mu_B\,(t) \mid \mu_A\,(t)$. Por simetría, $\mu_A\,(t) \mid \mu_B\,(t)$ y entonces $\mu_A\,(t) = \mu_B\,(t)$.

3) ⇒ 2)) Se sigue del Teorema 134.

2) ⇒ 1)) A es similar a su forma canónica racional que es similar a B. ■

Corolario 30 *Son equivalentes para dos matrices $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}\,(F)$, cuyos polinomios característicos sólo tengan factores irreducibles de grado 1:*

1. *A es similar a B.*
2. *A y B tienen la misma forma canónica de Jordan.*

Demostración. Teorema anterior. ■

Llamemos matriz escalar a una matriz de la forma $cI_n, c \in F$.

Ejercicio 232 *Sean* A, B *en* $M_{2\times 2}(F)$ *no escalares. Demuestre que* A *y* B *son similares si y sólo si* A *y* B *tienen el mismo polinomio característico.*

Ejercicio 233 *La relación de similitud es una relación de equivalencia en* $M_{n\times n}(F)$. *Encuentre todas las clases de similitud en* $M_{6\times 6}(\mathbb{Q})$ *con polinomio mínimo* $(x+2)^2(x-1)$.

Ejercicio 234 *Encuentre todas las clases de similitud en* $M_{6\times 6}(\mathbb{Q})$ *con polinomio característico* $(x^4-1)(x^2-1)$.

Ejercicio 235 *Determine todas las forms canónicas racionales posibles para una transformación con polinomio característico* $x^2(x^2+1)^2$.

Ejercicio 236 *Sea* ${}_{\mathbb{Q}}V$ *de dimensión finita y* $V \underset{lineal}{\overset{T}{\to}} V$ *un isomorfismo tal que* $T^{-1} = T^2 + T$. *Demuestre que* $\dim(V)$ *es un múltiplo de 3. Demuestre también que todos los operadores que satisfacen las condiciones son similares.*

Ejercicio 237 *Sea* $B \in M_{10\times 10}(\mathbb{Q})$ *tal que* $\chi_B(t) = (t-2)^4(t^2-3)^3, \mu_B(t) = (t-2)^2(t^2-3)^2$ *y rango* $(B - 2I_{10}) = 8$. *Encuentre las formas canónicas racional y de Jordan de* B.

Ejercicio 238 *Sea* $T :_{\mathbb{Q}} V \longrightarrow_{\mathbb{Q}} V$ *tal que* $[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. *Encuentre una base* γ *de* V *tal que* $[T]_\gamma^\gamma$ *esté en forma canónica racional.*

Ejercicio 239 *Sea* $A \in M_{7\times 7}(\mathbb{C})$ *el bloque de Jordan de* 7×7 *con* λ *en la diagonal. Calcule la forma de Jordan de* A^3. *(Considere los casos* $\lambda = 0$, $\lambda \neq 0$*).*

Sea $B \in M_{4\times 4}(F)$ *tal que* $\chi_B(t) = (t-1)^4$. *Demuestre que hay 5 posibilidades para la forma de Jordan de* B. *Demuestre que* $\mu_B(t)$ *y rango* $(B - I_4)$ *determinan la forma canónica de Jordan.*

Ejercicio 240 *Encuentre la forma canónica de Jordan de*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 241 *Encuentre la forma canónica racional de la matriz del ejercicio anterior.*

Ejercicio 242 *Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, demuestre que $A = B + N$ donde B es diagonalizable, N es nilpotente y $BN = NB$. (Sugerencia: usar formas canónicas de Jordan).*

Ejercicio 243 *Determine las formas canónicas racional y de Jordan para*
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 244 *Sea $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ tal que su forma canónica de Jordan es*
$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ *y sea $B \in M_{4\times 4}(\mathbb{C})$ con forma canónica de Jordan:* $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.
Sea ${}_{\mathbb{C}}V = \{X \in M_{3\times 4}(\mathbb{C}) \mid AX = XB\}$

10.10. Cadenas de Markov

10.10.1. Límites

Consideremos el anillo conmutativo

$$R = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \left\{ \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \mid f \text{ es función} \right\},$$

donde la suma y el producto son los naturales, es decir que

$$\begin{aligned} (f+g)(a) &= f(a) + g(a), \ \forall a \in \mathbb{R}, \\ (f\cdot g)(a) &= f(a)\cdot g(a), \ \forall a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Uno puede considerar matrices de $n \times n$ con coeficientes en R.

Por ejemplo

$$\begin{pmatrix} e^t & t^2+1 \\ \cos(t) & t^t \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(R).$$

Ahora, si $A \in M_{n\times n}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)$, puede uno considerar límites, por ejemplo

$$\lim_{t\to a} A(t).$$

Para mantener los argumentos en un nivel sencillo, hacemos la siguiente definición.

Definición 122 *Si $A \in M_{n\times n}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)$, (esto significa que $A_{i,j}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función $\forall (i,j) \in \{1,...,n\} \times \{1,...,n\}$)*

$$\begin{aligned}\lim_{t\to a} A(t) &= : L, \text{ donde} \\ L_{i,j} &= \lim_{t\to a} A_{i,j}(t).\end{aligned}$$

Análogamente, podemos considerar el anillo conmutativo de las sucesiones en un campo,

$$R = F^{\mathbb{N}},$$

con las operaciones naturales de suma y de producto.

De nuevo podemos considerar $M_{n\times n}\left(F^{\mathbb{N}}\right)$, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2^m} & \frac{1}{m} \\ \sqrt[m]{m} & (1+\frac{1}{m})^m \end{pmatrix},$$

y considerar por ejemplo

$$\lim_{m\to\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{2^m} & \frac{1}{m} \\ \sqrt[m]{m} & (1+\frac{1}{m})^m \end{pmatrix}.$$

Otra vez,

$$\lim_{m\to\infty} \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \\ \cdots & A_{i,j}(m) & \cdots \\ & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \\ \cdots & \lim\limits_{m\to\infty} A_{i,j}(m) & \cdots \\ & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 245 *Sean $A, B \in M_{n\times n}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)$ tales que*
1. $\lim\limits_{t\to a} A(t)$ existe,
2. $\lim\limits_{t\to a} B(t)$ existe,
entonces $\lim\limits_{t\to a} (A(t)B(t)) = \left(\lim\limits_{t\to a} A(t)\right)\left(\lim\limits_{t\to a} B(t)\right)$.

Ejercicio 246 *Sean $A, B \in M_{n\times n}\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$ tales que*
1. $\lim\limits_{m\to\infty} A(m)$ existe,
2. $\lim\limits_{m\to\infty} B(m)$ existe,
entonces $\lim\limits_{m\to\infty} (A(m)B(m)) = \left(\lim\limits_{m\to\infty} A(m)\right)\left(\lim\limits_{m\to\infty} B(m)\right)$.

Lema 25 $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda^m \binom{m}{i} = 0,$ *si* $|\lambda| < 1.$

Demostración. Denotemos

$$S_m =: \lambda^m \binom{m}{i} = \lambda^m \cdot \frac{m \cdot (m-1) \cdot ... \cdot (m-i+1)}{i!},$$

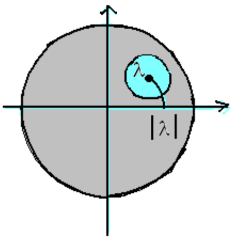
así que

$$S_{m+1} =: \lambda^{m+1} \binom{m+1}{i} = \lambda^{m+1} \cdot \frac{(m+1) \cdot (m+1-1) \cdot ... \cdot (m+2-i)}{i!},$$

así que

$$S_{m+1} =: \lambda S_m \cdot \frac{(m+1)}{m}.$$

Como $\frac{(m+1)}{m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 1$, entonces $\lambda \cdot \frac{(m+1)}{m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$



Así que existe M tal que $\forall m \geq M$

$$\left| \lambda \cdot \frac{(m+1)}{m} \right| < 1 - \varepsilon,$$

en donde podemos tomar $\varepsilon = 1 - |\lambda| < 1$, por ejemplo.

Así, tenemos que:

$$|S_M| (1-\varepsilon) > |S_{M+1}|$$

entonces

$$|S_M| (1-\varepsilon)(1-\varepsilon) > |S_{M+1}| (1-\varepsilon) > |S_{M+2}|,$$

y en general,

$$|S_{M+k}| < |S_M| (1-\varepsilon)^k .$$

Como

$$|S_M| (1-\varepsilon)^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

tenemos que $\underset{k\to\infty}{lim} |S_{M+k}| = 0.$

Por lo tanto

$$\underset{m\to\infty}{lim} |S_m| = 0.$$

■

Proposición 21 *Sea $J \in M_{k\times k}(\mathbb{C})$, un bloque de Jordan correspondiente a λ, entonces*

1. $|\lambda| < 1 \Rightarrow \lim_{m\to\infty} J^m = 0.$
2. $\lambda = 1,\ \lim_{m\to\infty} J^m \in \mathbb{C} \Rightarrow J = (1).$
3. $\lambda \neq 1,\ |\lambda| = 1 \Rightarrow \lim_{m\to\infty} J^m$ *no existe.*
4. $|\lambda| > 1 \Rightarrow \lim_{m\to\infty} J^m$ *no existe.*

Demostración. Sea

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

un bloque de Jordan de A.

Llamemos $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$, supongamos que esta matriz es de $k \times k$.

Consideremos la existencia de $\lim\limits_{m\to\infty} (N + \lambda I_k)^m$, para distintos valores de λ.

$\lambda = 0)$

Si $\lambda = 0$ entonces $\lim\limits_{m\to\infty} (N + \lambda I_k)^m = 0$ pues N^{k-1} es la matriz $0:$
su primera columna es

$$\begin{aligned} \left(N^{k-1}\right)\vec{e}_1 &= \left(N^{k-2}\right)N\vec{e}_1 = \left(N^{k-2}\right)\vec{e}_2 = \left(N^{k-3}\right)N\vec{e}_2 = \\ &= \left(N^{k-3}\right)\vec{e}_3 = ... = \left(N^{k-k+1}\right)\vec{e}_{k-1} = \\ &= \left(N\vec{e}_{k-1}\right) = \vec{0}. \end{aligned}$$

La segunda columna de N^{k-1} es $N^{k-1}\vec{e}_2 = N^{k-1}N\vec{e}_1 = N\left(N^{k-1}\vec{e}_1\right) = N\ \vec{0} = \vec{0}$.
En general,

$$\begin{aligned} N^{k-1}\vec{e}_j &= N^{k-1}N\vec{e}_{j-1} = N^{k-1}NN\vec{e}_{j-2} = ... = N^{k-1}N^{(j-1)}\vec{e}_{j-(j-1)} = \\ &= N^{(j-1)}N^{k-1}\vec{e}_1 = \vec{0}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $N^{k-1} = 0$.

Ahora, supongamos que $\lambda \neq 0$. Como N y λI_k conmutan, se puede calcular $(N + \lambda I_k)^m$ con el Teorema del binomio de Newton.

Así que

$$(N + \lambda I_k)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \lambda^{m-i} N^i (I_k)^{m-i} = \sum_{i=0}^{m} \lambda^{m-i} \binom{m}{i} N^i.$$

Así que si $m \geq k-1$ entonces

$$(N + \lambda I_k)^m = \sum_{i=0}^{m} \lambda^{m-i} \binom{m}{i} N^i = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{m-i} \binom{m}{i} N^i.$$

Por el Lema anterior, $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda^m \binom{m}{i} = 0$, si $|\lambda| < 1$, así que también

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{m-i} \binom{m}{i} = 0.$$

Por lo tanto, si $|\lambda| < 1$, entonces $\underset{m\to\infty}{lim}(\lambda N + I_k)^m$ existe y es 0.

$\lambda = 1)$

Por otra parte, si $\lambda = 1$, entonces

$$\sum_{i=0}^{k-1}\binom{m}{i}N^i$$

converge sólo si $\sum\limits_{i=0}^{k-1}\binom{m}{i}N^i = \binom{m}{0}N^0 = 1 \cdot I$, esto sucede si en la suma hay un solo sumando, es decir, si $k = 1$:

Si $k > 1$, entonces

$$\binom{m}{1} \underset{m\to\infty}{\to} \infty,$$

y es claro que

$$(N + I_k)^m = \sum^{m}\binom{m}{i}N^i$$

tiene en su coordenada $2,1$ a $\binom{m}{1} = m$. Pues

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$((N + I_k)^m)_{2,1} = \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\left(N^i\right)_{2,1} = \binom{m}{1}N_{2,1} = \binom{m}{1} = m.$$

$\lambda \neq 1$, $|\lambda| = 1)$

Consideremos la entrada $1, 1$ de $(N + \lambda I_k)^m$:

$$\lambda^m.$$

Veamos que no converge:

$$\left|\lambda^{s+1} - \lambda^s\right| = |\lambda^s| \, |\lambda - 1| = |\lambda - 1| \, .$$

Veamos que $\ell \neq \lim\limits_{m\to\infty} \lambda^m$:
si $|\ell - \lambda^s| < \frac{1}{2} |\lambda - 1|$, entonces

$$\left|\lambda^{s+1} - \ell\right| + |\ell - \lambda^s| \geq \left|\lambda^{s+1} - \lambda^s\right| = |\lambda - 1| \, ,$$

por lo que

$$\left|\lambda^{s+1} - \ell\right| > |\lambda - 1| - \frac{1}{2} |\lambda - 1| = \frac{1}{2} |\lambda - 1| \, .$$

$|\lambda| > 1)$
Por último, si $|\lambda| > 1$ entonces $\mathop{lim}\limits_{m\to\infty} (N + \lambda I_k)^m$ no existe:
simplemente consideremos la entrada $1, 1$ de $(N + \lambda I_k)^m$:

$$\lambda^m.$$

■

Observación 96 *Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, $\mathop{lim}\limits_{m\to\infty} A^m$ existe si y sólo si $\mathop{lim}\limits_{m\to\infty} J^m$ existe para cada bloque de Jordan de A.*

Demostración. Por el Teorema fundamental del Álgebra, $\chi_A(t)$ es n producto de factores de grado uno. Así que A tiene forma de Jordan.

Es claro que si $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, entonces $A^m = \begin{pmatrix} B^m & 0 \\ 0 & C^m \end{pmatrix}$, de donde vemos que $\lim A^m$ existe si y sólo si existen $\lim B^m$ y $\lim C^m$.

De lo anterior, es claro que $\lim A^m$ existe si y sólo si existe $\lim J^m$ para cada uno de los bloques de Jordan de A. ■

Ejercicio 247 *Si $QAQ^{-1} = B$, entonces $\lim\limits_{m\to\infty} B^m$ existe si y sólo si $\lim\limits_{m\to\infty} A^m$ existe. En caso de existir ambos límites, entonces $\lim\limits_{m\to\infty} B^m = \lim\limits_{m\to\infty} QA^mQ^{-1}$.*

Teorema 139 *Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ son equivalentes:*

1. $\lim_{m\to\infty} A^m \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

a) *λ valor propio de $A \Rightarrow |\lambda| \leq 1$.*

b) *λ valor propio de A, $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = 1$.*

c) $\dim(E_1) =$ *(multiplicidad de* 1 *como raíz del polinomio característico de* A*). Aquí,* $E_1 = \ker((A \cdot \_) - Id_{\mathbb{C}^n})$.

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2.) Se sigue de la Observación anterior, pues la condición 2c equivale a que todos los bloques de Jordan de A que corresponden a 1 sean de uno por uno.

2. $\Rightarrow$ 1) Se sigue de la Observación anterior. ■

10.10.2. Procesos aleatorios y Cadenas de Markov

Un proceso aleatorio se describe de la manera siguiente:

1. Consideremos n "estados" posibles en que se distribuye una población de objetos, denotemos m_i el número de objetos que están en el estado i.

2. Aparte de todo, la ubicación de los objetos en sus estados puede cambiar en una siguiente "etapa".

3. La manera en que cambian de estado los objetos de una etapa a la siguiente, está determinado por una matriz, que se llama matriz de transición:

$$P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

donde $P_{i,j}$ es la probabilidad de que un objeto en el estado j pase al estado i en la siguiente etapa, como es una probabilidad, tenemos que en realidad

$$P \in M_{n\times n}([0,1]).$$

Si comenzamos con una población inicial $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$, entonces la población en el estado j en la siguiente etapa será:

$$P_{j,1}m_1 + P_{j,2}m_2 + ... + P_{j,n}m_n$$

pues por ejemplo $P_{j,1}m_1$ representa la cantidad de población que pasó del estado 1 al estado j.

Como

$$P_{j,1}m_1 + P_{j,2}m_2 + ... + P_{j,n}m_n = P_{\underline{j}} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix},$$

tenemos que $P \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$ es la distribución de la población en la etapa 1. (La etapa inicial es la etapa cero).

Repitiendo el argumento, tenemos que $PP \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$ es el vector de población en la etapa 2, y en general

$$P^k \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$$

es el vector de población en la etapa k.

Ahora es claro que la población converge a un límite si y sólo si $\lim_{k\to\infty} P^k$ existe.

A una sucesión de estados descrita de la manera anterior se le llama cadena (o proceso) de Markov.

Observación 97 *Si P es una matriz de transición, entonces la suma de los elementos en cualquier columna es* 1. *Esto sucede porque es la probabilidad de que un poblador del estado j pase a algún otro estado.*

Lo anterior equivale a decir que

$$(1, 1, ..., 1)\, P = (1, 1, ..., 1)\,.$$

Tomando la transpuesta de esta ecuación, tenemos que

$$P^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es decir que 1 es un valor propio para P^t, y por lo tanto también es un valor propio de P.

Resumimos lo anterior en el siguiente enunciado.

Teorema 140 *Una matriz de transición tiene* 1 *como valor propio.*

Ejemplo 139 *Niños y pañales.*
Un pañal puede estar en tres estados: Nuevo, usado, doblemente usado.
Si un niño ensucia un pañal, éste se desecha y se sustituye por uno nuevo. La probabilidad de que un niño ensucie un pañal es $1/3$ *y después de dos usos, los pañales se desechan.*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} n & u & du \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ u \\ du \end{array} & \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1 \\ 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

La forma canónica de Jordan de

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1 \\ 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \; es \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Así que

$$\lim_{m\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i\sqrt{3} \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se deja como ejercicio comprobar que una base de Jordan para

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1 \\ 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{6}i\left(2i\sqrt{3}+3\right)\sqrt{3} \\ \frac{1}{6}i\left(2i\sqrt{3}-3\right)\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4}i\left(i\sqrt{3}-3\right)\sqrt{3} \\ \frac{1}{4}i\left(i\sqrt{3}+3\right)\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$$

por lo que el límite de las potencias de P es

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{19} & -\frac{1}{57}i\sqrt{3}+\frac{5}{19} & \frac{1}{57}i\sqrt{3}+\frac{5}{19} \\ \frac{6}{19} & -\frac{7}{57}i\sqrt{3}-\frac{3}{19} & \frac{7}{57}i\sqrt{3}-\frac{3}{19} \\ \frac{4}{19} & \frac{2}{57}i\left(4+i\sqrt{3}\right)\sqrt{3} & \frac{2}{57}i\left(-4+i\sqrt{3}\right)\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{6}i\left(2i\sqrt{3}+3\right)\sqrt{3} & \frac{1}{4}i\left(i\sqrt{3}-3\right)\sqrt{3} \\ 1 & \frac{1}{6}i\left(2i\sqrt{3}-3\right)\sqrt{3} & \frac{1}{4}i\left(i\sqrt{3}+3\right)\sqrt{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{9}{19} & \frac{9}{19} & \frac{9}{19} \\ \frac{6}{19} & \frac{6}{19} & \frac{6}{19} \\ \frac{4}{19} & \frac{4}{19} & \frac{4}{19} \end{pmatrix}$$

En el límite, la proporción será:

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{19} & \frac{9}{19} & \frac{9}{19} \\ \frac{6}{19} & \frac{6}{19} & \frac{6}{19} \\ \frac{4}{19} & \frac{4}{19} & \frac{4}{19} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{19} \\ \frac{6}{19} \\ \frac{4}{19} \end{pmatrix}.$$

Eventualmente, habrá $9/19$ *de pañales nuevos,* $\frac{6}{19}$ *de pañales usados y* $\frac{4}{19}$ *de pañales de dos usos. En porcentajes:* $47{,}3\,68\,\%$ *pañales nuevos,* $31.\,579\,\%$ *de pañales usados y* $21.053\,\%$ *de pañales de dos usos.*

Ejercicio 248 *Compruebe que una base de Jordan para*

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1 \\ 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{6}i\left(2i\sqrt{3}+3\right)\sqrt{3} \\ \frac{1}{6}i\left(2i\sqrt{3}-3\right)\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4}i\left(i\sqrt{3}-3\right)\sqrt{3} \\ \frac{1}{4}i\left(i\sqrt{3}+3\right)\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

Proposición 22 *Sea* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *denotemos*

$$\rho_i = \sum_j |A_{i,j}|$$

la suma de los tamaños de los elementos en el $i-$*ésimo renglón de* A.
Denotemos

$$\rho(A) = \text{máx}\{\rho_i \mid i \in \{1, ..., n\}\}.$$

Si λ *es un valor propio de* A, *entonces* $|\lambda| < \rho(A)$.

Demostración. Sea $\vec{x}$ un vector propio de A correspondiente a λ, entonces $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, así que tomando las coordenadas $i-$ésimas tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda x_i &= A_{\underline{i}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1} A_{i,j} x_j \leq \\ &\leq \left| \sum_{j=1} A_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1} |A_{i,j} x_j| = \sum_{j=1} |A_{i,j}| \, |x_j|. \end{aligned}$$

Como consecuencia,

$$|\lambda x_i| \leq \sum_{j=1} |A_{i,j}| \, |x_j| \leq \left(\sum_{j=1} |A_{i,j}| \right) \text{máx}\{|x_j|\}_j$$

Digamos que $\text{máx}\{|x_j|\}_j = |x_M|$, la ecuación de arriba vale para $i = M$, así que

$$|\lambda| \, |x_M| = |\lambda x_M| \leq \left(\sum_{j=1} |A_{M,j}| \right) |x_M|.$$

Entonces

$$|\lambda| \leq \sum_{j=1} |A_{M,j}| = \rho_M \leq \rho.$$

■

El resultado anterior, se puede aplicar a A^t, de donde obtenemos que (recuerde que los valores propios de A y de A^t coinciden) que

$$|\lambda| \leq \rho\left(A^t\right) =: \nu(A).$$

En resumen: un valor propio de una matriz A es menor o igual que la mayor de las sumas de los valores absolutos de los coeficientes en un renglón (o columna).

En vista de lo que se acaba de mencionar, podemos hacer la siguiente observación.

Observación 98 *Si λ es un valor propio de una matriz de transición, entonces* $|\lambda| \leq 1$.

Demostración. Hemos notado ya que la suma de los elementos de cada columna en una matriz de transición es 1. ■

Definición 123 1. *Diremos que una matriz de transición es positiva si todos sus coeficientes pertenecen a $\mathbb{R}^{+}$.*

2. *Diremos que una matriz de transición A es regular, si $\exists n \in \mathbb{N}$, tal que A^{n} es positiva.*

Enseguida veremos como son los valores propios de una matriz regular.

Teorema 141 *Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ positiva (es decir que sus coeficientes son reales positivos). Si λ es un valor propio de A tal que $|\lambda| = \rho(A)$, entonces $\lambda = \rho(A)$ y* $E_{\lambda} = \mathcal{S}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$.

Demostración. Consideremos un vector propio $\vec{x}$ correspondiente a λ. Así que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, tomando las coordenadas $M-$ésimas, donde $|x_M| = \text{máx}\{|x_j|\}_{1\leq j\leq n}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \rho(A)|x_M| &= |\lambda||x_M| = |\lambda x_M| = \left|\sum_j A_{M,j}x_j\right| \leq \\ &\leq \sum_j |A_{M,j}x_j| \leq \left(\sum_j |A_{M,j}|\right)|x_M| \leq \rho(A)|x_M|, \end{aligned}$$

Así que las desigualdades en realidad son igualdades, así que por ejemplo,

$$\sum_j |A_{M,j}x_j| = \left(\sum_j |A_{M,j}|\right)|x_M|,$$

de donde se sigue que

$$|x_j| = |x_M|, \forall j \in \{1, ..., n\}.$$

Una vez notado esto, podemos escribir

$$\begin{aligned}\rho(A)|x_i| &= |\lambda||x_i| = |\lambda x_i| = \left|\sum_j A_{i,j}x_j\right| \leq \\ &\leq \sum_j |A_{i,j}x_j| \leq \left(\sum_j |A_{i,j}|\right)|x_i| \leq \rho(A)|x_i|.\end{aligned}$$

Así podemos observar que

$$\left(\sum_j A_{i,j}\right)|x_i| \leq \rho(A)|x_i|,\ \forall i \in \{1,...,n\}.$$

Por lo que

$$\sum_j A_{i,j} = \rho(A),\ \forall i \in \{1,...,n\}.$$

Entonces la suma de los elementos en cada renglón de A es $\rho(A)$, por lo que

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho(A)\\\rho(A)\\\vdots\\\rho(A)\end{pmatrix} = \rho(A)\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

entonces $\rho(A)$ es un valor propio de A.

Por otro lado, como

$$\left|\sum_j A_{i,j}x_j\right| = \sum_j A_{i,j}|x_j|,$$

debe suceder (Ejercicio) que existe un complejo u y escalares $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n \in \mathbb{R}^+$ tales que $x_j = \tau_j u$, entonces $\vec{x} = u\begin{pmatrix}\tau_1\\\tau_2\\\vdots\\\tau_n\end{pmatrix}$, así que

$$A\vec{x} = A\begin{pmatrix}\tau_1\\\tau_2\\\vdots\\\tau_n\end{pmatrix}u = \rho(A)\begin{pmatrix}\tau_1\\\tau_2\\\vdots\\\tau_n\end{pmatrix}u,$$

de donde se tiene que $A\begin{pmatrix}\tau_1\\\tau_2\\\vdots\\\tau_n\end{pmatrix}=\rho(A)\begin{pmatrix}\tau_1\\\tau_2\\\vdots\\\tau_n\end{pmatrix}$.

Como vimos arriba, un vector propio que correspondiera a un valor propio de tamaño $\rho(A)$, debe tener los valores absolutos de sus coordenadas iguales.

Así que $\vec{x}=u\begin{pmatrix}\tau\\\tau\\\vdots\\\tau\end{pmatrix}=u\tau\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ para $\tau\in\mathbb{R}^+$, $u\in\mathbb{C}$.

En resumidas cuentas, un vector propio de A que corresponda a un valor propio con tamaño $\rho(A)$ debe ser un múltiplo complejo de $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$. Como éste es un vector propio que corresponde a $\rho(A)$, entonces los valores propios de tamaño $\rho(A)$, coinciden con $\rho(A)$. Otra vez: si $|\lambda|=\rho(A)$, entonces existe un vector propio z que corresponde a λ, pero como es un múltiplo de $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, en realidad corresponde a $\rho(A)$. ■

Corolario 31 *Sea $A\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ positiva (es decir que sus coeficientes son reales positivos). Si λ es un valor propio de A tal que $|\lambda|=\nu(A)$, entonces $\lambda=\nu(A)$ y E_λ es de dimensión 1.*

Demostración. Simplemente notemos que $\nu(A)=\rho(A^t)$ y apliquemos el Teorema anterior. Es inmediato entonces que $|\lambda|=\nu(A)=\rho(A^t)\Rightarrow\lambda=\rho(A^t)=\nu(A)$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\dim\left(E_{\nu(A)}\right) &= n-\text{rango}\,(A-\nu(A)\,Id)=\\ &= n-\text{rango}\left(A-\rho\left(A^t\right)Id\right)^t=\\ &= n-\text{rango}\left(A^t-\rho\left(A^t\right)Id\right)=\\ &= \dim\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n \mid A^t\vec{x}=\rho\left(A^t\right)\vec{x}\right\}=1.\end{aligned}$$

■

Ejercicio 249 *Sean* $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+$, $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ *tales que*

$$\left|\sum_j a_j z_j\right| = \sum_j a_j |z_j|$$

entonces $\exists u \in \mathbb{C}$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $z_j = \lambda_j u$.
Sugerencia: inducción y desigualdad del triángulo.

Corolario 32 *Si* A *es una matriz de transición positiva y* λ *es un valor propio de* A *entonces*

1. $|\lambda| \leq 1$.

2. $|\lambda| = 1 \Rightarrow . = 1$.

3. $\dim(E_1) = 1$.

Teorema 142 *Si* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ *es una matriz de transición regular entonces*

1. *La multiplicidad de* 1 *como valor propio de* A *es* 1.

2. $L = \lim\limits_{m\to\infty} A^m$ *existe.*

3. L *es una matriz de transición.*

4. $AL = LA = L$.

   L *tiene todas sus columnas iguales, y estas son el vector de probabilidad* $\vec{w}$ *que corresponde al valor propio* 1.

5. $\forall \vec{x}$ *vector de probabilidad,* $\lim A^m \vec{x} = \vec{w}$.

Demostración. 1. Definamos la norma $\| \ \|$ en $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ por:

$$\|A\| = \max\{|A_{i,j}|\}.$$

Si A es una matriz de transición entonces $\|A\| \leq 1$. Cualquier potencia de una matriz de transición es de transición, pues que la suma de los elementos de las columnas sea 1 equivale a

$$(1, 1, ..., 1) A = (1, 1, ..., 1)$$

Así que

$$(1, 1, ..., 1) A^2 = (1, 1, ..., 1) A = (1, 1, ..., 1)$$

y por inducción
$$(1,1,...,1)\,A^m = (1,1,...,1)\,.$$

Entonces
$$\|A^m\| \leq 1, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Tenemos, para dos matrices $B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ que
$$\begin{aligned} \|BC\| &= \max\left\{\left|(BC)_{i,j}\right|\right\} = \\ &= \max\left\{\left|\sum_k (B_{i,k}C)_{k,j}\right|\right\} \leq |n(\|B\|\,\|C\|)| = \\ & n\,\|B\|\,\|C\|\,. \end{aligned}$$

Sea $J = P^{-1}AP$ la forma de Jordan de A, entonces
$$J^m = P^{-1}A^mP$$

por lo que
$$\begin{aligned} \|J^m\| &= \left\|P^{-1}A^mP\right\| \leq n\left\|P^{-1}\right\|\|A^mP\| \leq \\ &\leq n^2\left\|P^{-1}\right\|\|A^m\|\,\|P\| \leq n^2\left\|P^{-1}\right\|\|P\|\,. \end{aligned}$$

Si A tuviera un bloque de Jordan correspondiente a 1 que no fuera (1), entonces sería de la forma
$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{N} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{I}$$

El coeficiente $1,2$ de K^m sería $\left((N+I)^m\right)_{1,2} = \left(\binom{m}{1}NI^{m-1}\right) = m$ (potencias mayores de N tienen 0 en el lugar $1,2$), pero entonces
$$m \leq \|K\| \leq \|J\| \leq n^2\left\|P^{-1}\right\|\|P\|\,,\ \forall m \in \mathbb{N}\ \underset{\circ}{\nabla}.$$

Esta contradicción muestra que los bloques de Jordan de A que corresponden a 1 son de 1×1. Con esto se tiene que
$$1 = \dim(E_1) = \text{multiplicidad de 1 como valor propio de } A.$$

2. Es inmediato del Teorema 139.
3. Como $(1,1,...,1)\,A^m = (1,1,...,1)\ \ \forall m \in \mathbb{N}$, pasando al límite tenemos que

$$(1,1,...,1)\,L = (1,1,...,1)\,.$$

4.

$$\begin{aligned} L &= \lim A^m = \lim A^{m+1} = \\ &= \lim\left(A^m A\right) = \left(\lim A^m\right) A = LA. \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned} L &= \lim A^m = \lim A^{m+1} = \\ &= \lim\left(AA^m\right) = A\left(\lim A^m\right) = AL. \end{aligned}$$

Ahora, $AL = L \Rightarrow A\underline{L^j} = \underline{L^j}$ entonces $\underline{L^j}$ es un vector propio correspondiente a 1, también es un vector de probabilidad pues es la columna de una matriz de transición. De hecho, es el único vector de probabilidad que es vector propio correspondiente a 1. (Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ son dos vectores de probabilidad que son también vectores propios respecto a 1 entonces

$$\vec{u} = c\vec{v},$$

pues $\dim E_1 = 1$. $c \in \mathbb{R}$, pues las coordenadas son reales. La suma de las coordenadas de $\vec{u}$ es 1 y la suma de las coordenadas de $c\vec{v}$ es c, por lo que $c = 1$, es decir $\vec{u} = \vec{v}$).

5. Finalmente, si $\vec{u}$ es un vector de probabilidad (es decir sus coordenadas suman 1 y son reales no negativas), entonces

$$\lim A^m \vec{u} = \vec{w}$$

se sigue de que $\lim A^m \vec{u}$ es un vector de probabilidad:

$$(1,1,...,1) \lim A^m \vec{u} = \lim\left((1,1,...,1)\,A^m\right)\vec{u} = (1,1,...,1)\,\vec{u} = 1$$

y de que es un vector propio de A que corresponde a 1 :

$$A\left(\lim A^m \vec{u}\right) = \lim\left(A\left(A^m \vec{u}\right)\right) = \lim\left(A^{m+1}\vec{u}\right) = \lim\left(A^m \vec{u}\right).$$

■

Ejemplo 140 *Sea* $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *es claro que esta matriz de transición no es regular pues la multiplicidad de* 1 *como valor propio de* A *es* 2 *y la dimensión de* E_2 *es* 2.
El polinomio característico de A *es* $t^4 - \frac{5}{2}t^3 + 2t^2 - \frac{1}{2}t = t\,(t-1)^2\,(t-1/2)$, *así que existe el límite de* A^m *cuando* $m \to \infty$.
Un vector propio correspondiente a 0 *es una solución no nula de*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0},$$

cuya base es: $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
El vector propio correspondiente a $\frac{1}{2}$ *es la solución de*

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} - (1/2)\, I_4 \right) \vec{x} = \vec{0}.$$

Que es equivalente a:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0},$$

cuyo espacio de soluciones tiene base: $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

Así que

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\lim_{m\to\infty} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$\lim_{m\to\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}^{m} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$, entonces $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{11}{45} & \frac{23}{75} & \frac{1}{3} \\ \frac{22}{45} & \frac{28}{75} & \frac{32}{75} \\ \frac{4}{15} & \frac{8}{25} & \frac{6}{25} \end{pmatrix}$

Por lo tanto A es una matriz regular, así que para calcular su límite basta encontrar el vector de probabilidad que es vector propio correspondiente a 1 :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} - 1 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Tenemos que

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{21}{20} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una solución de

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

es $\begin{pmatrix} \frac{21}{20} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Como $\frac{21}{20} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{71}{20}$ entonces

$$\frac{20}{71} \begin{pmatrix} \frac{21}{20} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{71} \\ \frac{30}{71} \\ \frac{20}{71} \end{pmatrix},$$

es el vector de probabilidad buscado, así que

$$\lim_{m \to \infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \frac{21}{71} & \frac{21}{71} & \frac{21}{71} \\ \frac{30}{71} & \frac{30}{71} & \frac{30}{71} \\ \frac{20}{71} & \frac{20}{71} & \frac{20}{71} \end{pmatrix}.$$

En efecto, la forma canónica de Jordan de $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{15}+\frac{1}{15}i\sqrt{17} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{15}-\frac{1}{15}i\sqrt{17} \end{pmatrix},$$

con base canónica :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{5}+\frac{1}{10}i\sqrt{17} \\ -\frac{2}{5}-\frac{1}{10}i\sqrt{17} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{9}{20}-\frac{3}{20}i\sqrt{17} \\ -\frac{9}{20}+\frac{3}{20}i\sqrt{17} \end{pmatrix} \right\}.$$

Como el límite de las potencias de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{15}+\frac{1}{15}i\sqrt{17} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{15}-\frac{1}{15}i\sqrt{17} \end{pmatrix}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces el límite de las potencias de $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{5}+\frac{1}{10}i\sqrt{17} & -\frac{9}{20}-\frac{3}{20}i\sqrt{17} \\ 1 & -\frac{2}{5}-\frac{1}{10}i\sqrt{17} & -\frac{9}{20}+\frac{3}{20}i\sqrt{17} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{5}+\frac{1}{10}i\sqrt{17} & -\frac{9}{20}-\frac{3}{20}i\sqrt{17} \\ 1 & -\frac{2}{5}-\frac{1}{10}i\sqrt{17} & -\frac{9}{20}+\frac{3}{20}i\sqrt{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{71} & \frac{21}{71} & \frac{21}{71} \\ \frac{30}{71} & \frac{30}{71} & \frac{30}{71} \\ \frac{20}{71} & \frac{20}{71} & \frac{20}{71} \end{pmatrix}.$$

Que coincide con el cálculo previo.

Ejemplo 141 *En un hospital, los pacientes se distribuyen en los estados: leve (l), y graves (g). Si alguien muere se admite un nuevo paciente de enfermedad leve en el hospital, lo mismo si sana. La probabilidad de que en un mes sane un paciente leve es de 60 %, de que siga siendo enfermo leve es 20 % y de que se ponga grave es del 20 %. Si un enfermo está grave la probabilidad de que en un mes sane es del 10 %, de que su enfermedad se vuelva leve es del 20 %, de que siga grave es del 50 % y de que muera es del 20 %.*
La matriz que describe el proceso es la siguiente:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} l & g \end{array} \\ \begin{array}{c} l \\ g \end{array} & \begin{pmatrix} ,8 & ,5 \\ ,2 & ,5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Como $\begin{pmatrix} ,8 & ,5 \\ ,2 & ,5 \end{pmatrix}$ *es una matriz positiva, para encontrar* $\lim_{m\to\infty} \begin{pmatrix} ,8 & ,5 \\ ,2 & ,5 \end{pmatrix}^m$ *basta encontrar el vector propio que corresponde a* 1 *y que es un vector de probabilidad.*

$$\begin{pmatrix} ,8 & ,5 \\ ,2 & ,5 \end{pmatrix} - 1I_2 = \begin{pmatrix} -.\,2 & .\,5 \\ .\,2 & -.\,5 \end{pmatrix}$$

:

$$\begin{pmatrix} -.\,2 & .\,5 \\ .\,2 & -.\,5 \end{pmatrix} \bowtie \begin{pmatrix} 1 & -2.\,5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ *es un vector propio que corresponde a* $1.\frac{1}{3{,}5}\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .\,714\,29 \\ .\,285\,71 \end{pmatrix}$.
Así que

$$\lim_{m\to\infty} \begin{pmatrix} ,8 & ,5 \\ ,2 & ,5 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} .\,714\,29 & .\,714\,29 \\ .\,285\,71 & .\,285\,71 \end{pmatrix},$$

y eventualmente el hospital tendrá $71{,}429\,\%$ *enfermos leves y* $28{,}571\,\%$ *enfermos graves.*

Ejercicio 250 *Encontrar el límite, cuando m tiende a infinito, de*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{5} & \frac{2}{10} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{5} & \frac{4}{10} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^m .$$

Ejercicio 251 *La gente de una ciudad vive en el centro, en la periferia o en una casa rentada. Los estados se puede etiquetar c, p o r. Las probabilidades de cambiar de estado en un año son las siguientes:*
si se vive en el centro, hay un 40 % de probabilidad de seguir en el centro, 30 % de alquilar una casa y 30 % de mudarse a la periferia. Si se alquila una casa hay 50 % de probabilidad de seguir rentando 40 % de mudarse a la periferia y 10 % de mudarse al centro. Por último, si se vive en el centro hay un 60 % de probabilidad de seguir viviendo en el centro, un 20 % de mudarse a la periferia y un 20 % de alquilar una casa. ¿ Después de mucho tiempo, cuáles serán las proporciones relativas de la población?

Llamemos matriz escalar a una matriz de la forma $cI_n, c \in F$.

Ejercicio 252 *Sean A, B en $M_{2\times 2}(F)$ no escalares. Demuestre que A y B son similares si y sólo si A y B tienen el mismo polinomio característico.*

Ejercicio 253 *La relación de similitud es una relación de equivalencia en $M_{n\times n}(F)$. Encuentre todas las clases de similitud en $M_{6\times 6}(\mathbb{Q})$ con polinomio mínimo $(x+2)^2(x-1)$.*

Ejercicio 254 *Encuentre todas las clases de similitud en $M_{6\times 6}(\mathbb{Q})$ con polinomio característico $(x^4-1)(x^2-1)$.*

Ejercicio 255 *Determine todas las formas canónicas racionales posibles para una transformación con polinomio característico $x^2(x^2+1)^2$.*

Ejercicio 256 *Sea ${}_{\mathbb{Q}}V$ de dimensión finita y $V \underset{lineal}{\overset{T}{\rightarrow}} V$ un isomorfismo tal que $T^{-1} = T^2 + T$. Demuestre que $\dim(V)$ es un múltipo de 3. Demuestre también que todos los operadores que satisfacen las condiciones son similares.*

Ejercicio 257 *Sea $B \in M_{10\times 10}(\mathbb{Q})$ tal que $\chi_B(t) = (t-2)^4(t^2-3)^3, \mu_B(t) = (t-2)^2(t^2-3)^2$ y rango$(B - 2I_{10}) = 8$. Encuentre las formas canónicas racional y de Jordan de B.*

Ejercicio 258 *Sea $T :_{\mathbb{Q}} V \longrightarrow_{\mathbb{Q}} V$ tal que $[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Encuentre una base γ de V tal que $[T]_\gamma^\gamma$ esté en forma canónica racional.*

Ejercicio 259 *Sea $A \in M_{7\times 7}(\mathbb{C})$ el bloque de Jordan de 7×7 con λ en la diagonal. Calcule la forma de Jordan de A^3. (Considere los casos $\lambda = 0$, $\lambda \neq 0$).*

Sea $B \in M_{4\times 4}(F)$ tal que $\chi_B(t) = (t-1)^4$. Demuestre que hay 5 posibilidades para la forma de Jordan de B. Demuestre que $\mu_B(t)$ y $rango(B - I_4)$ determinan la forma canónica de Jordan.

Ejercicio 260 *Encuentre la forma canónica de Jordan de*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 261 *Encuentre la forma canónica racional de la matriz del ejercicio anterior.*

Ejercicio 262 *Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, demuestre que $A = B + N$ donde B es diagonalizable, N es nilpotente y $BN = NB$. (Sugerencia: usar formas canónicas de Jordan).*

Ejercicio 263 *Determine las formas canónicas racional y de Jordan para*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 264 *Sea $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ tal que su forma canónica de Jordan es* $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ *y sea $B \in M_{4\times 4}(\mathbb{C})$ con forma canónica de Jordan*

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sea ${}_{\mathbb{C}}V = \{X \in M_{3\times 4}(\mathbb{C}) \mid AX = XB\}$. *Encuentre* $\dim(V)$.

Capítulo 11

Espacios con producto interior II

11.1. Operadores normales, autoadjuntos, unitarios

Recordemos que un operador $T : V \to V$ en un espacio con producto interior es

- Normal, si conmuta con su adjunto: $TT^* = T^*T$.
- Autoadjunto (o hermitiano cuando $F = \mathbb{R}$) si $T = T^*$.
- Unitario si preserva el producto interior.

Como vimos, una equivalencia a que un operador sea unitario es que su adjunto coincida con si inversa, es decir, $T^* = T^{-1}$.

De aquí vemos que los operadores autoadjunto y los operadores unitarios son operadores normales.

Es una consecuencia del Teorema 108 que si T es normal entonces $f(T)$ conmuta con $g(T^*)$, para cualesquiera dos polinomios $f(t)$ y $g(t) \in \mathbb{C}[t]$. En particular, si T es normal, entonces $(t - \lambda Id)(T) = T - \lambda Id$ conmuta con $(T - \lambda Id)^* = T^* - \bar{\lambda} Id = \left(t - \bar{\lambda}\right)(T^*)$.

Recordemos que el "Teorema Fundamental del Álgebra" asegura que $\mathbb{C}$ es un campo algebraicamente completo, es decir que cualquier polinomio de grado positivo con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene una raíz en $\mathbb{C}$.

Observación 99 *Si T es un operador normal en ${}_{\mathbb{C}}V$ con valor propio λ, entonces $\bar{\lambda}$ es un valor propio de T^*. De hecho, $T(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \Leftrightarrow T^*(\vec{x}) = \bar{\lambda} \cdot (\vec{x})$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
T(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow 0 = \langle T(\vec{x}) - \lambda\vec{x},\ T(\vec{x}) - \lambda\vec{x}\rangle \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow 0 = \langle (T - \lambda Id_V)(\vec{x}),\ (T - \lambda Id_V)(\vec{x})\rangle \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow 0 = \langle \vec{x},\ (T - \lambda Id_V)^*(T - \lambda Id_V)(\vec{x})\rangle \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow 0 = \langle \vec{x},\ (T - \lambda Id_V)(T - \lambda Id_V)^*(\vec{x})\rangle \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow 0 = \langle (T - \lambda Id_V)^*(\vec{x}),\ (T - \lambda Id_V)^*(\vec{x})\rangle \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \vec{0} = (T - \lambda Id_V)^*(\vec{x}) = T^*(\vec{x}) - \bar{\lambda} Id_V(\vec{x}) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow T^*(\vec{x}) = \bar{\lambda}\cdot(\vec{x}).
\end{aligned}$$

■

11.2. Operadores normales, $F = \mathbb{C}$

Teorema 143 *Sea* ${}_{\mathbb{C}}V \xrightarrow{T} {}_{\mathbb{C}}V$ *un operador normal en un espacio de dimensión finita no nula con producto interior. Entonces* T *es diagonalizable.*

Demostración. $\chi_T(t)$ tiene tantas raíces (contando multiplicidades) como $\dim(V)$. Digamos que los valores propios de T (las raíces de $\chi_T(t)$) son

$$\lambda_1, ..., \lambda_k.$$

Como de costumbre, denotemos $E_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(T - \lambda_i Id_V)$, así que

$$E_{\lambda_1} \bigoplus ... \bigoplus E_{\lambda_k} \leq {}_{\mathbb{C}}V.$$

Demostrar que T es diagonalizable equivale a demostrar que

$$E_{\lambda_1} \bigoplus ... \bigoplus E_{\lambda_k} = {}_{\mathbb{C}}V.$$

Si la inclusión fuera propia, entonces

$$W =: \left(E_{\lambda_1} \bigoplus ... \bigoplus E_{\lambda_k}\right)^{\perp} \neq \left\{\vec{0}\right\} = {}_{\mathbb{C}}\, V^{\perp}.$$

Notemos que W es $T-$ invariante:

$$\begin{aligned}
\vec{x}_i \in E_{\lambda_i}, \vec{w} \in W \Rightarrow \langle T(\vec{w}), \vec{x}_i\rangle = \langle \vec{w}, T^*(\vec{x}_i)\rangle = \\
\langle \vec{w}, T^*(\vec{x}_i)\rangle = \left\langle \vec{w}, \bar{\lambda}\cdot\vec{x}_i\right\rangle = \lambda\left\langle \vec{w}, \vec{x}_i\right\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Entonces podemos considerar

$$W \xrightarrow{T_{|W}} W$$

que también tendría un valor propio. por la hipótesis de que $W \neq \left\{\vec{0}\right\}$. Ahora, un valor propio de $T_{|W}$ es también un valor propio de T ($\chi_{T|W}(t) \mid \chi_{T}(t)$, Teorema 105).

Por lo tanto $W \cap (\sum E_{\lambda_i}) \neq \left\{\vec{0}\right\} \underset{\circ}{\nabla}$.

Esta contradicción muestra que

$$V = \sum E_{\lambda_i},$$

por lo tanto T es diagonalizable. ■

Corolario 33 *Sea ${}_{\mathbb{C}}V \xrightarrow{T} {}_{\mathbb{C}}V$ un operador normal en un espacio de dimensión finita no nula con producto interior. Entonces*

1. *T^* es simultáneamente diagonalizable con T.*
2. *$T^* = g(T)$ para algún $g(t) \in \mathbb{C}[t]$.*

Demostración. 1. Se sigue de que

$$T(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow T^*(\vec{x}) = \bar{\lambda}\vec{x}.$$

Por lo tanto una base de vectores propios de T es también una base de vectores propios de T^*.

2. Como la función conjugación,

$$\{\lambda_1, ..., \lambda_k\} \xrightarrow{(\bar{\ })} \left\{\bar{\lambda}_1, ..., \bar{\lambda}_k\right\}$$

es una función suprayectiva, podemos aplicar el Teorema 119 ■

Corolario 34 *Sea ${}_{\mathbb{C}}V \xrightarrow{T} {}_{\mathbb{C}}V$ un operador en un espacio de dimensión finita no nula con producto interior. Entonces son equivalentes:*

1. *T es normal.*
2. *$T^* = g(T)$ para algún $g(t) \in \mathbb{C}[t]$.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2.) Si T es normal, entonces T conmuta con T^*, entonces T y T^* son simultáneamente diagonalizables (Teorema 116), así que por el Corolario anterior, tenemos que $T^* = g(T)$ para algún $g(t) \in \mathbb{C}[t]$.

2. $\Rightarrow$ 1.) T conmuta con cualquier polinomio evaluado en T. ■

Ejercicio 265 *Sea* $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Demostrar que es normal y encontrar* $g(t)$ *tal que* $g(A) = A^*$.

Teorema 144 *Sea* ${}_{\mathbb{C}}V \xrightarrow{T} {}_{\mathbb{C}}V$ *un operador normal en un espacio de dimensión finita no nula con producto interior.* T *es normal* $\Leftrightarrow$ V *tiene una base ortonormal formada por vectores propios de* T.

Demostración. $\Rightarrow$) Ya vimos que T es diagonalizable, por lo tanto

$$V = E_{\lambda_1} \bigoplus \dots \bigoplus E_{\lambda_k}.$$

Por el Teorema de Gram-Schmidt, basta ver que vectores propios que corresponden a distintos valores propios de T son ortogonales.

En efecto,

$$\begin{aligned} &\left(\vec{0} \neq \vec{x} \in E_{\lambda_1}, \vec{0} \neq \vec{y} \in E_{\lambda_2}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda_1 \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \lambda_1 \vec{x}, \vec{y} \rangle = \\ &= \langle T(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, T^*(\vec{y}) \rangle = \\ &= \left\langle \vec{x}, \bar{\lambda}_2 \vec{y} \right\rangle = \lambda_2 \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle . \end{aligned}$$

Así que $0 \neq \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \underset{\circ}{\nabla}$.

$\Leftarrow$) $T(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \Leftrightarrow T^*(\vec{x}) = \bar{\lambda}\vec{x}$. Por lo tanto T^* conmuta con T si T es diagonalizable. ■

11.3. Operadores autoadjuntos, $F = \mathbb{R}$

Teorema 145 *Sea* ${}_{\mathbb{R}}V \xrightarrow{T} {}_{\mathbb{R}}V$ *un operador autoadjunto en un espacio de dimensión finita no nula con producto interior. Entonces* T *es diagonalizable.*

Demostración. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\phi_\beta"] & V \arrow[d, "\phi_\beta"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "{[T]_\beta^\beta \cdot _}"] \arrow[d] & \mathbb{R}^n \arrow[d] \\
\mathbb{C}^n \arrow[r, "{[T]_\beta^\beta \cdot _}"] & \mathbb{C}^n
\end{tikzcd}$$

Como $[T]_\beta^\beta = \left([T]_\beta^\beta\right)^* = \left([T]_\beta^\beta\right)^t$, (pues $[T]_\beta^\beta$ es una matriz simétrica con coeficientes reales) entonces $[T]_\beta^\beta \cdot \_$ es un operador normal, así que tiene algún valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$.

Ahora, λ valor propio de $[T]_\beta^\beta \cdot \_ \Rightarrow \bar{\lambda}$ es un valor propio de $\left([T]_\beta^\beta \cdot \_\right)^* = [T]_\beta^\beta \cdot \_$.

Entonces λ y $\bar{\lambda}$ son valores propios de $[T]_\beta^\beta \cdot \_$. Además $\exists \vec{0} \neq \vec{x} \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$\lambda \cdot \vec{x} = [T]_\beta^\beta \cdot \vec{x} = \left([T]_\beta^\beta \cdot \_\right)^* \cdot \vec{x} = \bar{\lambda} \cdot \vec{x},$$

por lo que $\lambda = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$.

Así tenemos que T tiene un valor propio real (de hecho, todo sus valores propios son reales).

Ahora el argumento prosigue por inducción sobre la dimensión de V.

Supongamos que

$$V = E_{\lambda_1} \bigoplus ... \bigoplus E_{\lambda_k} \bigoplus W,$$

donde $W = (E_{\lambda_1} \bigoplus ... \bigoplus E_{\lambda_k})^\perp$.

Entonces W es $T-$invariante. Además $\left(T_{|W}\right)^* = \left(T^*_{|W}\right) = T_{|W}$, así que si $\hat{0} \neq T_{|W}$, tenemos que $T_{|W}$ también tendría algún valor propio.

Por lo tanto $W \cap (E_{\lambda_1} \bigoplus ... \bigoplus E_{\lambda_k}) \neq \left\{\vec{0}\right\} \underset{\circ}{\nabla}$.

Así que $W = \left\{\vec{0}\right\}$ por lo que $V = E_{\lambda_1} \bigoplus ... \bigoplus E_{\lambda_k}$, es decir, T es diagonalizable.

■

Corolario 35 *Toda matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica, es diagonalizable.*

Ejercicio 266 *Muestre que* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *es diagonalizable.*

Ejercicio 267 *Sea* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por*

$$T\left((x, y, z)\right) = \left(x - y + z, x + y, z - x\right).$$

Decir si T *es autoadjunto.*

El resultado anterior se aplica para eliminar términos cruzados en las formas cuádricas que se estudian en geometría analítica.

Ejercicio 268 *Eliminar el término cruzado en*

$$4x^2 + 5xy + 9y^2 + 8 = 0,$$

mediante un cambio de coordenadas. Sugerencia:

$$4x^2 + 5xy + 9y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5/2 \\ 5/2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 269 *Encontrar nuevas coordenadas* $x\'$, $y\'$ *de manera que las siguientes formas cuadráticas puedan escribirse como* $\lambda_1 \left(x\'\right)^2 + \lambda_2 \left(y\'\right)^2$ *y decidir que tipo de curva determinan:*

1. $x^2 + 4xy + y^2 = 0.$
2. $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 0.$
3. $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 0.$

Ejercicio 270 *Determinar si el siguiente operador lineal es normal, autoadjunto o ninguna de las dos.* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definido mediante*

$$T\left((x, y)\right) = \left(2x - 2y, -2x + 5y\right).$$

Encontrar una base ortonormal para $\mathbb{R}^2$ *formada por vectores propios de* T.

11.4. Operadores unitarios

Teorema 146 *Sea* $_{\mathbb{C}}V \xrightarrow{T} {}_{\mathbb{C}}V$ *un operador normal en un espacio de dimensión finita no nula con producto interior.* T *es unitario* $\Leftrightarrow$ $_{\mathbb{C}}V$ *tiene una base ortonormal de vectores propios correspondientes a valores propios de tamaño* 1.

Demostración. $\Rightarrow$) Si T es unitario entonces existe β una base ortonormal de V de vectores propios.

Además
$\vec{x} \in \beta \Rightarrow \|\vec{x}\| = \|T(\vec{x})\| = \|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\| \Rightarrow |\lambda| = 1.$

$\Leftarrow$) Sea $\beta \underset{\text{base ortonormal}}{\hookrightarrow} V$ formada por vectores propios cuyos valores propios sean de tamaño 1. Digamos que

$$\beta = \{\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n\}.$$

Entonces

$$T(\beta) = \{T(\vec{x}_1), ..., T(\vec{x}_n)\} = \{\lambda_1(\vec{x}_1), ..., \lambda_n(\vec{x}_n)\}$$

es un conjunto ortonormal en V.

Como T manda la base ortonormal $\{\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n\}$ en la base ortonormal $\{\lambda_1\vec{x}_1, ..., \lambda_n\vec{x}_n\}$, concluímos que T es unitario (es claro que T preserva la norma). ■

Ejercicio 271 *Para la siguiente matriz* A *encontrar una matriz ortogonal o unitaria* P *y una matriz diagonal* D *tal que* $P^*AP = D$. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

11.5. Proyecciones

Recordemos que si $W \bigoplus Z = V$, entonces

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{p_W^Z} & V \\ \vec{w} + \vec{z} & \mapsto & \vec{w} \end{array},$$

se llama la proyección sobre W a lo largo de Z .

Observación 100 p_W^Z *depende de* Z *tanto como de* W.
Por ejemplo, si

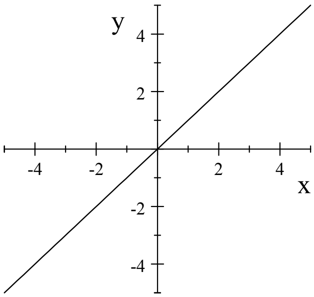
$$\begin{array}{rcl} V & = & \mathbb{R}^2, \\ W & = & \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}, \\ Z_1 & = & \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}, \\ Z_2 & = & \left\{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\right\}, \end{array}$$

entonces

$$p_W^{Z_1}(x,y) = p_W^{Z_1}((x,0)+(0,y)) = (0,y),$$

mientras que

$$p_W^{Z_2}(x,y) = p_W^{Z_2}((x,x)+(0,y-x)) = (0,y-x).$$



Teorema 147 *Son equivalentes para $T : V \longrightarrow V$:*

1. *T es una proyección ($T = p_W^Z$).*

2. *T es idempotente. ($T^2 = T \circ T = T$).*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2.) Es claro.
2. $\Rightarrow$ 1.) Demostraremos que $T = p_{T(V)}^{\mathrm{Ker}(T)}$.
Para empezar, veamos que $V = \mathrm{Ker}(T) \bigoplus T(V)$.
$\cap$)

$$\vec{x} \in \mathrm{Ker}(T) \cap T(V) \Rightarrow \vec{x} = T(\vec{y})$$

para alguna $\vec{y} \in V$ y además

$$\vec{0} = T(\vec{x}).$$

Entonces

$$\vec{0} = T(\vec{x}) = T(T(\vec{y})) = T(\vec{y}) = \vec{x}.$$

Por lo que $\mathrm{Ker}(T) \cap T(V) = \left\{\vec{0}\right\}$.
+) $\vec{x} \in V \Rightarrow \vec{x} = (\vec{x} - T(\vec{x})) + T(\vec{x}) \in \mathrm{Ker}(T) + T(V)$, pues

$$T(\vec{x} - T(\vec{x})) = T(\vec{x}) - T(T(\vec{x})) = T(\vec{x}) - T(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Hemos demostrado que

$$V = \operatorname{Ker}(T) \bigoplus T(V).$$

Además,

$$p_{T(V)}^{\operatorname{Ker}(T)}(\vec{x}) = p_{T(V)}^{\operatorname{Ker}(T)}((\vec{x} - T(\vec{x})) + T(\vec{x})) = T(\vec{x}), \forall \vec{x} \in V.$$

Por lo que $p_{T(V)}^{\operatorname{Ker}(T)} = T$. ■

11.5.1. Proyecciones ortogonales

Definición 124 *Sea V un espacio vectorial con producto interior, con un subespacio $W \leq V$ tal que*

$$W = W^{\perp\perp}.$$

Llamamos proyección ortogonal sobre W, a la proyección $p_W^{W^\perp}$.

Observación 101 *1. Si V es de dimensión finita, en la definición anterior siempre se tiene que $W = W^{\perp\perp}$.*

2. Si W es de dimensión finita, se tiene que $V = W \bigoplus W^\perp$, por lo que $W = W^{\perp\perp}$

Teorema 148 *Son equivalentes para un operador $T : V \longrightarrow V$ en un espacio con producto interior.*

1. *T es una proyección ortogonal.*
2. *T es idempotente y normal.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2.) $T = p_W^{W^\perp} \Rightarrow T$ es idempotente.
Supongamos que

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2,\ \vec{x}_1 \in W, \vec{x}_2 \in W^\perp,$$

$$\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2,\ \vec{y}_1 \in W,\ \vec{y}_2 \in W^\perp,$$

entonces

$$\begin{aligned} \left\langle p_W^{W^\perp}(\vec{x}), \vec{y} \right\rangle &= \langle \vec{x}_1, \vec{y}_1 + \vec{y}_2 \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{y}_1 \rangle = \\ &= \langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}_1 \rangle = \left\langle \vec{x}, p_W^{W^\perp}(\vec{y}) \right\rangle, \end{aligned}$$

de donde concluímos que $p_W^{W^\perp} = \left(p_W^{W^\perp}\right)^*$.

2. $\Rightarrow$ 1.) Como T es idempotente, entonces $T = p_{T(V)}^{\mathrm{Ker}(T)}$, basta demostrar que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\,(T) &= (T\,(V))^\perp \text{ y} \\ T\,(V) &= (T\,(V))^{\perp\perp}. \end{aligned}$$

Sea $\vec{x} \in$Ker(T) y sea $\vec{y} = T\,(\vec{z})$, entonces

$$\langle \vec{x}, T\,(\vec{z})\rangle = \langle T^*\,(\vec{x})\,, \vec{z}\rangle = \langle \bar{0}\vec{x}, \vec{z}\rangle = \left\langle \vec{0}, \vec{z}\right\rangle = 0.$$

Por lo tanto Ker$(T) \subseteq (T\,(V))^\perp$.

Veamos ahora que $(T\,(V))^\perp \underset{T}{\leq} V$:

$$\begin{gathered} \left(\vec{y} \in T\,(V)^\perp, T\,(\vec{x}) \in T\,(V)\right) \Rightarrow \\ \langle T\,(\vec{y})\,, T\,(\vec{x})\rangle = \langle \vec{y}, T^*\,(T\,(\vec{x}))\rangle = \langle \vec{y}, T\,(T^*\,(\vec{x}))\rangle = 0. \end{gathered}$$

Una vez que hemos visto que $T\,(V)^\perp \underset{T}{\leq} V$, supongamos que $\vec{y} \in (T\,(V))^\perp$, entonces $T\,(\vec{y}) \in T\,(V)^\perp$ por lo que

$$\langle T\,(\vec{y})\,, T\,(\vec{y})\rangle = 0,$$

por lo tanto $T\,(\vec{y}) = \vec{0}$, es decir que $\vec{y} \in$ Ker(T).

Acabamos de demostrar que $T\,(V)^\perp \subseteq$ Ker(T).

Por lo tanto $T\,(V)^\perp =$ Ker(T).

Resta demostrar que $T\,(V) = (T\,(V))^{\perp\perp}$.

Siempre se tiene que $T\,(V) \subseteq (T\,(V))^{\perp\perp}$.

Recíprocamente, sea $\vec{x} \in (T\,(V))^{\perp\perp}$, entonces $\vec{x} = T(\vec{x}) + (\vec{x} - T(\vec{x}))$. Como $\vec{x} - T\,(\vec{x}) \in$ Ker$(T) = T\,(V)^\perp$, entonces

$$\langle \vec{x}, \vec{x} - T\,(\vec{x})\rangle = 0.$$

Como $T\,(\vec{x}) \in T\,(V) \subseteq (T\,(V))^{\perp\perp}$, también tenemos que

$$\langle -T\,(\vec{x})\,, \vec{x} - T\,(\vec{x})\rangle = 0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \vec{x}, \vec{x} - T\,(\vec{x})\rangle + \langle -T\,(\vec{x})\,, \vec{x} - T\,(\vec{x})\rangle = \\ &= \langle \vec{x} - T\,(\vec{x})\,, \vec{x} - T\,(\vec{x})\rangle\,. \end{aligned}$$

De aquí que $\vec{x} - T(\vec{x}) = \vec{0}$, así que $\vec{x} = T(\vec{x}) \in T(V)$. Con esto vemos que $(T(V))^{\perp\perp} \subseteq T(V)$.

Por lo tanto
$$(T(V))^{\perp\perp} = T(V).$$

Entonces
$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(T) &= (T(V))^{\perp} \text{ y} \\ T(V) &= (T(V))^{\perp\perp} = \operatorname{Ker}(T)^{\perp}. \end{aligned}$$

Por lo tanto
$$V = T(V) \bigoplus \operatorname{Ker}(T) = T(V) \bigoplus T(V)^{\perp}.$$

■

Observación 102 *Notemos que un operador idempotente y normal tiene que ser autoadjunto, en vista del teorema anterior.*

Ejercicio 272 *Demuestre por inducción que si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ es idempotente y normal, entonces $A = A^*$.*

Teorema 149 *Sea $W \leq V$, W de dimensión finita, V con producto interior, entonces $p_W^{W^\perp}(\vec{x})$ es el vector de W más cercano a $\vec{x}$.*

Demostración. $\vec{x} = p_W^{W^\perp}(\vec{x}) + \left(\vec{x} - p_W^{W^\perp}(\vec{x})\right)$, con $\left(\vec{x} - p_W^{W^\perp}(\vec{x})\right) \in W^\perp$. Ahora, $\forall \vec{w} \in W$,
$$\|\vec{x} - \vec{w}\| = \langle \vec{x} - \vec{w}, \vec{x} - \vec{w}\rangle =$$
$$= \left\langle p_W^{W^\perp}(\vec{x}) + \left(\vec{x} - p_W^{W^\perp}(\vec{x})\right) - \vec{w}, p_W^{W^\perp}(\vec{x}) + \left(\vec{x} - p_W^{W^\perp}(\vec{x})\right) - \vec{w}\right\rangle =$$
$$= \left\langle \left(p_W^{W^\perp}(\vec{x}) - \vec{w}\right) + \left(\vec{x} - p_W^{W^\perp}(\vec{x})\right), \left(p_W^{W^\perp}(\vec{x}) - \vec{w}\right) + \left(\vec{x} - p_W^{W^\perp}(\vec{x})\right)\right\rangle =$$
$$= \left\langle \left(p_W^{W^\perp}(\vec{x}) - \vec{w}\right), \left(p_W^{W^\perp}(\vec{x}) - \vec{w}\right)\right\rangle + \left\langle \left(\vec{x} - p_W^{W^\perp}(\vec{x})\right), \left(\vec{x} - p_W^{W^\perp}(\vec{x})\right)\right\rangle =$$
$$= \left\|\left(p_W^{W^\perp}(\vec{x}) - \vec{w}\right)\right\|^2 + \left\langle \left(\vec{x} - p_W^{W^\perp}(\vec{x})\right), \left(\vec{x} - p_W^{W^\perp}(\vec{x})\right)\right\rangle \geq$$
$$\geq \left\langle \left(\vec{x} - p_W^{W^\perp}(\vec{x})\right), \left(\vec{x} - p_W^{W^\perp}(\vec{x})\right)\right\rangle = \left\|\vec{x} - p_W^{W^\perp}(\vec{x})\right\|.$$

■

11.6. El teorema espectral

Teorema 150 (Espectral) *Sea* ${}_FV \xrightarrow{T} {}_FV$ *un operador lineal en un espacio de dimensión finita con producto interior. Supongamos que* T *es normal si* $F = \mathbb{C}$ *y que* T *es autoadjunto si* $F = \mathbb{R}$.

Sean $\lambda_1, ..., \lambda_k$ *los distintos valores propios de* T*, denotemos* $T_i =: p_{E_{\lambda_i}}^{E_{\lambda_i}^{\perp}}$ *la proyección ortogonal sobre* E_{λ_i}*. Entonces*

1. $V = E_{\lambda_1} \bigoplus ... \bigoplus E_{\lambda_k}$.
2. *Denotemos* $W_i' = \bigoplus\limits_{\substack{j \\ j\neq i}} E_{\lambda_j}$*, entonces* $W_i' = W_i^{\perp}$.
3. $T_iT_j = \delta_{i,j}T_i$*, donde* $\delta_{i,j}$ *denota la delta de Kronecker.*
4. $Id_V = T_1 + ... + T_k$.
5. $T = \lambda_1 T_1 + ... + \lambda_k T_k$.

Demostración. 1. Esto sucede porque T es diagonalizable (Teoremas 143 y 145).

2. Para un operador normal, vectores propios que corresponden a distintos valores propios son ortogonales: pues si tomamos a

$$\vec{u} \in E_{\lambda_1}, \vec{v} \in E_{\lambda_2}, \lambda_1 \neq \lambda_2,$$

entonces

$$\begin{aligned}\lambda_1 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \lambda_1 (\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle T(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \\ = \langle \vec{u}, T^*(\vec{v}) \rangle = \left\langle \vec{u}, \bar{\lambda}_2 (\vec{v}) \right\rangle = \lambda_2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle .\end{aligned}$$

Esto muestra que $E_{\lambda_j} \subseteq (E_{\lambda_i})^{\perp}\ \forall j \neq i$.

Por lo tanto $W_i' \subseteq (E_{\lambda_i})^{\perp}$, por otra parte las dimensiones de ambos espacios coinciden, dadas las descomposiciones de V :

$$V = E_{\lambda_i} \bigoplus W_i' \text{ y}$$
$$V = E_{\lambda_i} \bigoplus (E_{\lambda_i})^{\perp} .$$

Por lo tanto,

$$W_i' = (E_{\lambda_i})^{\perp} .$$

3. Como $T_i$es una proyección, entonces $T_i \circ T_i = T_i$.

Si $i \neq j$, entonces $T_j(V) = \left(E_{\lambda_j}\right) \subseteq W_i' = \left(E_{\lambda_i}\right)^{\perp}$, así que $T_i(T_j(V)) \subseteq T_i\left(\left(E_{\lambda_i}\right)^{\perp}\right) = p_{E_{\lambda_i}}^{E_{\lambda_i}^{\perp}}\left(\left(E_{\lambda_i}\right)^{\perp}\right) = \left\{\vec{0}\right\}$.

En resumen, $T_iT_j = \delta_{i,j}T_i$.

4. Como $V = E_{\lambda_1} \bigoplus ... \bigoplus E_{\lambda_k}$, si

$$\vec{v} = \vec{w}_1 + ... + \vec{w}_k$$

debe ser claro de los incisos anteriores que $T_1(\vec{v}) = \vec{w}_1, ..., T_k(\vec{v}) = \vec{w}_k$, entonces

$$\vec{v} = T_1(\vec{v}) + ... + T_k(\vec{v}) = (T_1 + ... + T_k)(\vec{v}), \ \forall \vec{v} \in V.$$

5. Respetando la notación del inciso anterior,

$$\begin{aligned} T(\vec{v}) &= T(\vec{w}_1 + ... + \vec{w}_k) = \\ &= T(\vec{w}_1) + ... + T(\vec{w}_k) = \lambda_1(\vec{w}_1) + ... + \lambda_k(\vec{w}_k) = \\ &= \lambda_1(T_1(\vec{v})) + ... + \lambda_k(T_k(\vec{v})) = \\ &= (\lambda_1 T_1)(\vec{v}) + ... + (\lambda_k T_k)(\vec{v}) = \\ &= (\lambda_1 T_1 + ... + \lambda_k T_k)(\vec{v}), \ \forall \vec{v} \in V, \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$T = \lambda_1 T_1 + ... + \lambda_k T_k.$$

■

Corolario 36 *Sea* ${}_{\mathbb{C}}V \xrightarrow{T} {}_{\mathbb{C}}V$ *un operador normal en un espacio de dimensión finita con producto interior.* T *es autoadjunto* $\Leftrightarrow$ *cada valor propio de* T *es un elemento de* $\mathbb{R}$.

Demostración. Como $T = \lambda_1 T_1 + ... + \lambda_k T_k$ (con la notación del Teorema espectral), entonces

$$\begin{aligned} T^* &= (\lambda_1 T_1 + ... + \lambda_k T_k)^* = \\ &= (\lambda_1 T_1)^* + ... + (\lambda_k T_k)^* = \\ &= \bar{\lambda}_1 T_1^* + ... + \bar{\lambda}_k T_k^* = \\ &= \bar{\lambda}_1 T_1 + ... + \bar{\lambda}_k T_k. \end{aligned}$$

ya que las proyecciones ortogonales son autoadjuntas (Observación 102).

Ahora, si cada valor propio de T es real entonces $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$, para cada i, y por lo tanto $T = T^*$.

Recíprocamente, si

$$\lambda_1 T_1 + ... + \lambda_k T_k = \bar{\lambda}_1 T_1 + ... + \bar{\lambda}_k T_k,$$

tomemos $\vec{x}_i$ un vector propio de T que corresponda a λ_i, entonces

$$\begin{aligned} \lambda_i \vec{x}_i &= (\lambda_1 T_1 + ... + \lambda_k T_k)(\vec{x}_i) = \\ &= \left(\bar{\lambda}_1 T_1 + ... + \bar{\lambda}_k T_k\right) \vec{x}_i = \\ &= \bar{\lambda}_i \vec{x}_i \end{aligned}$$

Como $\vec{x}_i \neq \vec{0}$, entonces $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$. ■

Corolario 37 *Sea ${}_FV \xrightarrow{T} {}_FV$ un operador lineal no nulo en un espacio de dimensión finita con producto interior. Supongamos que T es normal si $F = \mathbb{C}$ y que T es autoadjunto si $F = \mathbb{R}$.*

Entonces cada $T_i = p_{E_{\lambda_i}}^{\left(E_{\lambda_i}\right)^{\perp}}$ es un polinomio evaluado en T.

Demostración. Usaremos la notación del Teorema espectral.

Como $T = \lambda_1 T_1 + ... + \lambda_k T_k$ y como $T_i T_j = \delta_{i,j} T_i$, es claro que $T_i \circ T = \lambda_i T_i = T_i \circ T$. Entonces los operadores T y T_i son simultáneamente diagonalizables.

La afirmación es cierta si T sólo tiene un valor propio, pues en este caso $T = \lambda_1 T_1$, por lo que $T_1 = \frac{1}{\lambda_1} T = \left(\frac{1}{\lambda_1} t\right)(T)$. (Si $\lambda_1 = 0$ entonces $T = \hat{0}\ \underset{\circ}{\nabla})\ V = E_{\lambda_1}$, por lo que $T_1 = Id_V$.

Supongamos ahora que T tiene por lo menos dos valores propios.

Como $T_i = p_{E_{\lambda_i}}^{\left(E_{\lambda_i}\right)^{\perp}}$ debe ser claro que T_i tiene exactamente dos valores propios: $\gamma_1 = 1$ y $\gamma_2 = 0$. Denotemos

$$E_i' =: \{\vec{x} \in V \mid T_i(\vec{x}) = \gamma_i \vec{x}\},\ i \in \{1, 2\}.$$

Es claro que

$$E_1' = E_{\lambda_i}$$

y que

$$E_2' = \operatorname{Ker}(T_i) = \bigoplus_{\substack{j \\ j \neq i}} E_{\lambda_j}.$$

Por lo tanto la suprayección

$$\begin{array}{ccc} \{1,...,k\} & \overset{\Psi}{\twoheadrightarrow} & \{1,2\} \\ i & \mapsto & 1 \\ i \neq j & \mapsto & 2 \end{array}$$

satisface

$$E'_{\gamma_j} = \sum_{\Psi(u)=j} E_{\lambda_u}.$$

Pues

$$E'_1 = E'_{\gamma_1} = E_{\lambda_i} = \sum_{\Psi(u)=1} E_{\lambda_u}$$

y

$$E'_0 = E'_{\gamma_2} = \sum_{\substack{j \\ j\neq i}} E_{\lambda_u} = \sum_{\Psi(u)=2} E_{\lambda_u}.$$

La conclusión sigue inmediatamente del Teorema 119. ∎

Ejercicio 273 *Muestre que el Corolario anterior falla si no pedimos que el operador T sea distinto de $\hat{0}$.*

Ejercicio 274 *Para* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

1. *Demostrar que $A \cdot \_$ posee una descomposición espectral.*
2. *De manera explícita, definir cada una de las proyecciones ortogonales en los espacios propios de $A \cdot \_T$.*
3. *Verificar los resultados usando el Teorema espectral.*

Algunas notaciones utilizadas en el libro:

$\mathbb{C}$: conjunto de números complejos
$\mathbb{N}$: conjunto de números naturales
$\mathbb{Q}$: conjunto de números racionales
$\mathbb{R}$: conjunto de números reales
$\mathbb{Z}$: conjunto de números enteros
$\wp(X)$: conjunto de subconjuntos de X
$\cap$: intersección
$\cup$: unión
$\mathring{\cup}$: unión ajena
$A \mathring{\cup} B$: unión de A con B, que además son ajenos
$\mathbb{R}^n$: producto directo de n copias de $\mathbb{R}$
$M_{n\times m}(F)$: conjunto de las matrices de n renglones y m columnas
$M_n(F)$: conjunto de las matrices de $n \times n$ con coeficientes en F
$\Rightarrow$: implica
$\Leftrightarrow$: si y sólo si
$\vee$: disyunción, supremo
$\wedge$: conjunción, ínfimo
$\times$: producto cartesiano
$\setminus$: diferencia de conjuntos
$\forall$: cuantificador universal
$\exists$: cuantificador existencial
$\in$: símbolo de pertenencia
$\varnothing$: conjunto vacío
$\{H_\alpha\}_X$: familia de conjuntos con índices en X
A^B: conjunto de funciones de B en A
$A \xrightarrow{f} B$,: f es una función de A en B
$A \overset{f}{\twoheadrightarrow} B$: f es una función suprayectiva
$A >\!\!>\!\!\longrightarrow B$: función inyectiva
$A >\!\!>\!\!\twoheadrightarrow B$: función biyectiva

$f \circ g$: "g seguida de f"
σ: función sucesor
$Biy\,(X)$: conjunto de biyecciones de X a X
Id_X: función identidad en el conjunto X
$|X|$: cardinal de X
x^{-1}: inverso de x en un grupo
$2\mathbb{Z}$: conjunto de los pares
$n\mathbb{Z}$: conjunto de múltiplos de n
$2\,\mathbb{Z}+1$: conjunto de los impares
$n\,\mathbb{Z}+m\,\mathbb{Z}$: conjunto de combianciones enteras de n y m
$(n;m)$: máximo común divisor de n y m
$[n;m]$: mínimo común múltiplo de n y m
i_X^A: inclusión de X en A
$f_{|X}$: restricción de f a X
$f^{|Y}$: correstricción de f a Y
$f_{|X}^{|Y}$: restricción de f a X,correstringida a Y
$\langle X\rangle$: subgrupo generado por X
e: neutro en un monoide
$dist$: distancia
B^c: complemento de B
$\mathbb{Z}_n$: enteros módulo n
$Z_n^{\times}$: unidades de $\mathbb{Z}_n$
$\mathbb{R}\,[x]$: anillo de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$
$\bar{a}$: clase de congruencia de a
$W \leq_F V$: W es un subespacio de V
$\mathcal{L}\,(X)$: subespacio generado por X
$A_{i,j}$: coeficiente en el renglón i y en la columna j de A
$\mathbb{S}_n$: conjunto de las matrices simétricas de $n \times n$
$\mathbb{T}_n$: conjunto de las matrices triangulares supeiores de $n \times n$
$\mathfrak{L}\,(X)$: subespacio generado por X
$\mathfrak{L}\,(\vec{x})$: subespacio generado por $\vec{x}$
$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$: base canónica de $\mathbb{R}^n$
$\bigoplus$: suma directa
$W \oplus Z$: suma directa de los subespacios W y Z
$\mathcal{P}\,(\mathbb{R})$: subespacio de las funciones reales pares de variable real
$\mathcal{I}\,(\mathbb{R})$: subespacio de las funciones reales impares de variable real
$V \approxeq W$: V es isomorfo a W
I_n: matriz idnetidad de $n \times n$

$\delta_{i,j}$: delta de Kronecker
$[T]_\beta^\gamma$: matriz de T respecto a las bases β y γ
$[T]_{can}^{can}$: matriz de T respecto a las bases canónicas
$[\vec{x}]_\beta$: vector de coordenadas de $\vec{x}$ respecto a la base β
$V \xrightarrow{\varphi_\beta} F^n$: la función $\vec{x} \mapsto [\vec{x}]_\beta$
nul: nulidad
rango
rango*: rango de columna
$|$: tal que, divide a, concatenación de matrices, restricción, correstricción
$(A \mid B)$: concatenación de las matrices A y B
J: bloque de Jordan
$\langle \mid \rangle$: producto interior
$\|\|$: norma
$||$: valor absoluto, módulo
$e^{()}$: función exponencial
$V \times W \xrightarrow{T \times U} X \times Y$: la función $(\vec{v}, \vec{w}) \longmapsto (T(\vec{v}), T(\vec{w}))$
T^*: adjunto de T
A^t: transpuesta de A
$A \cdot \_$: multiplicar por A a la izquierda
$\_ \cdot A$: multiplicar por A a la drecha
$c \cdot \_$: multiplicar por c
$Hom_F(V, W)$: espacio de las funciones lineales de V a W
$A^{\underline{j}}$: $j-$ésima columna de A
$A_{\underline{i}}$ i: -ésimo renglón de A
R_θ: rotación por un ángulo θ
ρ_θ: rotación por un ángulo θ
σ_ℓ: reflexión respecto de la línea ℓ
c.l.: combinación lineal
l.i: linealmente independiente
l.d.: linealmente dependiente
$P_n(F)$: conjunto de los polinomios de grado a lo más n junto con el polinomio cero
$F[x]$: espacio de los polinomios con coeficientes en F
$F^{(\mathbb{N})}$: conjunto de los polinomios con coeficientes en F, pensados como sucesiones casi nulas
$\mathcal{I}_{i,j}$: operación elemental que intercambia los renglones i y j de una matriz
$\mathfrak{I}_{i,j}$: $\mathcal{I}_{i,j}(I_n)$
$\mathcal{M}_{c,i}$: operación elemental de renglón que multiplica por c el renglón i de una

matriz

$\mathfrak{M}_{c,i}$: $\mathcal{M}_{c,i}(I_n)$

$\mathcal{S}_{c,i,j}$: operación elemental que suma c veces el renglón i al renglón j de una matriz

$\mathcal{R}$, $\mathcal{E}$: operaciones elementales

$\mathcal{I}^{i,j}$: operación elemental que intercambia las columnas i y j de una matriz

$\mathcal{M}^{c,i}$: operación elemental de columna que multiplica por c la columna i de una matriz

$\mathcal{S}^{c,i,j}$: operación elemental de columnna que suma c veces la columna i a la columna j de una matriz

S_H: conjunto de soluciones de un sistema homogéneo

$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: matriz con submatriz A y con el resto de sus coeficientes 0

V^*: espacio dual

β^*: base dual de la base β

$V^{(X)}$: espacio de las funciones de X a V que se anulan en casi todo elemento de X

$V \xrightarrow{ev_{()}} V^{**}$: la función $\vec{v} \mapsto ev_{\vec{v}}$

$V^* \xrightarrow{ev_{\vec{v}}} F$: la función $T \mapsto T(\vec{v})$

$\mathbb{R}^+$: conjunto de reales positivos

tr: traza

$tr(A)$: $\sum_{i=1}^{n} A_{i,i}$, cuando $A \in M_{n\times n}(F)$

$\overline{A^t} = A^*$: adjunta de A

$S^\perp$: $\left\{\vec{v} \mid \langle \vec{v}, \vec{s} \rangle = \vec{0}, \forall \vec{s} \in S\right\}$

$()^\perp : \wp(V) \longrightarrow \left[\left\{\vec{0}\right\}, {}_F V\right]$: $S \mapsto S^\perp$

$\left[\left\{\vec{0}\right\}, {}_F V\right]$: conjunto de los subespacios de ${}_F V$

$[W, X]$: conjunto de los subespacios de ${}_F V$ que contienen a W y que están contenidos en X

$\mathrm{Re}(z)$: parte real de z

$Im(z)$: parte imaginaria de z

det, $||$: determinante

δ: función n-lineal, función alternante, determinante

$\left(1, \sigma(1), \sigma^2(1), ..., \sigma^k(1)\right)$: ciclo en S_n

S_n: grupo de las permutaciones en $\{1, 2, ..., n\}$

A_n: grupo de las permutaciones pares en $\{1, 2, ..., n\}$

$sig(\sigma)$: signo de σ

$\widehat{A_{i,k}}$: matriz que se obtiene al suprimir en la matriz A el renglón i y la columna k

$Ev_a : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$: la función $f(x) \mapsto f(a)$

$\overset{f(x)}{\equiv}$: congruencia módulo $f(x)$

$\mathcal{C}^\infty$: conjunto de las funciones reales de variable real que tienen derivada n-ésima para cada n

$\chi_A(t)$: polinomio característico de A

$\mu_A(t)$: polinomio mínimo para A

$\chi_T(t)$: polinomio característico de T

$\mu_T(t)$: polinomio mínimo para T

$A \bowtie B$: B se obtiene al aplicar uan operación elemental a A

E_λ: subespacio de V cuyos elementos son los vectores propios de T correspondientes al valor propio λ

$\left(\hat{0} : T\right) = \left\{f \in F[t] \mid f(T) = \hat{0}\right\}$

$F[t]\,\mu_T(t) = \{f\mu \in F[t] \mid f \in F[t]\}$

$W \leq_T V$: W es un subespacio T invariante de V

H_W^V: conjunto de operadores T en V que hacen a W T-invariante

$\mathfrak{L}_T(X)$: subespacio T-invariante generado por X

$\mathfrak{L}_T(\vec{x})$: subespacio T-cíclico generado por $\vec{x}$

$C(T)$: conjunto de los operadores que conmutan con T

$\mathfrak{D}(V)$: conjunto de los operadores en V que son diagonalizables

C_f: matriz compañera del polinomio f

$p - zoc$,: p-zoclo, $Ker(p(T))$, $p(t)$ polinomio irreducible

V/W: espacio cociente

$c_S(V)$: número de sumandos directos con polinomio mínimo $p^s(t)$ en una descomposición de V en sumandos directos T-cíclicos

Bibliografía

[1] Devlin, K. *The joy of Sets*. New York. Springer Verlag. 1993.

[2] Hamilton, A.*Numbers, Sets & Axioms: the apparatus of Mathematics.* Cambridge. Cambridge University Press. 1982.

[3] Jacobson, N. *Basic Algebra I.* New York. W. H. Freeman and Company, 1985.

[4] Hernández Hernández, F. *Teoría de Conjuntos.* México. Aportaciones Matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana. 1998.

[5] Friedberg, S. Insel, A. Spence, L. *Álgebra Lineal.* México. Publicaciones Cultural. 1982.

[6] Ramírez Galarza, A. I. *Geometría Analítica: Una introducción a la Geometría.* México. Prensas de Ciencias, UNAM. 1998.

[7] Rotman, I. *An introduction to the Theory of Groups.* New York. Springer Verlag. 1995.

Índice alfabético

Álgebra lineal
editado por la Facultad de Ciencias de la
Universidad Nacional Autónoma de México,
se terminó de imprimir el 30 de febrero de 2013
en los talleres NAVEGANTES DE LA COMUNICACIÓN GRÁFICA, S.A. de C.V.
Pascual Ortiz Rubio No. 40, San Simón Ticumac
Delegación Benito Juárez C.P. 03660. México, D.F.

El tiraje fue de 500 ejemplares

Está impreso en papel cultural de 90 grs.
En su composición se utilizó tipografía Computer modern
de 11:13.5, 14:16 y 16:18 puntos de pica